

František Zítek

Sur la durée des processus linéaires

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 8 (1958), No. 1, 122–130

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100281>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1958

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

SUR LA DURÉE DES PROCESSUS LINÉAIRES

FRANTIŠEK ZÍTEK, Praha

(Reçu le 26 janvier 1957)

On étudie dans cet article les domaines de définition temporels des processus stochastiques linéaires. Quelques exemples de problèmes statistiques qui s'y rattachent sont traités à la fin.

1. Introduction

Pour l'ensemble paramétrique T d'un processus stochastique on prend généralement soit l'intervalle $\langle 0, \infty \rangle$ soit tout l'axe réel $R = (-\infty, \infty)$. Si le processus considéré est linéaire, il a, à l'exception de certains cas banaux, nécessairement un commencement, c'est-à-dire il existe un point $t_0 \in R$ tel que le processus ne peut plus être prolongé linéairement au-delà de t_0 (à gauche). Lorsqu'il s'agit de considérations théoriques, on peut, il est vrai, choisir toujours zéro pour ce point initial, mais dans le cas d'un processus concret donné où ce choix-là n'est plus possible, il peut y avoir un certain intérêt à connaître l'instant initial du processus.

Dans tout ce qui suit, les processus stochastiques sont considérés du point de vue de Bernoulli seulement (voir [1]).

2. Définitions et notations fondamentales

Soit $(\Omega, \mathfrak{E}, \mathbf{P})$ un champ de probabilité, soit \mathfrak{X}^* l'ensemble des variables aléatoires (réelles et finies) sur ce champ, soit \mathfrak{X} le sous-ensemble des variables aléatoires dépendant de lois indéfiniment divisibles. Un processus stochastique sera pour nous une transformation \mathbf{X} faisant à chaque t , élément d'un intervalle T dans R , correspondre une variable aléatoire $X(t) \in \mathfrak{X}$.¹⁾

Nous dirons qu'un tel processus est linéaire si les trois conditions suivantes sont vérifiées:

¹⁾ Nous nous bornons donc aux variables aléatoires dépendant de lois indéfiniment divisibles; pour le cas plus général voir nos remarques à la fin du paragraphe 4.

(a) si $t_1, t_2 \in T, t_1 < t_2$, alors l'accroissement $[X(t_2) - X(t_1)]$ est une variable aléatoire stochastiquement indépendante de $X(t_1)$ et de l'ensemble des $X(t)$ pour $t < t_1, t \in T$;

(b) la loi régissant cet accroissement $[X(t_2) - X(t_1)]$ dépend de la différence $(t_2 - t_1)$ seulement;

(c) pour $t_n \rightarrow t, t_n > t$ l'accroissement $[X(t_n) - X(t)]$ tend vers zéro en probabilité.

On sait bien (voir p. ex. [1]) que les processus linéaires peuvent être caractérisés par leur fonction- ψ

$$\psi(t, s) = \lg \int_{\Omega} \exp [is X(t)(\omega)] d\mathbf{P}(\omega), \quad (2.1)$$

le logarithme de l'argument complexe en question étant défini d'une telle manière que, pour chaque $t \in T, \psi(t, s)$ soit une fonction continue de s s'annulant pour $s = 0$.

Désignons par \mathbf{D} l'ensemble des fonctions- ψ des lois indéfiniment divisibles. On a alors le suivant

Lemme 1. $\{\psi(s) \in \mathbf{D}\} \Leftrightarrow \{t \cdot \psi(s) \in \mathbf{D} \text{ pour chaque } t \geq 0\}$.

Pour les fonctions- ψ on a en général le

Lemme 2. Pour toute fonction- ψ on a $\Re \psi(s) \leq 0$ pour tout s réel, l'égalité ayant lieu partout si et seulement si un μ réel existe tel que $\psi(s) = i\mu s$.

L'ensemble des fonctions- ψ du type $\psi(s) = i\mu s$ sera désigné par \mathbf{M} . Spécialement la fonction- ψ identiquement nulle sera désignée par $\vartheta(s)$; on a évidemment $\vartheta \in \mathbf{M} \subset \mathbf{D}$.

Lemme 3. L'ensemble \mathbf{D} est fermé et convexe, c'est-à-dire:

(1) si $\psi_n \in \mathbf{D}$ pour $n = 1, 2, \dots, \psi_n(s) \rightarrow \psi(s)$ uniformément dans tout intervalle fini, alors $\psi \in \mathbf{D}$;

(2) si $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{D}, \psi(s) = \psi_1(s) + \psi_2(s)$, alors $\psi \in \mathbf{D}$.

Pour la démonstration de ces trois lemmes voir p. ex. [2].

3. Processus linéaires

Il n'y a pas de difficulté à voir²⁾ que la fonction- ψ (voir (2.1)) d'un processus linéaire est nécessairement de la forme

$$\psi(t, s) = \psi_0(s) + (t - t_0) \bar{\psi}(s) \quad (3.1)$$

où ψ_0 et $\bar{\psi}$ sont deux éléments de \mathbf{D} . Démontrons d'abord le

²⁾ En effet, la fonction- ψ de l'accroissement $X(t_2) - X(t_1)$ ne dépend que de la différence $\Delta t = t_2 - t_1$, elle est en outre additive en Δt , et continue; cela résulte des conditions (a), (b) et (c) du paragraphe 2. De là on obtient déjà le caractère linéaire (en Δt) de cette fonction- ψ , d'où (3.1).

Théorème 1. Soient $t_0 \in R$ et $\varphi_0, \bar{\varphi} \in \mathbf{D}$. Alors l'ensemble T des valeurs de t pour lesquelles la fonction $\psi(t, s)$ définie par (3.1) appartient à \mathbf{D} (en tant qu'une fonction de s), forme toujours un intervalle. On a $T = R$ si et seulement si $\bar{\varphi} \in \mathbf{M}$. Dans le cas contraire on a $T = \langle t_1, \infty \rangle$ où $t_1 \leq t_0$.

Démonstration. Soit T l'ensemble défini par la relation

$$t \in T \Leftrightarrow \psi(t, s) \in \mathbf{D}. \quad (3.2)$$

En vertu de la relation évidente (voir notre lemme 3)

$$t_1 \in T, t_2 > t_1 \Rightarrow t_2 \in T$$

et du fait que $t_0 \in T$, T est toujours un intervalle non vide. Si $\bar{\varphi} \in \mathbf{M}$, on a nécessairement $T = R$. Reste donc à démontrer que pour tout $\bar{\varphi}$ non $\in \mathbf{M}$ il existe toujours un $t_2 > -\infty$ n'appartenant pas à T . Or cela est facile à voir car on a $\Re \bar{\varphi}(s) < 0$ pour un s au moins (en vertu du lemme 2), pour ce même s un $t_2 < t_0$ existe tel que

$$\Re \psi(t_2, s) = \Re \varphi_0(s) + (t_2 - t_0) \Re \bar{\varphi}(s) > 0,$$

mais cela implique que $\psi(t_2, s)$ n'est même plus une fonction- ψ , donc à plus forte raison $\psi(t_2, s)$ non $\in \mathbf{D}$, donc t_2 non $\in T$. Le fait que T est fermé résulte alors du lemme 3.

M. PAUL LÉVY donne dans son ouvrage [1], p. 161, le théorème intéressant que voici:

Théorème 32.3. N'importe quelle loi indéfiniment divisible peut être obtenue par un processus linéaire.

Cela veut dire que, une loi indéfiniment divisible étant donnée, il existe toujours un processus linéaire \mathbf{X} tel que, pour un certain t (que l'on peut même supposer positif), la variable aléatoire $X(t)$ dépend de la loi donnée. Il suffit en effet de prendre un processus \mathbf{X} dont la fonction- ψ (2.1) a la forme suivante

$$\psi(t, s) = \vartheta(s) + t \bar{\varphi}(s),$$

$\bar{\varphi}(s)$ étant la fonction- ψ de la loi en question.

Mais nous pouvons établir un résultat plus général encore que nous allons exprimer par le suivant

Théorème 2. Etant donnés deux nombres réels $t_1 < t_2$ et deux éléments de \mathbf{D} , soit φ_1 et φ_2 , la condition nécessaire et suffisante pour qu'il y ait un processus linéaire \mathbf{X} tel que sa fonction- ψ vérifie

$$\psi(t_1, s) = \varphi_1(s) \quad \text{et} \quad \psi(t_2, s) = \varphi_2(s), \quad (3.3)$$

est que l'on ait $(\varphi_2 - \varphi_1) \in \mathbf{D}$.

Pour la démonstration de ce théorème il suffit en effet de considérer un processus avec la fonction- ψ

$$\psi(t, s) = \varphi_1(s) + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} [\varphi_2(s) - \varphi_1(s)]. \quad (3.4)$$

Les relations (3.3) résultent alors de (3.4) et inversement, c. q. f. d.³⁾

Nous emploierons le terme d'*intervalle essentiel* d'un processus stochastique linéaire pour désigner l'ensemble T défini par (3.2) où $\psi(t, s)$ est la fonction- ψ correspondant à ce processus dans le sens de (2.1).

Le théorème 2 nous garantit, sous certaines conditions, l'existence d'un processus déterminé par deux couples $[t_1, \psi_1]$, $[t_2, \psi_2]$, or il se pose ici d'une façon tout à fait naturelle le problème de savoir comment on peut, dans ces conditions, déterminer l'intervalle essentiel correspondant T . Nous envisagerons, dans ce qui suit, ce problème-là de deux points de vue différents.

4. Problème théorique

Le problème mentionné à la fin du paragraphe précédent peut être formulé d'une manière légèrement modifiée comme suit:

Deux éléments ψ_1, ψ_2 de \mathbf{D} étant donnés, déterminer le plus grand nombre réel r_0 tel que $(\psi_1 - r_0\psi_2) \in \mathbf{D}$.

Il est clair que pour $\psi_2 \in \mathbf{M}$ nous pouvons poser $r_0 = \infty$, notre théorème 1 montre que c'est possible dans ce cas seulement. Supposons donc d'abord que $\psi_2 \notin \mathbf{M}$. Afin de pouvoir indiquer une voie conduisant à la solution de ce problème, nous allons recourir à la représentation canonique bien connue des éléments de \mathbf{D} (voir [2], p. 250 ssq):

Pour chaque $\psi \in \mathbf{D}$ il existe un nombre réel λ et une fonction bornée, non-décroissante, continue à gauche $G(x)$, $G(-\infty) = 0$, tels que

$$\psi(s) = i\lambda s + \int_{-\infty}^{\infty} \left[e^{isx} - 1 - \frac{isx}{1+x^2} \right] \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \quad (4.1)$$

pour tout s réel.

Les éléments de \mathbf{M} sont caractérisés par $G(x) \equiv 0$, et, en particulier, la fonction $\vartheta(s)$ par $G(x) \equiv 0$, $\lambda = 0$.

La représentation (4.1) est unique (voir encore [2], en particulier p. 256); nous voyons donc que notre problème peut revêtir la forme suivante: G_1 et G_2 étant les deux fonctions- G correspondant aux deux fonctions- ψ (ψ_1 et ψ_2) données, notre r_0 est égal au plus grand nombre r tel que la fonction $[G_1(x) - r G_2(x)]$ soit non-décroissante. Le problème envisagé se ramène donc à celui

³⁾ Nous considérons les processus du point de vue de Bernoulli seulement (voir § 1), la connaissance des lois de répartition est donc tout à fait suffisante pour caractériser le processus. Il est clair que l'additivité du processus implique aussi qu'il suffit pour cela des lois des variables aléatoires $X(t)$ seules (lois à une dimension), celles des paires, triples etc s'en déduisent facilement.

de la non-décroissance de la différence de deux fonctions non-décroissantes bornées. Si nous exprimons ensuite la condition citée déterminant r_0 , en écrivant

$$r_0 = \sup \{r: G_1(x+h) - G_1(x) \geq r[G_2(x+h) - G_2(x)] \text{ pour } x \in R, h \geq 0\}$$

et que nous négligeons les couples x, h pour lesquels $G_2(x+h) = G_2(x)$, nous obtenons la formule explicite suivante

$$r_0 = \inf_{\substack{x \in R \\ h > 0}} \frac{G_1(x+h) - G_1(x)}{G_2(x+h) - G_2(x)}. \quad (4.2)$$

Il n'y a pas grande difficulté à montrer que r_0 peut être exprimé comme

$$r_0 = \inf_{\substack{B \in \mathfrak{B} \\ m_2(B) > 0}} \frac{m_1(B)}{m_2(B)} \quad (4.3)$$

où m_1 et m_2 sont les deux mesures (sur le σ -corps \mathfrak{B} des ensembles boreliens de la droite R) induites par les fonctions G_1 et G_2 respectivement. En posant $\inf \emptyset = \infty$ où \emptyset désigne l'ensemble vide, nous pouvons affirmer que l'égalité (4.3) subsiste même pour $\varphi_2 \in \mathbf{M}$, car la mesure m_2 est, dans ce cas-là, identiquement nulle.

Cette dernière expression (4.3) permet déjà d'établir un critère rendant possible la distinction des deux cas de $r_0 = 0$ et de $r_0 > 0$; l'importance de cette distinction étant évidente. La valeur pratique de ce critère n'est cependant pas tout à fait indiscutable, puisqu'il n'est pas très facile en général de trouver la fonction G correspondant à une fonction- $\varphi \in \mathbf{D}$ donnée. Aussi ce critère ne saurait-il pas représenter la solution définitive de notre problème. Énonçons quand même notre résultat:

Théorème 3. *La condition nécessaire et suffisante pour que r_0 ait une valeur positive est que la mesure m_2 soit absolument continue par rapport à m_1 et que sa dérivée de Radon-Nikodym $f = \frac{dm_2}{dm_1}$ soit essentiellement bornée; on a alors*

$$\sup \text{vrai } f = \frac{1}{r_0}. \quad (4.4)$$

Démonstration. I. Supposons d'abord que nous ayons effectivement $m_2 \ll m_1$ et $\sup \text{vrai } f = k < \infty$. Alors pour chaque ensemble $B \in \mathfrak{B}$ nous avons

$$m_2(B) = \int_B f dm_1 \leq k m_1(B),$$

d'où il résulte que $r_0 \geq \frac{1}{k}$. Or si $r_0 > \frac{1}{k}$, c'est-à-dire si $\frac{1}{r_0} < k$, il y aurait un ensemble $B_1 \in \mathfrak{B}$ de mesure $m_1(B_1) > 0$ tel que

$$x \in B_1 \Rightarrow f(x) > \frac{1}{r_0},$$

donc $m_2(B_1) > \frac{1}{r_0} m_1(B_1)$ d'où il s'ensuivrait que $\frac{m_1(B_1)}{m_2(B_1)} < r_0$ en contradiction avec la définition de r_0 .

II. Soit maintenant $r_0 > 0$ donc $\frac{1}{r_0} m_1(B) \geq m_2(B)$ pour tout $B \in \mathfrak{B}$ ce qui implique déjà la continuité absolue de m_2 par rapport à m_1 . La dérivée f existe, désignons par k ($\leq +\infty$) son sup vrai. Si k est fini, nous pouvons reproduire le raisonnement de ci-dessus pour trouver de nouveau l'égalité (4.4). Si $k = +\infty$, il existe pour chaque $K > 0$ un ensemble B de mesure $m_1(B)$ positive et tel que $f(x) > K$ pour $x \in B$. Or pour ce même B nous avons alors de nouveau $m_2(B) > K m_1(B)$, d'où il résulte que $r_0 = 0$, en contradiction avec ce qui a été supposé. Donc $k < \infty$ et l'égalité (4.4) a lieu, c. q. f. d.

Remarque. Un cas spécial mais assez important auquel notre théorème 3 s'applique est celui où la fonction G_2 a un saut positif en un point de continuité de la fonction G_1 ; on a alors nécessairement $r_0 = 0$.

La correspondance qui existe entre le nombre r_0 ainsi déterminé et le point initial t_0 d'un intervalle essentiel T est assez transparente: si $\psi(t_j, s) = \psi_j(s)$, $j = 1, 2$, nous déterminons la valeur de r_0 correspondant aux fonctions ψ_1 et $(\psi_2 - \psi_1)$ (cette dernière doit appartenir à \mathbf{D} pour que le processus puisse exister — voir notre théorème 2). Cela fait, nous obtenons

$$t_0 = t_1 - r_0(t_2 - t_1). \quad (4.5)$$

Il nous reste encore à faire une remarque fort importante. Le problème théorique de détermination de l'intervalle essentiel, tel que nous venons de l'examiner, ne présente pas le degré de généralité nécessaire pour une résolution complète du problème de la durée d'un processus linéaire. Nous nous sommes borné dès le début aux lois indéfiniment divisibles, or c'est un fait bien connu (voir p. ex. [2], p. 260 ssq), qu'il existe des éléments de \mathbf{D} tels que leur différence, soit $\psi_1 - r\psi_2$, n'appartient plus à \mathbf{D} pour des valeurs de r suffisamment grandes, *tout en restant une fonction- ψ* (mais d'une loi qui n'est pas indéfiniment divisible). Dans le présent travail, ce cas n'a été nullement pris en considération, car nous avons envisagé le problème à l'intérieur de \mathbf{D} seulement. Il se peut en général qu'un processus linéaire (d'une espèce un peu plus générale que celle que nous avons considéré ici, à savoir tel que \mathbf{X} transforme T en un sous-ensemble de \mathfrak{X}^* pouvant ne pas être contenu dans \mathfrak{X} , mais qui vérifie toujours les trois conditions (a), (b) et (c) du paragraphe 2) commence à l'instant t_0 , entre à l'instant t_1 dans le domaine des lois indéfiniment divisibles (et y reste dans la suite), mais nos méthodes permettent de déterminer l'instant t_1 seulement.

Remarquons encore que notre théorème 1 subsiste même dans ce cas plus général de sorte que la notion d'intervalle essentiel garde un sens.

5. Problèmes statistiques

Dans ce paragraphe nous allons rafraîchir nos considérations générales par quelques exemples simples et concrets de problèmes statistiques qui se rattachent au problème de la détermination de l'intervalle essentiel T d'un processus linéaire.

Pour pouvoir déterminer l'intervalle essentiel d'un processus linéaire par les méthodes du paragraphe précédent, il faut connaître les lois exactes dont dépendent les variables aléatoires en question. Il peut tout de même arriver dans certains cas que l'on ne connaît que la forme générale de ces lois dépendant de certains paramètres dont la valeur n'est pas connue et qu'il faut estimer à l'aide des valeurs-échantillons des variables aléatoires considérées. En procédant de cette manière on n'obtient pour le point initial t_0 d'un intervalle essentiel qu'une estimation statistique. Nous allons examiner deux exemples simples de ces problèmes.

Supposons que nous ayons n particules qui, placées à l'instant initial t_0 toutes au point $x = 0$, se meuvent ensuite sur l'axe des x , indépendamment l'une de l'autre, suivant les lois d'un processus linéaire gaussien (mouvement à la Brown) aux paramètres μ et σ , la fonction- ψ correspondante étant exprimée par

$$\psi(t, s) = \vartheta(s) + (t - t_0) \left[i\mu s - \frac{s^2}{2} \sigma^2 \right]. \quad (5.1)$$

Connaissant les valeurs de μ et σ et les positions x_1, x_2, \dots, x_n occupées par les n particules à un instant connu $t_1 > t_0$, nous avons à estimer l'instant initial inconnu t_0 du processus. Le problème ne présente pas de difficultés; la variable aléatoire $X(t_1)$ est normale $N(\mu(t_1 - t_0); \sigma\sqrt{t_1 - t_0})$ et la méthode de „maximum likelihood“ conduit à l'estimateur⁴⁾

$$\hat{t}_0 = t_1 + \alpha - \sqrt{\alpha^2 + \frac{1}{\mu^2 n} \sum_{i=1}^n x_i^2} \quad (5.2)$$

où $\alpha = \frac{\sigma^2}{2\mu^2}$, à condition évidemment que $\mu \neq 0$. Si $\mu = 0$ nous sommes dans le cas d'un mouvement brownien linéaire simple et l'estimation de t_0 se réduit à l'estimation de la variance d'une variable aléatoire normale. On pourrait évidemment imaginer sans difficulté d'autres situations où les deux paramètres σ et μ ne seraient pas connus ou bien que l'on connaîtrait les positions des particules à plusieurs instants différents, et les changements correspondants du problème d'estimation.

Regardons maintenant un autre exemple emprunté cette fois-ci à la théorie des processus de Poisson, ou plus spécialement celle des „courants d'entrée“

⁴⁾ Tous les estimateurs considérés dans ce qui suit sont ceux obtenus par la même méthode.

(voir p. ex. [3]). Supposons qu'un tel courant ait commencé à l'instant t_0 par la valeur $X(t_0) = 0$ et qu'il ait continué ensuite suivant la loi générale exprimée par la forme suivante de la fonction- ψ correspondante:

$$\psi(t, s) = (t - t_0) \lambda (e^{is} - 1), \quad \lambda > 0. \quad (5.3)$$

La variable aléatoire $X(t)$ est alors répartie à la Poisson, avec le paramètre $\lambda(t - t_0)$. Ayant à notre disposition n valeurs observées (indépendantes) x_1, x_2, \dots, x_n , de la variable aléatoire $X(t_1)$ et connaissant la valeur de λ , estimons de nouveau l'instant initial inconnu t_0 , où le processus a commencé. La solution est encore très simple et nous obtenons l'estimateur

$$\hat{t}_0 = t_1 - \frac{\bar{x}}{\lambda}, \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (5.4)$$

Si l'on ne connaît pas la valeur de λ , mais que l'on ait deux groupes d'observations, soit x_1, x_2, \dots, x_n prises à l'instant $t_1 > t_0$ et y_1, y_2, \dots, y_n prises à l'instant $t_2 > t_1$ (y_i et x_i correspondant à une même réalisation du courant considéré), on trouve de nouveau

$$\hat{t}_0 = t_1 - \frac{\bar{x}}{\lambda^*} \quad (5.5)$$

où le paramètre λ a été estimé préalablement au moyen de l'estimateur

$$\lambda^* = \frac{\bar{y} - \bar{x}}{t_2 - t_1}. \quad (5.6)$$

Ce problème peut bien paraître trivial, on peut néanmoins lui donner une interprétation concrète assez intéressante; il est possible en effet de traiter de cette façon le problème d'estimation du délai d'attente à une station de tramway connaissant le nombre de gens qui y attendaient déjà au moment de notre arrivée.

LITTÉRATURE

- [1] *P. Lévy*: Processus stochastiques et mouvement brownien, Paris, 1948.
- [2] *O. Onicescu, G. Mihoc, C. T. Ionescu-Tulcea*: Calculul probabilităților și aplicații, București, 1956.
- [3] *A. Я. Хинчин*: Математические методы теории массового обслуживания; Труды Мат. инст. им. В. А. Стеклова 49 (1955), 1—122.

Резюме

О ПРОДОЛЖИТЕЛЬНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

ФРАНТИШЕК ЗИТЭК (František Zitek), Прага

(Поступило в редакцию 26/I 1957 г.)

Пусть (Ω, \mathfrak{E}) — измеримое пространство с вероятностью \mathbf{P} , $R = (-\infty, \infty)$, T — интервал в R , \mathbf{X} — функция, отображающая T в пространство \mathfrak{X} случайных величин на (Ω, \mathfrak{E}) , имеющих безгранично делимые законы распределения. Пусть \mathbf{D} — множество всех ψ -функций безгранично делимых законов. Назовем \mathbf{X} линейным процессом, если (через $X(t)$ обозначено значение функции \mathbf{X} в точке t):

- (1) приращение $[X(t_2) - X(t_1)]$ для $t_1, t_2 \in T$, $t_1 < t_2$, стохастически независимо от $X(t)$ и от совокупности всех $X(t)$ для $t \leq t_1$, $t \in T$;
- (2) закон распределения $[X(t_2) - X(t_1)]$ зависит только от $t_2 - t_1$;
- (3) для $t_n \rightarrow t$, $t_n > t$ имеем $\lim [X(t_n) - X(t)] = 0$ по вероятности.

Как известно, линейные процессы этого типа полностью характеризованы своей ψ -функцией (2.1). В работе доказываются:

Теорема 1. Пусть $t_0 \in R$; $\psi_0, \bar{\psi} \in \mathbf{D}$; тогда множество T значений t , для которых функция $\psi(t, s)$, определенная в (3.1), принадлежит \mathbf{D} , всегда является интервалом. Имеем $T = R$ тогда и только тогда, когда $\bar{\psi}(s) = i\mu s$, $\mu \in R$, иногда $T = \langle t_1, \infty \rangle$, где $t_1 \leq t_0$.

Теорема 2. Пусть $t_1, t_2 \in R$; $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{D}$. Необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовал линейный процесс \mathbf{X} с ψ -функцией $\psi(t, s)$, удовлетворяющей (3.3), является $(\psi_2 - \psi_1) \in \mathbf{D}$.

Пусть $\psi_1, \psi_2 \in \mathbf{D}$ и $r_0 = \sup \{r: (\psi_1 - r\psi_2) \in \mathbf{D}\}$. Пусть m_1 и m_2 — меры на σ -алгебре \mathfrak{B} борелевских множеств в R , индуцированные соотв. функциями G_1 и G_2 , соответствующими функциям ψ_1 и ψ_2 по формуле (4.1). Тогда справедлива

Теорема 3. Для того, чтобы было $r_0 > 0$, необходимо и достаточно, чтобы $m_2 \ll m_1$ и $\sup \text{vrai} \frac{dm_2}{dm_1} < \infty$; тогда имеет место и равенство (4.4).

Теорема 2 решает вопрос, существует ли процесс „проходящий“ через ψ_1 в момент t_1 и через ψ_2 в момент t_2 ; теорема 3 позволяет определить соответствующий интервал T (3.2).

В § 5 настоящей работы исследуются некоторые примеры статистических оценок начала интервала T .