

Froim Marcus

L'élément linéaire projectif d'une congruence de droites parabolique dans S_5

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 1, 57–61

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/100442>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

L'ÉLÉMENT LINÉAIRE PROJECTIF D'UNE CONGRUENCE DE DROITES
PARABOLIQUE DANS S_5

FROIM MARCUS, Jassy

(Reçu le 24 septembre 1959, après modifications le 9 août 1960)

On définit l'élément linéaire projectif pour une congruence parabolique de droites dans S_5 .

1. Dans un Mémoire en cours de publication [1] je définis l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites dans S_5 . Dans [2] A. ŠVEC définit l'élément linéaire projectif d'une congruence dans S_{2n+1} . Entre ces définitions il existe la différence suivante:

L'élément défini dans [2] se réduit pour $n = 1$, c'est-à-dire dans un S_3 , à l'élément défini par A. TERRACINI [3], tandis que celui défini en [1], se réduit dans le cas des congruences quadratiques dans S_5 , à l'élément linéaire projectif défini par B. SEGRE [4].

Soit en [1] qu'en [2], on considère seulement le cas des congruences non-paraboliques. Mais en utilisant quelques résultats de Terracini [5], [6], on peut définir aussi l'élément linéaire projectif pour une congruence parabolique dans un S_5 . C'est le but de cette Note.

2. Soit Γ une congruence de droites engendrée par les tangentes aux lignes caractéristiques d'une surface (y^*) de S_5 , représentée par une équation du type parabolique

$$(1) \quad y_{uu}^* = \alpha y_u^* + \beta y_v^* + \gamma y^*$$

avec $\beta \neq 0$. On peut supposer [6] que les six points

$$y^*, y_u^*, y_v^*, y_{uv}^*, y_{vv}^*, y_{uvv}^*,$$

soient linéairement indépendants, et alors la surface (y^*) est aussi représentée par [6]

$$(2) \quad y_{vvv}^* = A_1 y^* + B_1 y_u^* + C_1 y_v^* + D_1 y_{uv}^* + \rho_1 y_{vv}^* + \varepsilon_1 y_{uvv}^*.$$

En conséquence, la congruence parabolique Γ de S_5 peut être représentée [6] par le système (1) et (2) avec $\beta \neq 0$.

3. Dans son important Mémoire [5], A. Terracini considère l'incidence d'un système Θ , c'est-à-dire, d'un système de $\infty^{\bar{\alpha}}$ ($2 \leq \bar{\alpha} \leq 3$) plans dans S_5 dont deux plans consécutifs sont toujours incidents dans un point, avec l'ordre d'approximation

$\sigma \geq 2$. Ces plans passent par les droites d'une variété réglée U_3 , dotée d'un S_3 tangent fixe le long de chaque génératrice, et sont situés dans les S_3 tangents relatifs. Comme, dans cette hypothèse, la variété U_3 ne diffère pas d'une congruence de droites ([5] pag. 446), Terracini assimile l'étude des systèmes Θ , à l'étude des congruences Γ , supports des plans Θ , et s'occupe des systèmes Δ de ∞^1 plans contenus dans les systèmes Θ , et qui réalisent une incidence avec une approximation $\sigma \geq 4$.

Par analogie avec le mode de comportement des plans tangents à une surface de S_5 dans les points d'une ligne principale, Terracini [5] nomme les systèmes Δ , systèmes principaux des systèmes Θ .

4. Soit Γ une congruence de droites parabolique de S_5 , support d'un système Θ . Le plan qui décrit le système Θ , est déterminé [6] par les points y^* , y_u^* , et par un troisième, situé sur la droite (y_v^*, y_{uv}^*) . Dans ce cas, le système Θ contient généralement trois systèmes principaux distincts de ceux qui correspondent au système des caractéristiques de la surface (y^*) , unique nappe focale de la congruence, et qui ne peuvent être indéterminés [6].

Les coordonnées du point y^* peuvent être multipliées par un même facteur $\lambda(u, v) \neq 0$. En posant

$$(3) \quad y = \lambda y^*,$$

nous allons choisir ce facteur de manière que le plan qui décrit le système Θ soit déterminé par les points y , y_u , y_{uv} [6]. En conséquence

$$(1') \quad y_{uu} = ay_u + by_v + cy, \quad (b \neq 0)$$

et

$$(2') \quad y_{vvv} = Ay + By_u + Cy_v + Dy_{uv} + \rho y_{vv} + \varepsilon y_{uvv},$$

déterminent par rapport aux nouvelles coordonnées y , la congruence parabolique Γ de S_5 , et l'équation différentielle des systèmes principaux différents du système $v = \text{const}$ est [6]

$$(4) \quad E \left(\frac{dv}{du} \right)^3 - N \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - P \frac{dv}{du} - 2b^2 = 0,$$

où

$$(5) \quad \begin{aligned} E &= \rho_u + 2\varepsilon b_v + c\varepsilon + bD + b\rho\varepsilon, \\ N &= b\varepsilon_u - b\rho + ab\varepsilon + b^2\varepsilon^2 - 3b_v - 3c, \\ P &= 2b^2\varepsilon. \end{aligned}$$

5. Dans l'hypothèse qu'on a normalisé les coordonnées du point y^* qui décrit l'unique nappe focale de la congruence de façon que l'équation différentielle des systèmes principaux soit donnée par (4), il résulte que le système (1') et (2') qui complète la représentation de la congruence, admet encore des transformations

$$(6) \quad u = u(\bar{u}); \quad v = v(v).$$

En appliquant au système (1') et (2') une transformation (6) et en notant par $\bar{a}, \bar{A}, \bar{b}, \bar{B}$ etc. les nouvelles valeurs des coefficients a, A, b, B , etc., nous avons

$$(I) \quad \begin{aligned} \bar{a} \frac{du}{d\bar{u}} &= a \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2 + \frac{d^2u}{d\bar{u}^2}; & \bar{b} \frac{dv}{d\bar{v}} &= b \left(\frac{dv}{d\bar{v}} \right)^2; \\ \bar{c} &= c \left(\frac{du}{d\bar{u}} \right)^2; & \bar{A} &= A \left(\frac{dv}{d\bar{v}} \right)^3; \\ \bar{B} &= \frac{du}{d\bar{u}} = B \left(\frac{dv}{d\bar{v}} \right)^3; & \bar{\varepsilon} \frac{du}{d\bar{u}} &= \varepsilon \frac{dv}{d\bar{v}}; \\ \bar{\rho} \frac{dv}{d\bar{v}} &= 3 \frac{d^2v}{d\bar{v}^2} + \rho \left(\frac{dv}{d\bar{v}} \right)^2; \\ \bar{D} \frac{du}{d\bar{u}} \frac{dv}{d\bar{v}} &= D \left(\frac{dv}{d\bar{v}} \right)^3 - \bar{\varepsilon} \frac{du}{d\bar{u}} \cdot \frac{d^2v}{d\bar{v}^2}; \\ \bar{C} \frac{dv}{d\bar{v}} + \bar{\rho} \frac{d^2v}{d\bar{v}^2} &= C \left(\frac{dv}{d\bar{v}} \right)^3 + \frac{d^3v}{d\bar{v}^3}. \end{aligned}$$

6. Dans [7], E. ČECH a montré qu'à toute congruence non-parabolique de droites de S_3 on peut associer quatre formes différentielles invariantes telles que leur somme est égale à l'élément linéaire projectif de Terracini de la congruence.

On peut faire voir qu'à une congruence parabolique de droites de S_5 on peut aussi associer quatre formes différentielles invariantes. En effet, il résulte de (I) que les quatre formes

$$(7) \quad \begin{aligned} \phi_1 &= -2b\varepsilon du; & \phi_2 &= -\frac{N}{b} dv; \\ F_1 &= \frac{E}{b} \frac{dv^2}{du}; & F_2 &= -2b \frac{du^2}{dv} \end{aligned}$$

sont des invariantes du système normalisé (1') et (2') qui détermine la congruence parabolique.

7. Il reste encore à prouver que les quatre formes (7) restent invariantes aussi si l'on considère les normalisations

$$(8) \quad \bar{y} = \sigma(v)y,$$

pour lesquelles on a

$$(9) \quad [\bar{y}, \bar{y}_u, \bar{y}_{uv}] = \sigma^3 [y, y_u, y_{uv}].$$

En posant

$$(1'') \quad \bar{y}_{uu} = a_1 \bar{y}_u + b_1 \bar{y}_v + c_1 \bar{y},$$

et

$$(2'') \quad \bar{y}_{vvv} = A_1 \bar{y} + B_1 \bar{y}_u + C_1 \bar{y}_v + D_1 \bar{y}_{uv} + \rho_1 \bar{y}_{vv} + \varepsilon_1 \bar{y}_{uvv},$$

et en tenant compte de (8), il résulte

$$(II) \quad a_1 = a; \quad b_1 = b; \quad c_1 = c - b \frac{\sigma'}{\sigma};$$

$$\varepsilon_1 = \varepsilon; \quad \rho_1 = \rho + 3 \frac{\sigma'}{\sigma}; \quad D_1 = D - 2\varepsilon \frac{\sigma'}{\sigma};$$

$$C_1 = C + 3 \frac{\sigma''}{\sigma} - 6 \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - 2 \frac{\sigma'}{\sigma} \rho;$$

$$B_1 = B - \frac{\sigma'}{\sigma} D + \varepsilon \left(2 \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - \frac{\sigma''}{\sigma} \right);$$

$$A_1 = A + \frac{\sigma'''}{\sigma} - \frac{\sigma'}{\sigma} \left(C + 3 \frac{\sigma''}{\sigma} - 6 \frac{\sigma'^2}{\sigma^2} - 2\rho \frac{\sigma'}{\sigma} \right) - \frac{\sigma''}{\sigma} \left(\rho + 3 \frac{\sigma'}{\sigma} \right).$$

D'autre part, en exprimant par

$$(10) \quad E_1 \left(\frac{dv}{du} \right)^3 - N_1 \left(\frac{dv}{du} \right)^2 - P_1 \frac{dv}{du} - 2b_1^2 = 0,$$

l'équation différentielles des systèmes principaux et en tenant compte de (5) et (II)

$$(11) \quad E_1 = E; \quad N_1 = N; \quad P_1 = P.$$

Donc

$$(12) \quad b_1 \varepsilon_1 = b \varepsilon; \quad \frac{E_1}{b_1} = \frac{E}{b}; \quad \frac{N_1}{b_1} = \frac{N}{b},$$

ce qui démontre qu'une transformation (6) appliquée au système (1'') et (2'') ne change pas les quatre formes différentielles (7).

En conséquence, la forme différentielle fractionnaire

$$(III) \quad J = \frac{E dv^3 - N dv^2 du - 2b^2 \varepsilon du^2 dv - 2b^2 du^3}{b du dv} = F_1 + \phi_2 + \phi_1 + F_2,$$

peut être définie comme l'élément linéaire projectif d'une congruence de droites parabolique dans un S_5 . $J = 0$ est l'équation des systèmes principaux distincts de $v = \text{const}$ de l'unique nappe focale de la congruence.

De (7), il résulte

$$(13') \quad \phi_1 \phi_2 = 2\varepsilon N du dv; \quad F_1 F_2 = -2E du dv,$$

et si par exemple $E \neq 0$, nous obtenons, comme dans le cas d'un espace S_3 , un invariant fini

$$(14) \quad \frac{\phi_1 \cdot \phi_2}{F_1 \cdot F_2} = -\frac{\varepsilon N}{E}.$$

Bibliographie

- [1] *F. Marcus*: Elementul liniar proiectiv al unei congruențe de drepte din S_5 . Studii și cercetări științifice, Matematici, Iași, anul. X, fascicola 1, 1959, 129—140.
- [2] *A. Švec*: Les surfaces R dans les espaces projectifs de dimension impaire. Czechoslovak Mathematical Journal, T. 9 (84), 1959, 243—264.
- [3] *A. Terracini*: Osservazioni sulla geometria proiettiva differenziale delle congruenze di rette. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, T. XCIV, 1934—35, 75—86.
- [4] *B. Segre*: L'élément linéaire projectif d'une congruence quadratique de droites. Bulletin de l'Ac. Royale de Belgique, 1953, t. XXXIV, 481—489.
- [5] *A. Terracini*: Nuove ricerche sull'incidenza di piani infinitamente vicini. Atti della R. Accad. Di Torino, Vol. 73, 1937—38, 443—459.
- [6] *A. Terracini*: I sistemi Θ di piani con congruenza sostegno parabolica. Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, 1937—38, T. XCVII, 557—565.
- [7] *E. Čech*: Transformations développables des congruences de droites. Czechoslovak Mathematical Journal, T. 6 (81), 1956, 260—286.

Резюме

ЛИНЕЙНЫЙ ПРОЕКТИВНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ КОНГРУЭНЦИИ В S_5

ФРОИМ МАРКУС (Froim Marcus), Яссы

В этой работе дается определение линейного проективного элемента параболической прямолинейной конгруэнции в S_5 . Аналогично случаю напараболической прямолинейной конгруэнции в S_3 можно параболической конгруэнции в S_5 поставить в соответствие четыре инвариантные дифференциальные формы, данные уравнениями (7); их сумма является линейным проективным элементом рассматриваемой конгруэнции. Приравнивая линейный элемент нулю, мы получим дифференциальное уравнение главных систем единственной фокальной поверхности конгруэнции; см. [5] и [6].