Czechoslovak Mathematical Journal

Vladimír Horák

Les complexes osculateurs des congruences de droites

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 11 (1961), No. 3, 440–460

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100472

Чехословацкий математический журнал т. 11 (86) 1961, Прага

LES COMPLEXES OSCULATEURS DES CONGRUENCES DE DROITES

VLADIMÍR HORÁK, Brno

(Reçu le 10 mai 1960)

L'auteur étudie dans l'espace projectif à cinq dimensions de Klein les variétés (Ω) qui sont les images secondaires des complexes linéaires osculateurs des droites des congruences non-paraboliques, c.-à-d. des congruences W et des congruences qui possèdent une surface focale développable et une courbe directrice non rectiligne. Moyennant des variétés (Ω), l'auteur décrit quelquesuns des types remarquables des congruences W et déduit leurs nouvelles propriétés.

1. Au Mémoire [1] on considère une congruence non-parabolique L de droites dans l'espace projectif P_3, en faisant usage du repère

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \tag{1.1}$$

assujetti à la condition

$$[A_1 A_2 A_3 A_4] = 1 \tag{1.2}$$

et tel que $[A_1 A_2]$ soit la droite génératrice de L et que $[A_1 A_3]$, $[A_2 A_4]$ en soient les deux transformées de Laplace. La congruence L est déterminée (abstraction faite de la position dans l'espace projectif P_3) par les équations ([1], (1.12))

$$\begin{aligned} dA_1 &= \omega_{11}A_1 + \alpha_1\omega_2A_2 + \omega_1A_3\,,\\ dA_2 &= \alpha_2\omega_1A_1 + \omega_{22}A_2 + \omega_2A_4\,,\\ dA_3 &= \omega_{31}A_1 + \omega_{32}A_2 + \omega_{33}A_3 + \beta_2\omega_1A_4\,,\\ dA_4 &= \omega_{41}A_1 + \omega_{42}A_2 + \beta_1\omega_2A_3 + \omega_{44}A_4\,, \end{aligned} \tag{1.3}$$

(où $\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0$) dont les conditions d'intégrabilité sont

$$\begin{aligned} &[\omega_{32}\omega_1] + [d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,\omega_2] = 0\,,\\ &[d\alpha_2 + \alpha_2(2\omega_{11} - \omega_{22} - \omega_{33})\,\omega_1] + [\omega_{41}\omega_2] = 0\,,\\ -&[\omega_{41}\omega_1] + [d\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44})\,\omega_2] = 0\,,\\ &[d\beta_2 + \beta_2(\omega_{11} + \omega_{44} - 2\omega_{33})\,\omega_1] - [\omega_{32}\omega_2] = 0\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

D'après la classification de M. E. ČECH on a les 10 types suivants de congruences non-paraboliques:

Type I: $\alpha_1\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0$ des congruences qui possèdent deux surfaces focales (A_1), (A_2) non-développables.

Type II: $\alpha_1\beta_1\beta_2 \neq 0 = \alpha_2$ ou $\alpha_2\beta_1\beta_2 \neq 0 = \alpha_1$ des congruences dont la surface focale (A_1) ou (A_2) est non-développable et la surface focale (A_2) ou (A_1) est une courbe non-rectiligne.

*Type II**: $\alpha_1\alpha_2\beta_1 \neq 0 = \beta_2$ ou $\alpha_1\alpha_2\beta_2 \neq 0 = \beta_1$ corrélatif au type II.

Type III: $\alpha_1\beta_2 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_1$ ou $\alpha_2\beta_1 \neq 0 = \alpha_1 = \beta_2$ des congruences dont la surface focale (A_1) ou (A_2) est non-développable et (A_2) ou (A_1) est une droite directrice.[1])

Type IV: $\alpha_2\beta_2 \neq 0 = \alpha_1 = \beta_1$ ou $\alpha_1\beta_1 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_2$ des congruences dont la surface focale (A_1) ou (A_2) est une courbe et (A_2) ou (A_1) est une surface développable.

Type V: $\beta_1\beta_2 \neq 0 = \alpha_1 = \alpha_2$ des congruences pour lesquelles (A_1) aussi bien que (A_2) sont des courbes directrices non-rectilignes.

*Type V**: $\alpha_1\alpha_2 \neq 0 = \beta_1\beta_2$ corrélatif au type V.

Type VI: $\beta_2 \neq 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1$ ou $\beta_1 \neq 0 = \alpha_1 = \alpha_2 = \beta_2$ des congruences pour lesquelles (A_1) ou (A_2) est une courbe directrice non-rectiligne et (A_2) ou (A_1) est une droite.[1])

*Type VI**: $\alpha_2 \neq 0 = \alpha_1 = \beta_1 = \beta_2$ ou $\alpha_1 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2$ corrélatif au type VI.

Type VII: $\alpha_1 = \alpha_2 = \beta_1 = \beta_2 = 0$ des congruences pour lesquelles (A_1) aussi que (A_2) sont des droites et L est alors une congruence linéaire non-parabolique.

En considérant le repère

$$E_1 = [A_2A_3A_4], \quad E_2 = -[A_1A_3A_4], \quad E_3 = [A_1A_2A_4], \quad E_4 = -[A_1A_2A_3] \tag{1.5}$$

corrélatif au repère (1.1) on voit qu'aux équations (1.3) correspondent les équations ([1], (1.18))

$$\begin{aligned}
&dE_1 + \omega_{11}E_1 + \alpha_2\omega_1E_2 + \omega_{31}E_3 + \omega_{41}E_4 = 0,\\
&dE_2 + \alpha_1\omega_2E_1 + \omega_{22}E_2 + \omega_{32}E_3 + \omega_{42}E_4 = 0,\\
&dE_3 + \omega_1E_1 + \omega_{33}E_3 + \beta_1\omega_2E_4 = 0,\\
&dE_4 + \omega_2E_2 + \beta_2\omega_1E_3 + \omega_{44}E_4 = 0;
\end{aligned} \tag{1.6}$$

les plans E_3 et E_4 sont les plans focaux de la congruence L.

[1]) Les équations $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ ou $\alpha_2 = \beta_1 = 0$ entraînent $\omega_{32} = 0$ ou $\omega_{41} = 0$ respectivement.

Pour le repère réglé $[A_1A_2]$, $[A_1A_3]$, $[A_2A_4]$, $[A_1A_4]$, $[A_2A_3]$, $[A_3A_4]$ on obtient de (1.3) ([1], (1.19))

$$
\begin{aligned}
(1.7)\quad d[A_1A_2] &= (\omega_{11} + \omega_{22})[A_1A_2] + \omega_2[A_1A_4] - \omega_1[A_2A_3]\,,\\
d[A_1A_3] &= \omega_{32}[A_1A_2] + (\omega_{11} + \omega_{33})[A_1A_3] + \beta_2\omega_1[A_1A_4] + \alpha_1\omega_2[A_2A_3]\\
d[A_2A_4] &= -\,\omega_{41}[A_1A_2] + \alpha_2\omega_1[A_1A_4] + \beta_1\omega_2[A_2A_3] +\\
&\quad + (\omega_{22} + \omega_{44})[A_2A_4]\,,\\
d[A_1A_4] &= \omega_{42}[A_1A_2] + \beta_1\omega_2[A_1A_3] + (\omega_{11} + \omega_{44})[A_1A_4] +\\
&\quad + \alpha_1\omega_2[A_2A_4] + \omega_1[A_3A_4]\,,\\
d[A_2A_3] &= -\,\omega_{31}[A_1A_2] + \alpha_2\omega_1[A_1A_3] + (\omega_{22} + \omega_{33})[A_2A_3] +\\
&\quad + \beta_2\omega_1[A_2A_4] - \omega_2[A_3A_4]\,,\\
d[A_3A_4] &= -\,\omega_{41}[A_1A_3] + \omega_{31}[A_1A_4] - \omega_{42}[A_2A_3] + \omega_{32}[A_2A_4] +\\
&\quad + (\omega_{33} + \omega_{44})[A_3A_4]\,.
\end{aligned}
$$

En outre on a ([1], (3.18))

$$
\begin{aligned}
(1.8)\quad d^2[A_1A_2] &= (d\overline{\omega_{11} + \omega_{22}} + \overline{\omega_{11} + \omega_{22}}^2 + \omega_{31}\omega_1 + \omega_{42}\omega_2)[A_1A_2] +\\
&+ (d\omega_2 + \overline{2\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{44}}\omega_2)[A_1A_4] - (d\omega_1 + \overline{\omega_{11} + 2\omega_{22} + \omega_{33}}\omega_1)\,.\\
&.\,[A_2A_3] + (\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)[A_1A_3] + (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)[A_2A_4] + 2\omega_1\omega_2[A_3A_4]
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
(1.9)\quad d^2[E_3E_4] &= (-\,d\overline{\omega_{33} + \omega_{44}} + \overline{\omega_{33} + \omega_{44}}^2 + \omega_{31}\omega_1 + \omega_{42}\omega_2)[E_3E_4] +\\
&+ (d\omega_2 - \overline{2\omega_{33} + \omega_{44} + \omega_{22}}\omega_2)[E_2E_3] - (d\omega_1 - \overline{\omega_{33} + 2\omega_{44} + \omega_{11}}\omega_1)\,.\\
&.\,[E_1E_4] - (\alpha_1\omega_2^2 - \beta_2\omega_1^2)[E_1E_3] - (\beta_1\omega_2^2 - \alpha_2\omega_1^2)[E_2E_4] + 2\omega_1\omega_2[E_1E_2]\,.
\end{aligned}
$$

L'équation différentielle des lignes asymptotiques de la première ou seconde surface focale est

$$(1.10)\qquad \beta_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha_2\omega_1^2 + \beta_1\omega_2^2 = 0\,.$$

2. Posons

$$(2.1)\quad \Omega \equiv a_1[A_1A_2] + a_2[A_1A_3] + a_3[A_2A_4] + a_4[A_1A_4] + a_5[A_2A_3] + a_6[A_3A_4]\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le complexe Ω soit *le complexe osculateur* de la génératrice $[A_1A_2]$ *de la congruence* L est

$$(2.2)\qquad \Omega\,.\,[A_1A_2] = \Omega\,.\,d[A_1A_2] = \Omega\,.\,d^2[A_1A_2] = 0\,,$$

d'où il s'ensuit, en y substituant d'après (1.7) et (1.8),

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad & a_1 = a_4 = a_5 = a_6 = 0\,,\\
& a_2\alpha_1 + a_3\beta_1 = 0\,, \quad a_2\beta_2 + a_3\alpha_2 = 0\,.
\end{aligned}
$$

On voit sans peine que les congruences des types II, II*, V, V* n'admettent aucun complexe osculateur $(a_i \equiv 0,\ i = 1, 2, \dots, 6)$ et le complexe osculateur des congruences du type VII n'est pas unique; chacune des congruences du type III ou VI ou VI* appartient à un complexe linéaire spécial qui est son complexe osculateur. Si L est du type I, le complexe osculateur n'existe que pour les congruences satisfaisant à la condition

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 = 0\,, \tag{2.4}$$

c.-à-d. pour les congruences W et on a

$$\Omega = \sigma(\beta_1[A_1A_3] - \alpha_1[A_2A_4])\,, \quad \sigma \neq 0\,, \tag{2.5}$$

et alors ce complexe osculateur est déterminé comme une variété géométrique.[2])

Si L est du type IV et on a $\alpha_1\beta_1 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_2$ ou $\alpha_2\beta_2 \neq 0 = \alpha_1 = \beta_1$, on obtient les complexes osculateurs

$$^1\Omega = {}^1\sigma(\beta_1[A_1A_3] - \alpha_1[A_2A_4]) \quad \text{ou} \quad {}^2\Omega = {}^2\sigma(\alpha_2[A_1A_3] - \beta_2[A_2A_4])\,, \qquad {}^i\sigma \neq 0\,, \quad i = 1, 2 \tag{2.6}$$

respectivement.

Dorénavant nous nous bornons à l'étude des congruences du type I qui sont des congruences W et des congruences du type IV $(\alpha_1\beta_1 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_2)$.

Dans l'espace corrélatif à l'espace P_3 on obtient pour les congruences du type I qui satisfont la relation (2.4) le complexe osculateur de $[E_3E_4]$

$$\Omega^* = \sigma^*(\alpha_1[E_1E_3] - \beta_1[E_2E_4])\,, \quad \sigma^* \neq 0 \tag{2.7}$$

et pour les congruences du type IV $(\alpha_1\beta_1 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_2)$ le complexe

$$^1\Omega^* = {}^1\sigma^*(\alpha_1[E_1E_3] - \beta_1[E_2E_4])\,, \quad {}^1\sigma^* \neq 0\,. \tag{2.8}$$

On a

$$\mathrm{d}\Omega = a[A_1A_3] - b[A_2A_4] + c[A_1A_2]\,, \tag{2.9}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^2\Omega = {} & (\mathrm{d}c + a\omega_{32} + b\omega_{41} + c\overline{\omega_{11} + \omega_{22}})[A_1A_2] + \\ & + (\mathrm{d}a + a\overline{\omega_{11} + \omega_{33}})[A_1A_3] + (\mathrm{d}b + b\overline{\omega_{22} + \omega_{44}})[A_2A_4] + \\ & + (\overline{a\beta_2 - b\alpha_2}\,\omega_1 + c\omega_2)[A_1A_4] + (\overline{a\alpha_1 - b\beta_1}\,\omega_2 - c\omega_1)[A_2A_3] \end{aligned} \tag{2.10}$$

où

$$a = \mathrm{d}(\sigma\beta_1) + \sigma\beta_1(\omega_{11} + \omega_{33})\,, \quad b = \mathrm{d}(\sigma\alpha_1) + \sigma\alpha_1(\omega_{22} + \omega_{44})\,, \qquad c = \sigma(\beta_1\omega_{32} + \alpha_1\omega_{41})\,. \tag{2.11}$$

Les expressions qui expriment $\mathrm{d}\,{}^1\Omega$, $\mathrm{d}^2\,{}^1\Omega$ résultent de (2.9), (2.10) et (2.11) en y substituant

$$\sigma = {}^1\sigma\,, \quad \alpha_2 = \beta_2 = 0\,. \tag{2.12}$$

---

[2]) Vu l'étude d'autres problèmes, il est convenable d'examiner le complexe osculateur comme une variété géométrique, c.-à-d. avec $\sigma \neq 0$, arbitraire.

Dans le cas corrélatif, on obtient $d\Omega^*$ et $d^2\Omega^*$ de (2.9) et (2.10) par la transformation ([2], (2.14), (2.15), (2.16))

$$(2.13) \qquad \begin{pmatrix} A_1, & A_2, & A_3, & A_4, & \omega_1, & \omega_2, & \alpha_1, & \alpha_2, & \beta_1, & \beta_2, & \Omega \\ E_3, & -E_4, & -E_1, & E_2, & \omega_1, & \omega_2, & \beta_1, & \beta_2, & \alpha_1, & \alpha_2, & \Omega^* \end{pmatrix}$$

et

$$(2.14) \qquad \begin{pmatrix} \omega_{11}, & \omega_{22}, & \omega_{33}, & \omega_{44}, & \omega_{31}, & \omega_{42}, & \omega_{32}, & \omega_{41} \\ -\omega_{33}, & -\omega_{44}, & -\omega_{11}, & -\omega_{22}, & \omega_{31}, & \omega_{42}, & -\omega_{41}, & -\omega_{32} \end{pmatrix}.$$

On exprime $d^1\Omega^*$ et $d^{21}\Omega^*$ d'une manière analogue.

L'ensemble des images secondaires des complexes osculateurs des droites de la congruence L dans l'espace à cinq dimensions de Klein est soit une variété à deux ou à une dimension que nous allons désigner par (Ω), soit cet ensemble est monoponctuel (un poit fixe) et la congruence L appartient à un complexe linéaire.

3. Soit L du type IV $(\alpha_1\beta_1 \neq 0 = \alpha_2 = \beta_2)$ en sorte que dans (1.3) il est

$$(3.1) \qquad \omega_{21} = \omega_{34} = 0\,.$$

Des relations $(1.4)_{2,4}$ il résulte alors

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} \omega_{32} = \gamma_1\omega_2\,, \quad \omega_{41} &= \gamma_2\omega_2\,, \\ d\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44}) &= \gamma_1\omega_1 + \gamma_3\omega_2\,, \\ d\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44}) &= -\gamma_2\omega_1 + \gamma_4\omega_2\,. \end{aligned}$$

Avant de passer à l'étude de ces congruences nous allons effectuer une particularisation du repère. Par différentiation extérieure des relations (3.2) on obtient ($[d\omega_1] = [\omega_{11} - \omega_{33}\;\omega_1]$, $[d\omega_2] = [\omega_{22} - \omega_{44}\;\omega_2]$)

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} &[d\gamma_1 + \gamma_1(2\omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44}) - \alpha_1\omega_{31}\;\omega_2] = 0\,, \\ &[d\gamma_2 + \gamma_2(\omega_{11} + \omega_{22}) + \beta_1\omega_{31}\;\omega_2] = 0\,, \\ &[d\gamma_1 + \gamma_1(2\omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44}) - \alpha_1\omega_{31}\;\omega_1] + \\ &+ [d\gamma_3 + \gamma_3(3\omega_{22} - \omega_{11} - 2\omega_{44}) + 3\alpha_1\omega_{42}\;\omega_2] = 0\,, \\ &[-d\gamma_2 + \gamma_2(2\omega_{44} - \omega_{11} - \omega_{22}) - \beta_1\omega_{31}\;\omega_1] + \\ &+ [d\gamma_4 + \gamma_4(2\omega_{22} + \omega_{33} - 3\omega_{44}) - 3\beta_1\omega_{42}\;\omega_2] = 0\,. \end{aligned}$$

Si l'on pose $e_{ik} = \omega_{ik}(\delta)$, la différentiation δ ne se rapportant qu'aux paramètres secondaires, on a

$$(3.4) \qquad \begin{aligned} &\delta\gamma_1 + \gamma_1(2e_{22} - e_{33} - e_{44}) - \alpha_1 e_{31} = 0\,, \\ &\delta\gamma_2 + \gamma_2(e_{11} + e_{22}) + \beta_1 e_{31} = 0\,, \\ &\delta\gamma_3 + \gamma_3(3e_{22} - e_{11} - 2e_{44}) + 3\alpha_1 e_{42} = 0\,, \\ &\delta\gamma_4 + \gamma_4(2e_{22} + e_{33} - 3e_{44}) - 3\beta_1 e_{42} + 2\gamma_2 e_{44} = 0\,. \end{aligned}$$

Pour les congruences qui satisfont à la relation $e_{31} = 0$ $(e_{42} = 0)$ γ_1, γ_2 (γ_3) sont les invariants rélatifs; d'une manière analogue pour les congruences satisfaisant aux relations $e_{31} = e_{43} = 0$ ou $e_{31} = e_{32} = e_{44} = 0$ sont $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ou $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ les invariants rélatifs.

On voit des relations $(3.4)_{1,2}$ que si $\gamma_1 = 0$ ou $\gamma_2 = 0$, alors γ_2 ou γ_1 respectivement est un invariant rélatif.

Les courbes $\omega_2 = 0$ sont des génératrices de la surface focale (A_1) parce que pour $\omega_2 = 0$ il résulte que $\mathrm{d}A_1$ et d^2A_1 sont les combinaisons linéaires des points A_1 et A_3.

On voit sans peine que le repère peut être particularisé de manière à avoir $\gamma_1 = 0$, de sorte que

$$\omega_{32} = 0\,. \tag{3.5}$$

Le point A_3 décrit alors l'arête de rebroussement de la surface focale développable (A_1).

Par différentiation extérieure de (3.5) et d'après le lemme de Cartan il résulte

$$\omega_{31} = \gamma_5\omega_2\,. \tag{3.6}$$

La surface (A_1) est une surface de tangentes d'une courbe gauche ou un cône si et seulement si on a

$$\gamma_5 \neq 0 \quad \textit{ou} \ \gamma_5 = 0 \tag{3.7}$$

respectivement.

Soit $\gamma_5 = 0$, alors l'équation (3.6) est complètement intégrable.

De (2.9) on obtient à l'aide de (2.12), (3.2) et (3.5)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^1\Omega = {}^1\sigma(\overline{-\gamma_3\omega_1 + \gamma_4\omega_2}[A_1A_3] - \gamma_3\omega_2[A_2A_4] - \overline{\omega_{22} - \omega_{11} - 2\omega_{44}}\,{}^1\Omega\, + \\ + \alpha_1\gamma_2\omega_2[A_1A_2])\,. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Pour les génératrices de la congruence L qui sont tangentes à la surface focale (A_1) le long des courbes $\omega_2 = 0$ on obtient de (3.8) et (2.10) ($c = 0$, $\omega_{32} = \omega_{41} = 0$)

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^1\Omega &= {}^1\sigma(-\gamma_2\omega_1[A_1A_3]) + (.)^1\Omega\,, \\ \mathrm{d}^{21}\Omega &= \text{comb. lin.}\,([A_1A_3], [A_2A_4]) \end{aligned} \tag{3.9}$$

de sorte que les complexes osculateurs de ces génératrices sont en tout différents; il en résulte aussi que les courbes $\omega_2 = 0$ sur la variété $({}^1\Omega)$ sont des droites si et seulement si on a

$$\gamma_2 \neq 0\,. \tag{3.10}$$

La variété $({}^1\Omega)$ des images secondaires des complexes osculateurs de la congruence du type IV $(\gamma_2 \neq 0)$ est une surface réglée. Dans le chap. 5 nous allons démontrer aussi le théorème inverse.

Si on a $\gamma_2 = 0$, alors

$$\omega_{41} = 0\,, \tag{3.11}$$

ensuite le long des courbes $\omega_2 = 0$ on obtient de (3.5)

$$\mathrm{d}^1\Omega = (.)^1\Omega\,, \tag{3.12}$$

de façon que le point $^1\Omega$ est fixe. Par différentiation extérieure de (3.11) il résulte d'après (3.5) et $\omega_{43} = \beta_1\omega_2$ que

$$[\mathrm{d}\omega_{41}] = [\omega_{43}\omega_{31}] \equiv 0\,. \tag{3.13}$$

Déterminons la signification géométrique de la relation $\gamma_2 = 0$ ou bien (3.5). De (2.3), il résulte dans le cas considéré

$$\mathrm{d}^2A_2 = \text{comb. lin. de } (A_2, A_3, A_4)\,. \tag{3.14}$$

On a donc: *Les plans osculateurs de la courbe focale (A_2) passent par le point correspondant A_3 qui est le point de l'arête de rebroussement de la surface focale développable (A_1) si et seulement si on a $\gamma_2 = 0$; les complexes osculateurs le long de tous les génératrices de la congruence du type IV $(\gamma_2 = 0)$ qui sortent d'un point focal A_2 commun coïncident, de sorte que la variété $(^1\Omega)$ des images secondaires dans l'espace de Klein est une courbe dont les plans osculateurs $\bar{P}_2$ sont tangents à la K-quadrique au K-point $[A_2A_3]$.*[3]

On prouve la dernière assertion d'une manière suivante: d'après (3.8), (2.10) et (2.12) il résulte

$$[^1\Omega, \mathrm{d}^1\Omega, \mathrm{d}^{21}\Omega] = (.)[[A_1A_3], [A_2A_4], [A_2A_3]] \tag{3.15}$$

et, comme ce plan osculateur contient les K-droites $\overline{[A_1A_3][A_2A_3]}$ et $\overline{[A_2A_4][A_2A_3]}$ qui ont le K-point $[A_2A_3]$ commun, ce plan est alors tangent à la K-quadrique.

Remarquons encore: aux congruences du type précedent on peut, au sens de M. C. SEGRE, introduire *les congruences* dites *associées* dont la courbe directrice est l'arête de rebroussement de la surface focale (A_1) et dont la surface focale développable a pour l'arête de rebroussement la courbe focale (A_2). Si (A_1) est un cône, alors la congruence associée se réduit à un faisceau de droites parce que la courbe (A_2) est plane et son plan osculateur passe par le sommet de ce cône.

Nous avons particularisé le repère de telle façon que $\gamma_1 = 0$. Il a été aussi possible de particulariser le repère de manière à avoir tout d'abord

$$\gamma_2 = 0\,, \quad \gamma_1 \neq 0\,. \tag{3.16}$$

La signification géométrique de ces relations est celle-ci: le plan osculateur de la courbe (A_2) passe par le point A_3 qui, en raison de $\gamma_1 = 0$, n'est pas situé sur l'arête de rebroussement de la surface (A_1). Nous obtenons de nouveau un type géométriquement particulier si $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Il y a 4 espèces suivantes de congruences non-paraboliques du type IV:

Type IV_1: $\alpha_1\beta_1\gamma_2\gamma_5 \neq 0$ – la surface focale (A_1) est une surface développable non-conique et (A_2) est une courbe directrice; les plans osculateurs de la courbe (A_2) en

[3]) Nous allons nommer les points de l'hyperquadrique de Klein (K-quadrique) K-points et les figures compossées des K-points — K-figures.

leurs points d'intersection avec les plans tangents à la surface (A_1) ne passent pas par les points correspondants de l'arête de rebroussement de la surface (A_1).

Type IV_2: $\alpha_1\beta_1\gamma_2 \neq 0 = \gamma_5$ – la surface (A_1) est un cône et les plans osculateurs de la courbe focale (A_2) ne passent pas par son sommet.

Type IV_3: $\alpha_1\beta_1\gamma_5 \neq 0 = \gamma_2$ – la surface focale (A_1) est une surface développable non-conique et (A_2) est une courbe gauche; les plans osculateurs de la courbe (A_2) en leurs points d'intersection avec les plans tangents à la surface (A_2) passent par les points correspondants de l'arête de rebroussement de la surface (A_1).

Type IV_4: $\alpha_1\beta_1 \neq 0 = \gamma_2 = \gamma_5$ – la surface développable (A_1) est un cône et la courbe directrice (A_2) est une courbe plane dont le plan passe par le sommet du cône (A_1).

Passons à la détermination de l'existence et de la généralité des congruences envisagées. Il s'agit alors de discuter le système de Pfaff

$$\begin{aligned}(3.17)\qquad &\omega_{12} = \alpha_1\omega_2\,,\quad \omega_{13} = \omega_1\,,\quad \omega_{14} = 0\,,\quad \omega_{21} = 0\,,\quad \omega_{23} = 0\,,\quad \omega_{24} = \omega_2\,,\\ &\omega_{31} = \gamma_5\omega_2\,,\quad \omega_{32} = 0\,,\quad \omega_{34} = 0\,,\quad \omega_{41} = \gamma_2\omega_2\,,\quad \omega_{43} = \beta_1\omega_2\,.\end{aligned}$$

La différentiation extérieure entraîne:

$$\begin{aligned}(3.18)\qquad [\mathrm{d}\alpha_1 + \alpha_1(2\omega_{22} - \omega_{11} - \omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ [\mathrm{d}\gamma_5 + \gamma_5(\omega_{11} + \omega_{22} - \omega_{33} - \omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ [\mathrm{d}\gamma_2 + \gamma_2(\omega_{11} + \omega_{22} - 2\omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,,\\ \gamma_2[\omega_1\omega_2] + [\mathrm{d}\beta_1 + \beta_1(\omega_{22} + \omega_{33} - 2\omega_{44})\,\omega_2] &= 0\,.\end{aligned}$$

On voit sans peine que le système fermé est en involution et *les classes des congruences du type* IV_1 *ou* IV_2 *ou* IV_3 *ou* IV_4 *dépendent par ordre de* 4 *ou de* 3, 3, 2 *fonctions arbitraires d'une variable respectivement.*

4. Dorénavant soit L une congruence W. Supposons que le repère soit particularisé de telle façon que (cf. [2], (2.1))

$$(4.1)\qquad \alpha_1 = \beta_1\,,\quad \alpha_2 = \beta_2\,;$$

alors il résulte de (2.5), (2.9) et (2.10):

$$\begin{aligned}(4.2)\qquad \Omega &= \sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,,\\ \mathrm{d}\Omega &= \sigma\{\overline{\omega_{32} + \omega_{41}}[A_1A_2] + \overline{\omega_{11} + \omega_{33}}([A_1A_3] + [A_2A_4])\} +\\ &\quad + \mathrm{d}\sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,,\\ \mathrm{d}^2\Omega &= \sigma\{[\mathrm{d}(\omega_{32} + \omega_{41}) + \omega_{32}(\omega_{11} - \omega_{44}) + \omega_{41}(\omega_{22} - \omega_{33})][A_1A_2] +\\ &\quad + [\mathrm{d}(\omega_{11} + \omega_{33}) + (\omega_{11} + \omega_{33})^2][A_1A_3] - [\mathrm{d}(\omega_{22} + \omega_{44}) + (\omega_{22} + \omega_{44})^2]\,.\\ &\quad .\,[A_2A_4] + [\omega_2(\omega_{32} + \omega_{41}) + 2\alpha_2\omega_1(\omega_{11} + \omega_{33})][A_1A_4] +\\ &\quad + [-\,\omega_1(\omega_{32} + \omega_{41}) + 2\alpha_1\omega_2(\omega_{11} + \omega_{33})][A_2A_3]\} +\\ &\quad + 2\mathrm{d}\sigma\{(\omega_{32} + \omega_{41})[A_1A_2] + (\omega_{11} + \omega_{33})([A_1A_3] + [A_2A_4])\} +\\ &\quad + \mathrm{d}^2\sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,.\end{aligned}$$

On obtient de (4.2) les expressions pour Ω^*, $d\Omega^*$, $d^2\Omega^*$ par les transformations (2.13) et (2.14).

Soit (Φ) ou (Φ^*) *l'image de Klein de la congruence* L engendrée par la droite $[A_1A_2]$ ou $[E_3E_4]$. Le plan tangent de la surface (Φ) ou bien de (Φ^*) est

$$(4.3) \quad \bar{P}_2^\Phi = \{[A_1A_2], [A_1A_4], [A_2A_3]\} \quad \text{ou} \quad \bar{P}_2^{\Phi^*} \equiv \{[E_3E_4], [E_2E_3], [E_1E_4]\}$$

respectivement. Chacune des deux surfaces (Φ) et (Φ^*) possède un réseau conjugué; les espaces à quatre dimensions osculateurs de la surface (Φ) ou (Φ^*) sont

$$(4.4) \qquad \bar{P}_4^\Phi \equiv \{[A_1A_2], [A_1A_3] + [A_2A_4], [A_1A_4], [A_2A_3], [A_3A_4]\}$$

ou

$$(4.5) \qquad \bar{P}_4^{\Phi^*} \equiv \{[E_3E_4], [E_1E_3] + [E_2E_4], [E_2E_3], [E_1E_4], [E_1E_2]\}$$

et l'équation différentielle

$$(4.6) \qquad \alpha_2\omega_1^2 + \alpha_1\omega_2^2 = 0$$

des courbes asymptotiques des surfaces focales de L représente aussi l'équation différentielle du réseau conjugué de la surface (Φ) ou (Φ^*).

Supposons tout d'abord que nous ayons

$$(4.7) \qquad 0 \neq \omega_{32} + \omega_{11} \neq k(\omega_{11} + \omega_{44}) \neq 0\,, \quad k = \text{const} \neq 0\,,$$

c'est-à-dire que la variété (Ω) soit à deux dimensions. Les espaces tangents et osculateurs de la surface (Ω) sont donnés par

$$(4.8) \qquad \begin{aligned} \bar{P}_2^\Omega &\equiv \{[A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4]\}\,,\\ \bar{P}_4^\Omega &\equiv \{[A_1A_2], [A_1A_3], [A_2A_4], [A_1A_4], [A_2A_3]\}\,. \end{aligned}$$

On voit des relations (4.2), (4.3), (4.4) et (4.8) que, dans la polarité par rapport à la K-quadrique, Ω, $\bar{P}_2^\Omega$, $\bar{P}_4^\Omega$ et $\bar{P}_4^\Phi$, $\bar{P}_2^\Phi$, Φ se correspondent réciproquement par ordre. Mais la polarité transforme chaque surface développable de nouveau en une surface développable et donc si le point Φ décrit une courbe du réseau sur la surface (Φ), le pôle réciproque Ω décrit une courbe du réseau sur la surface (Ω). Alors: *la surface* (Ω) *possède une réseau conjugué et* (4.6) *est l'équation différentielle de ce réseau.* Il en va de même pour la dualisation de la congruence L.

De (4.3) et (4.8) il résulte que les espaces $\bar{P}_2^\Phi$, $\bar{P}_2^\Omega$, $\bar{P}_4^\Omega$ sont tangents à la K-quadrique au K-point $[A_1A_2]$. Chacun des plans tangents $\bar{P}_2^\Phi$ et $\bar{P}_2^\Omega$ qui possèdent le K-point $[A_1A_2]$ commun coupe la K-quadrique dans une conique singulière. La conique dans le plan $\bar{P}_2^\Phi$ $(\bar{P}_2^\Omega)$ est l'image de Klein du faisceau de droites dans le plan focal E_4 (E_3) dont le sommet est A_1 et du faisceau de droites dans le plan E_3 (E_4) dont le sommet est le point A_2.

La tangente $\{\Omega, d\Omega\}$ de la surface (Ω) coupe la K-quadrique aux K-points

$$(4.9) \qquad \begin{aligned} X_1 &= \lambda\{(\omega_{32} + \omega_{41})[A_1A_2] - 2(\omega_{11} + \omega_{33})[A_1A_3]\}\,,\\ X_2 &= \lambda\{(\omega_{32} + \omega_{41})[A_1A_2] + 2(\omega_{11} + \omega_{33})[A_2, A_4]\}\,, \quad \lambda \neq 0\,, \quad \text{arb.} \end{aligned}$$

De (4.9) on voit que les tangentes des courbes

$$(4.10) \qquad \omega_{11} + \omega_{33} = 0$$

sont tangents à la K-quadriques au K-point $[A_1A_2]$. Comme on a $\omega_{11} + \omega_{22} + \omega_{33} + \omega_{44} = 0$, il résulte de (4.2) pour les courbes (4.10) ($\bar{\mathrm{d}}$ signifie la différentiation sous la supposition (4.10)):

$$(4.11) \qquad \bar{\mathrm{d}}^2\Omega = \bar{\mathrm{d}}\{\sigma(\omega_{32} + \omega_{41})[A_1A_2]\} + (\omega_{32} + \omega_{41})(\bar{\mathrm{d}}\sigma)[A_1A_2] + ([A_1A_3] - [A_2A_4])\,\bar{\mathrm{d}}^2\sigma$$

et donc pour $\omega_{11} + \omega_{33} = 0$ les points Ω, $\mathrm{d}\Omega$, $\mathrm{d}^2\Omega$ sont situés dans le plan tangent de la K-quadrique de sorte que les plans osculateurs des courbes (4.10) sont tangents à la K-quadrique aux points $[A_1A_2]$ et contiennent les tangentes des courbes (4.10) de la surface (Φ). Nous allons expliquer la signification géométrique de ces courbes dans le chap. 5. On peut résumer les résultats précédents de la manière suivante:

Les espaces osculateurs de la surface (Ω) *réalisent une correspondance ponctuelle* $(\Omega) \to (\Phi)$ *entre les surfaces* (Ω) *et* (Φ); *la même correspondance est réalisée par les espaces tangents* $\bar{P}_2^\Omega$ *de la surface* (Ω) *de même que par les tangentes et les espaces osculateurs des courbes* (4.10). *Les espaces, les plans, les tangentes précités sont tangents à la K-quadrique au point correspondant* $\Phi \equiv [A_1A_2]$ *de la surface* (Φ). *La correspondance ponctuelle* $(\Phi) \to (\Omega)$ *réalise la polarité par rapport à la K-quadrique de manière que les points* Ω *sont des pôles des espaces osculateurs de la surface* (Φ) *au K-point* Φ *considéré.*

Passons à l'étude du cas où la variété (Ω) est une courbe. Ensuite, nécessairement, la congruence est décomposable à une couche à un parametre de surfaces réglées de façon que pour toutes les droites de la même surface de cette couche les complexes osculateurs coïncident. Quand $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ est l'équation différentielle de cette couche (a, b ne sont pas en même temps nuls) ensuite on a le long des courbes $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ nécessairement

$$(4.12) \qquad \mathrm{d}\Omega \equiv \varrho\Omega, \ \varrho \ \text{ arb.}$$

Sous la supposition (4.1), on obtient de (1.4)

$$(4.13) \qquad \begin{aligned} [\omega_{32} + \omega_{41}\ \omega_1] - 2\alpha_1[\omega_{11} + \omega_{33}\ \omega_2] &= 0\,, \\ [\omega_{32} + \omega_{41}\ \omega_2] + 2\alpha_2[\omega_{11} + \omega_{33}\ \omega_1] &= 0 \end{aligned}$$

et, d'après le lemme de Cartan, il en résulte

$$(4.14) \qquad \begin{aligned} \omega_{32} + \omega_{41} &= 2(\bar{t}_2\alpha_2\omega_1 - \bar{t}_1\alpha_1\omega_2)\,, \\ \omega_{11} + \omega_{33} &= \bar{t}_1\omega_1 + \bar{t}_2\omega_2\,. \end{aligned}$$

Autant qu'on a $\bar{t}_1\bar{t}_2 \neq 0$, *la condition nécessaire et suffissante pour que la variété* (Ω) *soit une courbe est*

$$(4.15) \qquad \bar{t}_1^2\alpha_1 + \bar{t}_2^2\alpha_2 = 0\,.$$

Dans le chap. 5 nous allons voir que les nappes focales de ces congruences sont réglées.

Lorsqu'on a

$$(4.16) \qquad \bar{t}_1 = \bar{t}_2 = 0 \quad \text{c.-à-d.} \quad \omega_{32} + \omega_{41} = \omega_{11} + \omega_{33} = 0\,,$$

la relation (4.12) est remplie pour toutes les génératrices de la congruence L et celle-ci appartient à un complexe linéaire (cf. [2], p. 404). Ces congruences seront exclues de nos considérations.

5. Le repère soit particularisé de telle façon que ([2], p. 405)

$$(5.1) \qquad \alpha_1 = \beta_1 = -\alpha_2 = -\beta_2 = 1\,.$$

Ensuite on a ([2], p. 406–408)

$$(5.2) \qquad \omega_{11} + \omega_{44} = \omega_{22} + \omega_{33} = 0\,,$$

$$(5.3) \qquad \begin{aligned} \omega_{11} - \omega_{33} &= \omega_{22} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2\,,\\ \omega_{11} - \omega_{22} &= \omega_{33} - \omega_{44} = t_1\omega_1 + t_2\omega_2\,,\end{aligned}$$

$$(5.4) \qquad \begin{aligned} \omega_{32} &= \quad (z_2 - t_2)\,\omega_1 + (z_1 - t_1)\,\omega_2\,,\\ \omega_{41} &= -(z_2 + t_2)\,\omega_1 - (z_1 + t_1)\,\omega_2\,,\end{aligned}$$

$$(5.5) \qquad [\mathrm{d}\omega_1] = -z_2[\omega_1\omega_2]\,, \quad [\mathrm{d}\omega_2] = z_1[\omega_1\omega_2]\,,$$

$$(5.6) \qquad \begin{aligned} \omega_{31} &= (p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2)\,\omega_1 + \tfrac{1}{2}(z_{21} - z_{12} - 2)\,\omega_2\,,\\ \omega_{42} &= \tfrac{1}{2}(z_{12} - z_{21} - 2)\,\omega_1 + (p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2)\,\omega_2\,,\end{aligned}$$

$$(5.7) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}t_1 &= (s - 3z_1t_1)\,\omega_1 + (r - z_2t_1)\,\omega_2\,,\\ \mathrm{d}t_2 &= (r - z_1t_2)\,\omega_1 + (s - 3z_2t_2)\,\omega_2\,,\end{aligned}$$

$$(5.8) \qquad \begin{aligned} \mathrm{d}z_1 &= z_{11}\omega_1 + z_{12}\omega_2\,,\\ \mathrm{d}z_2 &= z_{21}\omega_1 + z_{22}\omega_2\,,\end{aligned}$$

$$(5.9) \qquad \Omega = \sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,,$$

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \mathrm{d}\Omega = \sigma\{(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)([A_1A_3] + [A_2A_4]) - 2(t_2\omega_1 - t_1\omega_2)[A_1A_2]\} +\\ + \mathrm{d}\sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,,\end{aligned}$$

$$(5.11) \quad \begin{aligned} \mathrm{d}^2\Omega = \sigma\{[-2\mathrm{d}(t_2\omega_1 + t_1\omega_2) + 2(t_1z_2 - t_2z_1)(\omega_1^2 - \omega_2^2)][A_1A_2] +\\ + [\mathrm{d}(t_1\omega_1 + t_2\omega_2) + (t_1\omega_1 + t_2\omega_2)^2][A_1A_3] +\\ + [\mathrm{d}(t_1\omega_1 + t_2\omega_2) - (t_1\omega_1 + t_2\omega_2)^2][A_2A_4] -\\ - 2(t_1\omega_1^2 + 2t_2\omega_1\omega_2 + t_1\omega_2^2)[A_1A_4] + 2(t_2\omega_1^2 + 2t_1\omega_1\omega_2 + t_2\omega_2^2)[A_2A_3]\} +\\ + 2\mathrm{d}\sigma\{(t_1\omega_1 + t_2\omega_2)([A_1A_3] + [A_2A_4]) - 2(t_2\omega_1 + t_1\omega_2)[A_1A_2]\} +\\ + \mathrm{d}^2\sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,.\end{aligned}$$

Vu (5.1), la relation (4.15) est remplacée par

$$(5.12) \qquad t_1^2 - t_2^2 = 0\,, \quad t_1 \,.\, t_2 \neq 0$$

de sorte que *les congruences L pour lesquelles la variété* (Ω) *est une courbe gauche sont les congruences qui possèdent deux nappes focales réglées* ([7], [4]; [3], chap. 2).

Nous allons les appeler congruences W de Segre. (Cf. [4].) Les images de Klein des nappes focales de ces congruences sont les courbes d'intersection des tangentes à la courbe (Ω) avec la K-quadrique.

Avant tout nous allons démontrer: *Si* (Ω) *est une surface, elle est non-réglée.* (Cf. chap. 3.) Pourque les courbes $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ sur la surface (Ω) soient droites, il faut que les plans osculateurs de ces courbes soient indéfinis et alors pour $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$ on a nécessairement $\mathrm{d}^2\Omega =$ comb. lin. de $(\Omega, \mathrm{d}\Omega)$; il s'ensuit que les coefficients de $[A_1A_4]$ et $[A_2A_3]$ dans la relation (5.11) sont nuls pour $a\omega_1 + b\omega_2 = 0$, ce qui signifie soit $t_1^2 - t_2^2 = 0$ soit $t_1 = t_2 = 0$ et alors (Ω) est une courbe ou un point fixe.

Supposons maintenant pour les congruences L la relation

$$t_1^2 - t_2^2 \neq 0\,. \tag{5.13}$$

A chaque courbe sur la surface (Ω) dont les espaces osculateurs $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ ne sont pas tangents à la K-quadrique[4]) il correspond dans l'espace P_3 une congruence W de Segre qui nous allons appeler *congruence W de Segre tangente à la congruence L.* La raison de cette dénomination s'éclaircira plus tard.

En ce qui concerne des courbes sur la surface (Ω) pour lesquelles les plans osculateurs sont tangents à la K-quadrique et qui correspondent aux congruences tangentes du type IV_3, il en sera question plus loin.

Les tangentes $\{\Omega, \mathrm{d}\Omega\}$ *de la surface* (Ω) *sont tangentes à la K-quadrique seulement lorsqu'elles sont en même temps tangentes aux courbes*

$$t_1\omega_1 + t_2\omega_2 = \omega_{11} + \omega_{33} = 0 \tag{5.14}$$

de (Ω), *c.-à-d.* (d'après [2], p. 406) *aux courbes qui correspondent à la décomposition canonique relative à la dualisation en tant que déformation projective de la congruence L envisagée.*

On voit sans peine de $(1.7)_1$ que les tangentes aux courbes (5.14) de la surface (Φ) ne passent pas par les points correspondants de (Ω).

Aux courbes (5.14) *de la surface* (Ω) *il correspond dans l'espace* P_3 *certaines congruences paraboliques dont les nappes focales confondues sont les surfaces de la décomposition canonique envisagée.*

Le plan osculateur d'une courbe quelconque (5.14) est déterminé par les points

$$\Omega = \sigma([A_1A_3] - [A_2A_4])\,, \quad \mathrm{d}\Omega = (.)[A_1A_2] + (.)\Omega\,, \tag{5.15}$$
$$\mathrm{d}^2\Omega = (.)[A_1A_2] + 2\,\frac{\omega_1^2}{t_1^2}\,(t_2^2 - t_1^2)\,\sigma(t_1[A_1A_4] + t_2[A_2A_3]) + (.)\Omega$$

---

4) Aux Mémoires [4] et [5], l'auteur a étudié les congruences W de Segre en supposant qu'aucun des espaces osculateurs $\bar{P}_1, P_2, \bar{P}_3, \bar{P}_4$ de la courbe qui représente la congruence W de Segre dans l'espace de Klein n'est pas tangent à la K-quadrique. Dans les considérations présentes il suffit de faire la supposition précédente pour les espaces $\bar{P}_1$ et $\bar{P}_2$ seulement.

et est tangent à la K-quadrique au point $[A_1A_2]$. Ce plan coupe la K-quadrique dans les deux K-droites qui joignent le K-point $[A_1A_2]$ aux K-points

$$(5.16)\quad p_{1,2} \equiv (.)\{\pm\sqrt{-t_1t_2}([A_1A_3] - [A_2A_4] + t_1[A_1A_4] + t_2[A_2A_3]\}\,.$$

Le plan polaire au plan osculateur précédent coupe la K-quadrique dans deux K-droites qui joignent le K-point $[A_1A_2]$ aux K-points

$$(5.17)\quad q_{1,2} = (.)\{\pm\sqrt{-t_1t_2}([A_1A_3] + [A_2A_4] + t_1[A_1A_4] - t_2[A_2A_4] = \\ = (.)[\sqrt{t_1}A_1 \pm \sqrt{-t_2}A_2\,;\sqrt{t_1}A_4 \pm \sqrt{-t_2}A_3]\,.$$

Ces deux K-droites-là sont des K-images de deux faisceaux de droites qui possèdent des sommets différents sur la droite $[A_1A_2]$; chacune des droites q_1 et q_2 appartient à un des faisceaux déterminés et comme on a $q_1 \,.\, q_2 \neq 0$ il en résulte que q_1 et q_2 ne se coupent pas. *Chacune des congruences paraboliques mentionnées se compose de deux ensembles de faisceaux de droites à un paramètre; les sommets de ces faisceaux*

$$(5.18)\qquad \sqrt{t_1}A_1 + \sqrt{-t_2}A_2 \quad et \quad \sqrt{t_1}A_1 - \sqrt{-t_2}A_2$$

décrivent sur la surface focale réglée (sur la surface de la décomposition) deux courbes (les courbes focales) et les droites de ces faisceaux sont situées dans les plans tangents de la surface focale aux points des courbes focales.[5]) *Les points* (5.18) *et les points focaux A_1 et A_2 se séparent harmoniquement.*

La condition nécessaire et suffisante pour que les droites (K-points) p_1, p_2 ou q_1, q_2 coïncident, est qu'au moins une des fonctions t_1 et t_2 soit nulle, c'est-à-dire: la dualisation de Lest une déformation projective demi-singulière ([2], p. 406); il sera question de ces congruences plus loin. Quand on a $t_1 = t_2 = 0$, la considération perd son sens, parce que (Ω) est un point fixe, ce que nous avons exclu.

Supposons maintenant

$$(5.13')\qquad (t_1^2 - t_2^2)\, t_1t_2 \neq 0\,.$$

Déterminons sur la surface (Ω) les courbes dont les plans osculateurs sont tangents à la K-quadrique; à ces courbes, tant que leurs tangentes ne sont pas tangentes à la K-quadriques, il correspond des congruences tangentes du type IV_3 (v. chap. 3).

L'équation différentielle

$$(5.17)\qquad a\omega_1 + b\omega_2 = 0$$

où a, b ne sont pas en même temps nuls fournit sur la surface (Ω) une couche de courbes à un paramètre. Les points (5.9)–(5.11) où on a substitué d'après (5.19), déterminent les plans osculateurs des courbes (5.19) et le point général de ce plan est donné par la relation

$$(5.20)\qquad X = \lambda\Omega + \mu\,\mathrm{d}\Omega + \nu\,\mathrm{d}^2\Omega\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ce plan soit tangent à la K-quadrique

[5]) M. C. SEGRE signale ces congruences paraboliques au Mémoire [7].

est celle-ci: la conique d'intersection de ce plan et de la K-quadrique est singulière, c'est-à-dire

$$
(5.21) \qquad \begin{vmatrix} \Omega\,.\,\Omega & \Omega\,.\,\mathrm{d}\Omega & \Omega\,.\,\mathrm{d}^2\Omega \\ \Omega\,.\,\mathrm{d}\Omega & \mathrm{d}\Omega\,.\,\mathrm{d}\Omega & \mathrm{d}\Omega\,.\,\mathrm{d}^2\Omega \\ \Omega\,.\,\mathrm{d}^2\Omega & \mathrm{d}\Omega\,.\,\mathrm{d}^2\Omega & \mathrm{d}^2\Omega\,.\,\mathrm{d}^2\Omega \end{vmatrix} =
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \overline{T}_1^2 \\ 0 & -\overline{T}_1^2 & -\overline{T}_1\,\mathrm{d}\overline{T}_1 \\ \overline{T}_1^2 & -\overline{T}_1\mathrm{d}\overline{T}_1 & -2(\mathrm{d}\overline{T}_1)^2+\overline{T}_1^4+4(t_1\omega_1^2+2t_2\omega_1\omega_2+t_1\omega_2^2)(t_2^2\omega_1^2+2t_1\omega_1\omega_2+t_2\omega_2^2) \end{vmatrix} = 0
$$

où $\overline{T}_1 = t_1\omega_1 + t_2\omega_2$; de (5.21) il résulte

$$
(5.22) \qquad \overline{T}_1^2(t_1\omega_1 + 2t_1\omega_1\omega_2 + t_1\omega_2^2)(t_2\omega_1^2 + 2t_1\omega_1\omega_2 + t_2\omega_2^2) = 0\,.
$$

D'après cette relation, on a $\overline{T}_1^2 = 0$, ce qui détermine les courbes de la décomposition canonique de L. Vu la supposition $t_1t_2 \neq 0$, ni $\omega_1 = 0$, ni $\omega_2 = 0$ n'est une solution de l'équation (5.22) qui est une équation différentielle de 4-ième degré et alors: *Les courbes dont les plans osculateurs sont tangents à la K-quadrique (les tangentes de ces courbes ne sont pas tangentes à la K-quadrique) constituent sur la surface* (Ω) *une* 4-*couche. A cela il correspond dans l'espace* P_3 *les congruences tu type* IV_3 *tangentes à la congruence L.*

Considérons maintenant sur la surface (Ω) une couche de courbes arbitraire

$$
(5.23) \qquad \omega_2 = c\omega_1\,, \quad c(t_1 + t_2c) \neq 0
$$

où (5.23) ne doit pas être la solution de (5.22). A chaque courbe de cette couche il correspond dans l'espace P_3 une certaine congruence de Segre dont les nappes focales engendrent les droites

$$
(5.24) \qquad \begin{aligned} X_1 &= 2\lambda\omega_1\{(t_1 + t_2c)[A_1A_3] - (t_2 + t_1c)[A_1A_2]\}\,, \\ X_2 &= 2\lambda\omega_1\{(t_1 + t_2c)[A_2A_4] - (t_2 + t_1c)[A_1A_2]\}\,, \quad \lambda \neq 0 \quad \text{arb.} \end{aligned}
$$

Les K-images de ces droites sont les points d'intersection des tangentes de la courbe (5.23) avec la K-quadrique. Chacune de ces droites est située dans un des plans focaux de la génératrice $[A_1A_2]$ de L et donc: *Les nappes focales de la congruence tangente de Segre sont tangentes aux nappes focales de la congruence L aux points des courbes* (5.23), ce qui motive la raison de leur dénomination.

Si dans (5.23) la fonction c varie, alors dans chaque plan focal d'une génératrice fixe $[A_1A_2]$ les droites (5.24) engendrent deux faisceaux dont les droites correspondent projectivement.

Passons à la détermination des points focaux correspondants sur les droites X_1 et X_2 des congruences tangentes de Segre.

Pour abréger posons

$$
(5.25) \qquad T_1 = t_1 + ct_2\,, \quad T_2 = t_2 + ct_1\,, \quad Z_1 = z_1 + cz_2\,, \quad Z_2 = z_2 + cz_1\,.
$$

Pour que les points

$$(5.26) \quad \bar{A}_1 = a_1 A_1 + b_1(T_1 A_3 - T_2 A_2), \quad \bar{A}_2 = a_2 A_2 + b_2(T_1 A_4 + T_2 A_1)$$

soient des points focaux d'une même génératrice de la congruence tangente de Segre, il est nécessaire, et il suffit, que le plan tangent au point $\bar{A}_1$ de la surface focale engendrée par la droite X_1 passe par le point $\bar{A}_2$ et le plan tangent au point $\bar{A}_2$ de la surface focale engendrée par X_2 passe par $\bar{A}_1$ et donc qu'on ait

$$(5.27) \qquad \begin{gathered} a_2 b_1 \omega_1 (T_1 + cT_2) + b_2 a_1 \omega_1 (T_2 + T_1 c) + \\ + b_1 b_2 [(T_1^2 Z_2 - T_1 T_2 Z_1)\omega_1 + b_1(T_2 \,\mathrm{d}T_1 - T_1 \,\mathrm{d}T_2)] = 0 \end{gathered}$$

où

$$(5.28) \qquad \begin{aligned} T_1 + cT_2 &= t_1 + 2ct_2 + c^2 t_1 , \\ T_2 + cT_1 &= t_2 + 2ct_1 + c^2 t_2 , \\ b_1 T_1(T_1 Z_2 - T_2 Z_1) &= b_1(t_1 + t_2 c)(1 - c^2)(t_1 z_2 - t_2 z_1) , \\ T_2 \,\mathrm{d}T_1 - T_1 \,\mathrm{d}T_2 &= \mathrm{d}c(t_2^2 - t_1^2) + (1 - c^2)(t_2 \,\mathrm{d}t_1 - t_1 \,\mathrm{d}t_2) . \end{aligned}$$

Déterminons les équations différentielles des surfaces développables des congruences tangentes de Segre. Pour que le point $\bar{A}_1$, resp. $\bar{A}_2$ décrit l'arête de rebroussement d'une surface développable, il est nécessaire, et il suffit, que $\mathrm{d}\bar{A}_1$ = comb. lin. de $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$, resp. $\mathrm{d}A_2$ = comb. lin. de $(\bar{A}_1, \bar{A}_2)$.

On a $(T_1^2 \neq 0)$

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\bar{A}_1 = {} & \left(\mathrm{d}a_1 + a_1\omega_{11} + b_1 T_1 \omega_{31} + 2b_1 T_2 \omega_1 + c\omega_1 b_1 \frac{T_2^2}{T_1}\right) A_1 + \\ & + \left(\mathrm{d}b_1 + \frac{a_1\omega_1}{T_1} + \frac{b_1 \,\mathrm{d}T_1}{T_1} + b_1\omega_{33}\right)(T_1 A_3 - T_2 A_2) + \\ & + \left(a_1 c\omega_1 - b_1 \,\mathrm{d}T_2 - b_1 T_1 \omega_{32} - T_2 b_1 \overline{\omega_{22} - \omega_{33}} + \right. \\ & \left. + \frac{a_1\omega_1 T_2}{T_1} + \frac{b_1 T_2 \,\mathrm{d}T_1}{T_1}\right) A_2 - \\ & - \frac{b_1\omega_1}{T_1}(T_1 + T_2 c)(T_1 A_4 + T_2 A_1) , \\ \mathrm{d}\bar{A}_2 = {} & \left(- a_2\omega_1 + b_2 \,\mathrm{d}T_2 + b_2 T_1 \omega_{41} + b_2 T_2 \overline{\omega_{11} - \omega_{44}} - \frac{a_2 c\omega_1 T_2}{T_1} - \right. \\ & \left. - b_2 T_2 \frac{\mathrm{d}T_1}{T_1}\right) A_1 + \frac{b_2\omega_1}{T_1}(T_1 c + T_2)(T_1 A_3 - T_2 A_2) + \\ & + \left(\mathrm{d}a_2 + a_2\omega_{22} + b_2 T_1 \omega_{42} + 2b_2 T_2 c\omega_1 + \frac{b_2 T_2^2 \omega_1}{T_1}\right) A_2 + \\ & + \left(\mathrm{d}b_2 + \frac{a_2 c\omega_1}{T_1} + b_2 \frac{\mathrm{d}T_1}{T_1} + b_2\omega_{44}\right)(T_1 A_4 + T_2 A_1) . \end{aligned}$$

Les coefficients de A_1, $T_1 A_3 - T_2 A_2$ et A_2, $T_1 A_4 + T_2 A_1$ doivent être proportionnels aux coefficients a_1, b_1 et a_2, b_2 et donc ils doivent satisfaire la relation (5.27). En substituant dans cette relation, on obtient *les équations différentielles des surfaces développables* sous la forme $(\omega_1 T_1(T_1 + cT_2)(T_2 + cT_1) \neq 0)$

$$T_1 b_1 \,\mathrm{d}a_1 - a_1 \,\mathrm{d}(T_1 b_1) = \left[a_1^2 - a_1 b_1 T_1(z_1 + cz_2) - (T_1 b_1)^2\left(\omega_{31} + 2\frac{T_2}{T_1} + c\frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]\omega_1 , \tag{5.29}$$

$$T_1 b_2 \,\mathrm{d}a_2 - a_2 \,\mathrm{d}(T_1 b_2) = \left[a_2^2 c - a_2 b_2 T_1(z_1 + cz_2) - (T_1 b_2)^2\left(\omega_{42} + 2\frac{T_2}{T_1}c + \frac{T_2^2}{T_1^2}\right)\right]\omega_1 . \tag{5.30}$$

Vu les relations précédentes on voit que pour $c = \pm 1$ la relation (5.27) se simplifie à

$$a_2 b_1 \pm b_2 a_1 = 0 , \tag{5.31}$$

où le signe supérieur (inférieur) se rapporte à $c = 1$ $(c = -1)$. Si on a $c = \pm 1$ ensuite $T_1 = \pm T_2$; en substituant dans (5.26) d'après (5.28) et en posant $a_1 = a_2 = a$, $b_1 T_1 = b_2 T_1 = b$ on voit que *les génératrices des congruences tangentes de Segre sont déterminées par les points (focaux)*

$$^{+}\bar{A}_1 = aA_1 + b(A_2 - A_3) , \quad ^{+}\bar{A}_2 = aA_2 + b(A_4 + A_1) \quad \text{pour} \quad c = 1 \tag{5.32}$$

et

$$^{-}\bar{A}_1 = aA_1 + b(A_2 + A_3) , \quad ^{-}\bar{A}_2 = aA_2 + b(A_4 - A_1) \quad \text{pour} \quad c = -1. \tag{5.33}$$

Par un calcul simple on obtient pour les congruences tangentes de Segre *les équations différentielles des surfaces développables* dont les arêtes de rebroussement sont situées sur la nappe focale engendrée par X_1 ou X_2 sous la forme

$$b \,\mathrm{d}a - a \,\mathrm{d}b = \left[\mp a^2 - ab(z_1 \pm z_2) + b^2\left(2 + \tfrac{1}{2}\overline{z_{21} - z_{12}} \pm \overline{p + z_{11} + 2z_1^2 + t_1^2}\right)\right]\omega_1 , \tag{5.29'}$$

ou

$$b \,\mathrm{d}a - a \,\mathrm{d}b = \left[\pm a^2 - ab(z_1 \pm z_2) - b^2\left(2 + \tfrac{1}{2}\overline{z_{12} - z_{21}} \pm \overline{p + z_{22} + 2z_2^2 + t_2^2}\right)\right]\omega_1 \tag{5.30'}$$

respectivement, où toutes les fonctiones qui y apparaissent ont été introduites dans les relations (5.3)–(5.8); les signes supérieurs (inférieurs) dans (5.29′) ou (5.30′) se rapportent à $c = 1$ $(c = -1)$. Signalons encore que dans les relations (5.29′) et (5.30′) pour toutes les deux congruences on a désigné les paramètres par les mêmes lettres a et b, mais leurs valeurs sont en général différentes.

Considérons maintenant le type des congruences W dont la dualisation en tant que déformation projective est demi-singulière, c.-à-d. les congruences pour lesquelles ([2], p. 406)

$$t_1 \neq 0 = t_2 . \tag{5.34}$$

Comme on sait, la décomposition canonique (relative à la dualisation en tant que déformation projective) est engendrée par les surfaces $\omega_1 = 0$. Les tangentes des courbes $\omega_1 = 0$ de la surface (Ω), et seulement de ces courbes, sont tangentes à la K-quadrique en $[A_1A_2]$. Les plans osculateurs des courbes $\omega_1 = 0$ sont déterminés par les points

$$\Omega = \sigma([A_1A_3] - [A_2A_4]), \quad d\Omega = -2\sigma t_1\omega_2[A_1A_2] + (.)\Omega,$$
$$d^2\Omega = [\sigma(-2d\overline{t_1\omega_2} - 2t_1z_2\omega_2^2) - 4d\sigma t_1\omega_2][A_1A_2] - 2\sigma t_1\omega_2^2[A_1A_4] + (.)\Omega \tag{5.35}$$

et coupent la K-quadrique dans la droite $\overline{[A_1A_2][A_1A_4]}$ qui est la K-image du faisceau de droites ayant le point A_1 pour son sommet et étant situé dans le plan $E_3 \equiv \equiv [A_1, A_2, A_4]$. Le plan polairement conjugué au plan osculateur ci-dessus mentionné est déterminé par les points $[A_1A_2]$, $[A_1A_4]$, $[A_1A_3] + [A_2A_4]$, de sorte qu'il est tangent à la K-quadrique le long de la droite $\overline{[A_1A_2][A_1A_4]}$. *Chaque surface de la décomposition canonique de la congruence L dont la dualisation en tant que déformation projective est demi-singulière est une nappe focale d'une certaine congruence parabolique qui d'après* (5.18) *a pour sa courbe focale sur cette nappe la courbe décrite par le point A_1; dans chaque plan tangent de la surface focale (A_1) de L au point A_1 les génératrices de cette congruence parabolique engendrent un faisceau dont le sommet est le point A_1. Sur la surface (Ω) il existe trois couches de courbes qui correspondent aux congruences tangentes du type IV_3.* L'équation différentielle de ces couches résulte de (5.22) d'après (5.34); *une de ces couches est formée par les courbes $\omega_2 = 0$.*

6. Supposons, dans la suite, $t_1^2 - t_2^2 \neq 0$. Désignons *la transformée de Laplace de la surface* (Ω) dans le sens des courbes $\omega_1 + \omega_2 = 0$ ou $\omega_1 - \omega_2 = 0$ par (Ω_{+1}) ou (Ω_{-1}) respectivement. Par un calcul aisé on obtient que ces surfaces sont engendrées par les points

$$\begin{aligned}\Omega_{+1} &= \tau_1\{(t_1 + t_2)\overline{[A_1A_3] + [A_2A_4] + 2[A_1A_2]} + \\ &+ (z_1 + z_2)\overline{[A_1A_3] - [A_2A_4]}\} = \tau_1\{(t_1 + t_2 + z_1 + z_2)[A_1A_3] + \\ &+ (t_1 + t_2 - z_1 - z_2)[A_2A_4] + 2(t_1 + t_2)[A_1A_2]\}, \quad \tau_1 \neq 0 \quad \text{arb.}\end{aligned} \tag{6.1}$$

et

$$\begin{aligned}\Omega_{-1} &= \tau_{-1}\{(t_1 - t_2)\overline{[A_1A_3] + [A_2A_4] - 2[A_1A_2]} + \\ &+ (z_1 - z_2)\overline{[A_1A_3] - [A_2A_4]}\} = \tau_{-1}\{(t_1 - t_2 + z_1 - z_2)[A_1A_3] + \\ &+ (t_1 - t_2 - z_1 + z_2)[A_2A_4] - 2(t_1 - t_2)[A_1A_2]\}, \quad \tau_{-1} \neq 0 \quad \text{arb.}\end{aligned} \tag{6.2}$$

Au Mémoire [3] on a déterminé les éléments linéaires projectifs des surfaces focales de L sous la forme ([3], (1.10), (1.11))

$$\frac{+ (z_1 + z_2 - t_1 - t_2)(\omega_1 + \omega_2)^3 + (z_1 - z_2 - t_1 + t_2)(\omega_1 - \omega_2)^3}{4(\omega_1^2 - \omega_2^2)} \tag{6.3}$$

pour la surface (A_1), et

$$(6.4)\qquad \frac{-(z_1+z_2+t_1+t_2)(\omega_1+\omega_2)^3-(z_1-z_2+t_1-t_2)(\omega_1-\omega_2)^3}{4(\omega_1^2-\omega_2^2)}$$

pour la surface (A_2).

La condition nécessaire et suffisante pour que le point Ω_{+1} ou Ω_{-1} soit un K-point est

$$(6.5)\qquad (t_1+t_2)^2-(z_1+z_2)^2=0 \quad ou \quad (t_1-t_2)^2-(z_1-z_2)^2=0\,.$$

Si p. ex. la surface (A_1) ou (A_2) est reglée et ses génératrices sont déterminées par l'équation différentielle $\omega_1+\omega_2=0$, alors d'après (6.3) ou (6.4) il résulte

$$(6.6)\qquad z_1-z_2=t_1-t_2 \quad \text{ou} \quad z_1-z_2=-(t_1-t_2)\,,$$

et inversement; de (6.2) on obtient, sous la supposition (6.6),

$$(6.7)\qquad \Omega_{-1}=(.)([A_1A_3]-[A_1A_2]) \quad \text{ou} \quad \Omega_{-1}=(.)([A_2A_4]-[A_1A_2])$$

de sorte que le point Ω_{-1} est un K-point et la surface développable correspondant aux courbes $\omega_1+\omega_2=0$ du réseau est un cône. De la même façon on obtient les résultats analogues lorsque les courbes $\omega_1-\omega_2=0$ sont droites. On a alors: *La condition nécessaire et suffisante pour qu'une (et seulement une) des nappes focales de la congruence L dont les génératrices sont les courbes $\omega_1\pm\omega_2=0$ soit réglée, est: la transformée de Laplace $(\Omega_{\pm1})$ est située sur la K-quadrique et elle dégenère en une courbe de la manière de Laplace.*

Les transformées de Laplace (Ω_{+1}) et (Ω_{-1}) ne peuvent pas dégénerer en un point; les espaces tangents des surfaces (Ω_{+1}) et (Ω_{-1}) ne sont pas tangents à la K-quadrique. On a p. ex.:

$$(6.8)\qquad \mathrm{d}\Omega_{+1}=\tau_1\{[\mathrm{d}t_1+\mathrm{d}t_2+2(z_1+z_2)(t_1\omega_1+t_2\omega_2)([A_1A_3]+[A_2A_4]+ \\ +2[A_1A_2])+[\mathrm{d}z_1+\mathrm{d}z_2+(t_1+t_2)(t_1\omega_1+t_2\omega_2)]([A_1A_3]-[A_2A_4])+ \\ +2(t_1+t_2)(\omega_2-\omega_1)([A_1A_4]+[A_2A_3]+\frac{\mathrm{d}\tau_1}{\tau_1}\Omega_{+1}\,;$$

pour que le point Ω_{+1} soit fixe on doit avoir nécessairement $t_1+t_2=0$, ce qui est en contradiction avec la supposition $t_1^2-t_2^2\neq 0$. On peut exprimer le point général de l'espace tangent à la surface (Ω_1) par la formule

$$(6.9)\qquad X=a([A_1A_3]+[A_2A_4]+2[A_1A_2])+b([A_1A_3]-[A_2A_4])+ \\ +c([A_1A_4]+[A_2A_3])\,;$$

la condition nécessaire et suffisante pour que le point (6.9) soit situé sur la K-quadrique est

$$(6.10)\qquad X\,.\,X=a^2-b^2+c^2=0\,;$$

mais la conique (6.10) n'est pas singulière et alors les plans tangents à la surface (Ω_{+1}) ne sont pas tangents à la K-quadrique; il en est d'une manière analogue pour la surface (Ω_{-1}).

Les points Ω_{+1} et Ω_{-1} sont conjugués par rapport à la K-quadrique si et seulement si on a $(t_1^2 - t_2^2 \neq 0)$

$$(6.11) \qquad (t_1^2 - t_2^2) - (z_1^2 - z_2^2) = 0\,,$$

ou

$$(6.12) \qquad \frac{t_1 - t_2}{z_1 - z_2} = \frac{z_1 + z_2}{t_1 + t_2} = k\,, \quad k \neq 0 \quad \text{arb.}$$

Si on a $k = 1$ ou bien $k = -1$, la surface focale (A_1), ou (A_2) respectivement, est une quadrique, comme on voit de (6.3) ou (6.4).

Le point Ω est conjugué au point Ω_{+1} ou Ω_{-1} par rapport à la K-quadrique si et seulement si $(t_1^2 - t_2^2 \neq 0)$

$$(6.13) \qquad z_1 + z_2 \doteq 0 \quad ou \quad z_1 - z_2 = 0\,.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le point Ω soit conjugué en même temps aux deux points Ω_{+1} et Ω_{-1} par rapport à la K-quadrique est: la surface (Ω) représente dans l'espace de Klein une congruence D $(z_1 = z_2 = 0)$, c.-à-d. une congruence qui réalise l'applicabilité projective des deux nappes focales (cf. [3], chap. 5, [4], chap. 11).

Vu les relations (6.5) et (6.13), on voit que *les congruences déterminées par la relation* (6.13_1) *ou* (6.13_2) *et qui ne sont pas de Segre, ne peuvent pas posséder une quadrique pour leur surface focale. Si une des surfaces focales de la congruence L du type* (6.13) *est une quadrique, alors nécessairement les deux surfaces focales sont reglées*, comme il résulte de (6.3) et (6.4).

Notons encore que dans toutes les considérations précédentes la dualisation de la congruence L doit être déformation projective demi-singulière, c.-à-d. on a $t_1 \neq 0 = t_2$ ou $t_1 = 0 \neq t_2$.

Littérature

[1] *E. Čech:* Transformations développables des congruences des droites, Чехосл. мат. журнал, *6 (81)*, 1956, 260—286.

[2] *E. Čech:* Déformation projective des congruences *W*, Чехосл. мат. журнал, *6 (81)*, 1956, 401—414.

[3] *E. Čech:* Compléments au mémoire: Déformation projective des congruences *W*, Чехосл. мат. журнал, *9 (84)*, 1959, 289—296.

[4] *С. П. Фиников:* Теория конгруэнций, Москва, 1950.

[5] *V. Horák:* Theorie der Torsen des Kleinschen fünfdimensionalen projektiven Raumes und ihre Applikation auf Segreschen *W*-Kongruenzen des dreidimensionalen projektiven Raumes, Чехосл. мат. журнал *9 (84)*, 1959, 590—628.

[6] *V. Horák:* Projektive Deformation der Segreschen *W*-Kongruenzen und ihre Abbildung in den Kleinschen fünfdimensionalen Raum, Чехосл. мат. журнал, *10 (85)*, 1960, 551—595.

[7] *C. Segre:* Le congruenze rettilinee *W* aderenti a due superficie rigate. Accad. Reale delle Sc. di Torino, *42*, 1906—1907, 539—550.

Резюме

СОПРИКАСАЮЩИЕСЯ КОМПЛЕКСЫ КОНГРУЭНЦИЙ ПРЯМЫХ

ВЛАДИМИР ГОРАК (Vladimír Horák), Брно

В работе изучаются по методу подвижного репера Картана прямолинейные непараболические конгруэнции, допускающие линейный соприкасающийся комплекс, при помощи многообразий пятимерного пространства Клейна, точки которых являются вторичными образами линейных соприкасающихся комплексов. С точки зрения классификации прямолинейных непараболических конгруэнций согласно Э. Чеху (см. [1]) линейные соприкасающиеся комплексы прямых допускают конгруэнции типа I (конгруэнции с неразвертывающимися фокальными поверхностями), являющиеся конгруэнциями W, и конгруэнции типа IV (одна фокальная поверхность есть развертывающаяся поверхность, а другая вырождается в кривую). Многообразие вторичных образов соприкасающихся комплексов конгруэнций типа I и IV мы обозначаем соответственно через (Ω) и $({}^1\Omega)$.

Автор определяет четыре вида конгруэнций типа IV. Тип IV_1 (IV_3), соотв. IV_2 (IV_4): одна из фокальных поверхностей является поверхностью касательных пространственной кривой, соотв. конической поверхностью, а другая вырождается в кривую; притом соприкасающиеся плоскости фокальной кривой в точках пересечения с касательными плоскостями развертывающейся фокальной поверхности не проходят (проходят) через соответственные точки ребра возврата развертывающейся фокальной поверхности, соотв. не проходят (проходят) через вершину конической фокальной поверхности. В случае типа IV_4 фокальная кривая является плоской.

Для конгруэнций типа IV доказываются следующие теоремы:

I. *Конгруэнции типа* IV_1 (IV_2) *существуют и зависят от* 4 (3) *функций одного переменного. Многообразие* $({}^1\Omega)$ *является линейчатой поверхностью для конгруэнций этих типов и только для них; точки одной и той же прямой многообразия* $({}^1\Omega)$ *являются вторичными образами соприкасающихся комплексов лучей конгруэнции, имеющих общий фокус на фокальной кривой.*

II. *Конгруэнции типа* IV_3 (IV_4) *существуют и зависят от* 3 (2) *функций одного переменного. Многообразие* $({}^1\Omega)$ *вырождается в кривую, касательные к которой не являются касательными к гиперквадрике Клейна (К-квадрике), но соприкасающиеся пространства* $\bar{P}_2$ *являются касательными пространствами К-квадрики. Лучи конгруэнции, имеющие общий фокус на фокальной кривой, имеют и общий линейный соприкасающийся комплекс.*

Пусть (Φ) – клейновский образ конгруэнции L, которая является W. Если фокальные поверхности конгруэнции L – линейчатые поверхности, то мы на-

зовем ее *конгруэнцией Сегре* типа W. Для конгруэнций типа I доказываются следующие теоремы:

III. *Многообразие* (Ω) *является кривой, касательные прямые и соприкасающиеся плоскости которой не являются касательными к К-квадрике, если и только если* L *есть конгруэнция Сегре.*

IV. *Если* L *не является конгруенцией Сегре, то многообразие* (Ω) *представляет собой поверхность с сопряженной сетью, дифференциальное уравнение которой является в то же время дифференциальным уравнением асимптотических линий фокальных поверхностей конгруэнции* L.

V. *Поляритет относительно К-квадрики осуществляет соответствие* $(\Phi) \to (\Omega)$, *причем точка* Ω *является полюсом соприкасающегося пространства в точке* Φ *поверхности* (Φ). *Точе̌чное соответствие* $(\Omega) \to (\Phi)$ *осуществляется соприкасающимися и касательными пространствами поверхности* (Ω), *которые будут обязательно касательными к К-квадрике.*

В дальнейшем изучаются слои кривых на поверхности (Ω) и определяется геометрический смысл этих кривых для конгруэнции L. Отметим особо:

VI. *Каноническому разложению конгруэнции* L *относительно дуализации, как проективному изгибанию, отвечает слой кривых, касательные прямые и соприкасающиеся плоскости которых являются касательными к К-квадрике и определяют равным образом соответствие* $(\Omega) \to (\Phi)$. *Поверхности канонического разложения являются фокальными поверхностями некоторых параболических конгруэнций.*

Кривой на поверхности (Ω), которая не лежит в слое, соответствующем каноническому разложению, отвечает т. наз. касательная конгруэнция Сегре или касательная конгруэнция типа IV. Автор исследуем свойства этих касательных конгруэнций.

VII. *Если и только если одно из преобразований Лапласа поверхности* (Ω) *вырождается в кривую, которая лежит обязательно на К-квадрике, то в точности одна фокальная поверхность конгруэнции* L *будет линейчатой.*

VIII. *Если и только если точка* Ω *одновременно сопряжена относительно К-квадрики с обоими преобразованиями Лапласа* Ω_1 *и* Ω_{-1}, *то* L *будет конгруэнцией* D. (См. [3] и [4].)