Čestmír Vitner

# Дифференциальная геометрия кривых в центроевклидовых пространствах

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 12 (1962), No. 1, 119–143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100501

Чехословацкий математический журнал т. 12 (87) 1962, Прага

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ КРИВЫХ В ЦЕНТРОЕВКЛИДОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

ЧЕСТМИР ВИТНЕР (Čestmír Vitner), Прага

(Поступило в редакцию 1/VI 1960 г.)

Работа посвящается дифференциальной геометрии кривых в $n$-мерном центроевклидовом пространстве. Определяется сопровождающий ортонормальный $n$-эдр, для которого справедливы формулы Френе. Далее рассматриваются некоторые специальные параметризации, и доказывается основная теорема 2,1 о том, что кривая определеяется полностью своими специальными инвариантами индекса 1 и расстоянием от центра пространства. Указывается связь центроевклидова сопровождающего $n$-эдра с евклидовским сопровождающим $n$-эдром и приводится несколько замечаний о кривых с постоянными инвариантами. Далее исследуются изолированные исключительные точки на аналитических кривых. В пп 6 и 7 содержатся некоторые результаты специального характера.

## ВВЕДЕНИЕ

Пусть $E_n$ есть $n$-мерное действительное евклидово пространство, в котором задана фиксированная точка $O$, которую мы называем *центром* или *началом* этого пространства. Мы будем заниматься только такими свойствами, которые инвариантны при евклидовых движениях, сохраняющих точку $O$ (*центроевклидовы движения*). Такое пространство мы будем называть евклидовым пространством с фиксированным центром или же *центроевклидовым пространством* $E_n^C$.

В настоящей работе мы будем заниматься дифференциальной геометрией кривых в пространстве $E_n^C$. Кривая будет задана векторным уравнением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$, где $t$ пробегает некоторый интервал $I$, $\boldsymbol{r}$ — радиус-вектор точки кривой с началом в центре пространства $E_n^C$. Относительно функции $\boldsymbol{r}(t)$ мы будем большею частью предполагать, что она обладает непрерывными производными до порядка $n$ включительно, причем определитель $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}]$ отличен от нуля (штрихи обозначают производные по параметру $t$). Мы говорим, что все точки кривой являются общими.

Если мы будем в дальнейшем заниматься изолированными исключительными точками (для которых $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}] = 0$), то мы ограничимся аналитическими кривыми, т. е. кривыми, параметрические уравнения которых заданы при помощи аналитических функций.

## 1. СОПРОВОЖДАЮЩИЙ $n$-ЭДР И ИНВАРИАНТЫ

Как в обычном пространстве $E_n$, мы сопоставим кривой и здесь ортонормальный $n$-эдр, т. наз. сопровождающий $n$-эдр. Однако, мы начнем не с касательной, а с радиуса-вектора. Пользуясь известным ортонормировочным процессом Э. Шмидта, мы образуем из векторов $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}$ ортонормальный $n$-эдр ${}^t\boldsymbol{a}_0, {}^t\boldsymbol{a}_1, {}^t\boldsymbol{a}_2, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}$. Имеет место ${}^t\boldsymbol{a}_0 = \boldsymbol{r}/|\boldsymbol{r}|$ ($|\boldsymbol{r}|$ означает длину вектора), далее имеют место известные общие формулы линейной алгебры (см. [2]; положим $\boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{r}$)

$$(1,1) \qquad {}^t\boldsymbol{a}_k = \frac{{}^t\boldsymbol{A}_k}{\sqrt{{}^tB_{k-1}\,{}^tB_k}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1,$$

причем

$$(1,2) \qquad {}^t\boldsymbol{A}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r} \\ (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r}^{(k)} \end{vmatrix}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

$$(1,3) \qquad {}^tB_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{(k)}) \\ (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}^{(k)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)}) \end{vmatrix}$$

для

$$k = 0, 1, \ldots, n-1. \quad {}^tB_{-1} = 1.$$

Символы $(\boldsymbol{r}^{(i)}, \boldsymbol{r}^{(j)})$ означают скалярные произведения.

Дифференцируя векторы ${}^t\boldsymbol{a}_0, {}^t\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}$, мы получим векторы ${}^t\boldsymbol{a}_0', {}^t\boldsymbol{a}_1', \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}'$, которые, очевидно, можно выразить через векторы ${}^t\boldsymbol{a}_0, {}^t\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}$. В силу ортонормальности векторов ${}^t\boldsymbol{a}_0, {}^t\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}$ это представление имеет, аналогично случаю пространства $E_n$, вид

$$(1,4) \qquad \begin{aligned} {}^t\boldsymbol{a}_0' &= \phantom{-{}^t\omega_1{}^t\boldsymbol{a}_0 +{}} {}^t\omega_1{}^t\boldsymbol{a}_1, \\ {}^t\boldsymbol{a}_1' &= -{}^t\omega_1{}^t\boldsymbol{a}_0 + {}^t\omega_2{}^t\boldsymbol{a}_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^t\boldsymbol{a}_{k-1}' &= -{}^t\omega_{k-1}{}^t\boldsymbol{a}_{k-2} + {}^t\omega_k{}^t\boldsymbol{a}_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}' &= -{}^t\omega_{n-1}{}^t\boldsymbol{a}_{n-2}. \end{aligned}$$

Эти формулы аналогичны формулам Френе, однако содержат общий параметр $t$, который не обязательно является дугой. Для величин ${}^t\omega_1, \ldots, {}^t\omega_{n-1}$ справедливи формулы явного вида, аналогичные тем, которые в случае $E_n$ и, более общо, в случае римановых пространств и для дуги в качестве параметра, привел В. Бляшке, см. [1]. Справедлива

**Теорема 1.1.** *Для* $\omega_k$ *имеют место формулы*

$$ {}^t\omega_k = \frac{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_k}}{{}^tB_{k-1}}, \tag{1,5} $$

*то есть, в частности,*

$$ {}^t\omega_1 = \frac{\sqrt{{}^tB_1}}{{}^tB_0}, \quad {}^t\omega_2 = \frac{\sqrt{{}^tB_0\,{}^tB_2}}{{}^tB_1}. $$

Доказательство. Эти формулы можно доказать по аналогии с соответствующими формулами в пространствах Римана. Однако, так как в первоначальном доказательстве Бляшке имеется ошибка, мы дадим здесь собственное доказательство, которое можно модифицировать и для случая пространств Римана.

Из формул (1,4) видно, что ${}^t\omega_k = ({}^t\boldsymbol{a}'_{k-1}, {}^t\boldsymbol{a}_k)$. Для производной ${}^t\boldsymbol{a}'_{k-1}$ имеет, очевидно, в силу (1,2) место

$$ {}^t\boldsymbol{a}'_{k-1} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_{k-1}}}\,{}^t\boldsymbol{A}_{k-1} + \frac{1}{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_{k-1}}}\frac{\mathrm{d}\,{}^t\boldsymbol{A}_{k-1}}{\mathrm{d}t}, $$

причем

$$ \frac{\mathrm{d}\,{}^t\boldsymbol{A}_{k-1}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C_0\boldsymbol{r} + C_1\boldsymbol{r}' + \ldots + C_{k-2}\boldsymbol{r}^{(k-2)} + {}^tB_{k-2}\boldsymbol{r}^{(k-1)}\right) = $$
$$ = \left(D_0\boldsymbol{r} + D_1\boldsymbol{r}' + \ldots + D_{k-1}\boldsymbol{r}^{(k-1)} + {}^tB_{k-2}\boldsymbol{r}^{(k)}\right), $$

где $C_0, \ldots, C_{k-2}$, $D_0, \ldots, D_{k-1}$ – некоторые коэффициенты, вид которых не имеет для нас значения. Вектор ${}^t\boldsymbol{a}_k$ перпендикулярен не только векторам ${}^t\boldsymbol{a}_0, {}^t\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{k-1}$, но также и векторам $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(k-1)}$. Следовательно, в скалярном произведении $({}^t\boldsymbol{a}'_{k-1}, {}^t\boldsymbol{a}_k)$ будет лишь один ненулевой член:

$$ ({}^t\boldsymbol{a}'_{k-1}, {}^t\boldsymbol{a}_k) = \frac{{}^tB_{k-2}(\boldsymbol{r}^{(k)}, {}^t\boldsymbol{a}_k)}{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_{k-1}}}. $$

Подставив еще значение ${}^t\boldsymbol{a}_k$ из (1,1)

$$ \frac{1}{\sqrt{{}^tB_{k-1}\,{}^tB_k}}\begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), & \ldots, & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}), & \ldots, & (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r}^{(k)} \end{vmatrix}, $$

мы получим после скалярного перемножения

$$ ({}^t\boldsymbol{a}'_{k-1}, {}^t\boldsymbol{a}_k) = \frac{{}^tB_{k-2}}{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_{k-1}}\sqrt{{}^tB_{k-1}\,{}^tB_k}}\begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), & \ldots, & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{(k)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}). & \ldots, & (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)}) \end{vmatrix} = $$
$$ = \frac{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_k}}{{}^tB_{k-1}}, \quad \text{ч. т. д.} $$

Замечание 1,1. Очевидно, ${}^t\omega_k > 0$.

Обратим теперь внимание на то, как изменяются векторы ${}^t\boldsymbol{a}_k$ и величины ${}^t\omega_k$ при преобразовании параметра $t = t(\tau)$ при $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \neq 0$. Аналогично величинам ${}^t\boldsymbol{A}_k$, ${}^tB_k$, ${}^t\boldsymbol{a}_k$, ${}^t\omega_k$, введенным при параметре $t$, введем теперь при параметре $\tau$ величины ${}^\tau A_k$, ${}^\tau B_k$, ${}^\tau\boldsymbol{a}_k$, ${}^\tau\omega_k$. Тогда будет справедлива

**Теорема 1,2.** *При преобразовании параметра* $t = t(\tau)$, *причем* $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau \neq 0$, *для* ${}^t\omega_k$ и ${}^t\boldsymbol{a}_k$ *имеют место формулы*

$$ {}^t\boldsymbol{a}_k = \left(\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^k {}^\tau\boldsymbol{a}_k\,, \tag{1,6}$$

$$ {}^t\omega_k = {}^\tau\omega_k\left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right|. \tag{1,7}$$

Доказательство. Очевидно $\dfrac{\mathrm{d}^i\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^i} = \dfrac{\mathrm{d}^i\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^i}\left(\dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^i + \sum\limits_{j=1}^{i-1}\alpha_j\dfrac{\mathrm{d}^j\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\tau^j}$.

Подставив в (1,2) и (1,3), мы получим (отбрасывая нулевые члены), очевидно

$$ {}^t\boldsymbol{A}_k = {}^\tau\boldsymbol{A}_k\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^{2[(1+2+\ldots+(k-1)]+k}, \quad {}^tB_k = {}^\tau B_k\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^{2(1+2+\ldots+k)}. $$

Подставляя эти соотношения в формулы (1,1) и (1,5), мы получим после несложных выкладок формулы (1,6) и (1,7), ч. т. д.

Формулы (1,7) можно переписать в виде

$$ {}^t\omega_k\mathrm{d}t = \left(\operatorname{sgn}\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right){}^\tau\omega_k\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{1,8}$$

который легко запомнить.

Мы видим, что поскольку ориентация на кривой не менятеся, величины ${}^t\boldsymbol{a}_k$, ${}^t\omega_k\,\mathrm{d}t$ инвариантны при преобразовании параметров на кривой. Инвариантность по отношению к центроевклидовым движениям непосредственно следует из построения указанных величин. Индекс $t$ у векторов ${}^t\boldsymbol{a}_k$ мы будем в дальнейшем опускать. $n$-эдр $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ будем называть сопровождающим $n$-эдром кривой. Теперь справедлива еще

**Теорема 1,3.** *Если обозначить через* $\varrho$ *расстояние точки кривой от начала пространства, то имеют место формулы*

$$ \varrho^{k+1}\,.\,{}^t\omega_1^k\,.\,{}^t\omega_2^{k-1}\,.\,\ldots\,.\,{}^t\omega_k = B_k^{\frac{1}{2}}\,, \tag{1,9}$$

*где* $k = 1, 2, \ldots, n-1$. *Для* $k = n-1$ *имеет еще место равенство*

$$ \varrho^n\,.\,{}^t\omega_1^{n-1}\,.\,{}^t\omega_2^{n-2}\,.\,\ldots\,.\,{}^t\omega_{n-1} = |[\boldsymbol{r}, r', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}]|\,. \tag{1,10}$$

Доказательство. По методу математической индукции из (1,5) можно вывести формулы

$$ {}^t\omega_1{}^t\omega_2\ldots{}^t\omega_k = \frac{B_k^{\frac{1}{2}}}{B_k^{\frac{1}{2}}B_{k-1}^{\frac{1}{2}}}\,. \tag{1,11}$$

Учитывая соотношение $B_0 = (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}) = \varrho^2$, из (1,11) нетрудно получить

$$(1,12) \qquad \varrho\,{}^t\omega_1{}^t\omega_2 \ldots {}^t\omega_k = \frac{B_k^{\frac{1}{2}}}{B_{k-1}^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Используя формулу (1,12), нетрудно вывести по индукции формулу (1,9). Формулу (1,10) получим из (1,9) для $k = n - 1$, учитывая равенство $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}] = B_{n-1}$. Теорема доказана.

Замечание 1,2. До сих пор мы предполагали, что векторы $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}$ линейно независимы. Допустим теперь, что линейно независимы лишь векторы $\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(s-1)}$, $1 < s - 1 < n - 1$, а вектор $\boldsymbol{r}^{(s)}$ уже от них линейно зависит. Пусть это имеет место для всех $t$. Тогда можно убедиться, что кривая лежит в линейном подпространстве размерности $s$, которое проходит через центр пространства. Теория этих кривых, очевидно, сводится к теории этих кривых в центроевклидовом $s$-мерном пространстве. Сопровождающий $s$-эдр этих кривых в $E_n^C$ мы и здесь получим при помощи формул (1,1), но конечно только для $k = 0, 1, \ldots, s - 1$. Точно также выражения для ${}^t\omega_k$ определяются при помощи первых $s$ формул Френе (1,4), в которых, конечно, $s$-я строка сводится к ${}^t\boldsymbol{a}_{s-1} = -{}^t\omega_{s-1}{}^t\boldsymbol{a}_{s-2}$. Для ${}^t\omega_k$ справедлива и здесь формула (1,5) для $k = 1, \ldots, s - 1$. Формула (1,5) имеет смысл и для $k = s$, причем, очевидно, ${}^t\omega_s = 0$.

Замечание 1,3. При определении векторов ${}^t\boldsymbol{a}_k$ мы исходили от вектора $\boldsymbol{r}(t)$ и его первых $k$ производных. Однако, ввиду характера использованного процесса ортонормирования, можно исходить от вектора $\boldsymbol{a}_0(t)$ и его первых $k$ производных. Для вычисления векторов ${}^t\boldsymbol{a}_k$ и выражений ${}^t\omega_k$ можно поэтому использовать формулы, аналогичные формулам (1,1), (1,2), (1,3) и (1,5), с той разницей, что в них вместо $\boldsymbol{r}$ всюду напишем $\boldsymbol{a}_0$. Если использовать вектор $\boldsymbol{a}_0(t)$ в качестве радиуса-вектора кривой с началом в центре пространства, то мы видим, что кривые $\boldsymbol{r}(t)$ и $\boldsymbol{a}_0(t)$ имеют в соответственных точках, лежащих на одной и той же полупрямой, исходящей из центра пространства, и соответствующих одинаковым значениям параметра, одни и те же сопровождающие $n$-эдры, соответственно $s$-эдры, и одинаковые значения величин ${}^t\omega_k$ при общей параметризации $t$.

## 2. СПЕЦИАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРИЗАЦИИ

На кривой в пространстве $E_n^C$ можно различными способами ввести специальный параметр, имеющий непосредственное геометрическое значение. Так, в качестве параметра можно взять, напр., эквиаффинную дугу или эквицентроаффинную дугу или же обычную евклидову дугу. В зависимости от этого мы тогда получаем различные специальные инварианты ${}^t\omega_1, \ldots, {}^t\omega_{n-1}$. Векторы ${}^t\boldsymbol{a}_0, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}$ остаются притом, очевидно, без изменения (измениться может только ориентация). На первый взгляд представляется естественным взять в качестве специального параметра евклидову дугу (далее коротко дугу $s$), которая является специальным параметром геометрии, по своим свойствам наиболее близкой к центроевклидовой геометрии.

Исследуя этот вопрос подробнее, мы заметим, что помимо инвариантов ${}^s\omega_1, \ldots, {}^s\omega_{n-1}$ у нас имеется еще инвариант $\varrho = |\boldsymbol{r}|$, который является в известном смысле простейшим инвариантом и который играет при построении кривой важную роль. Тогда мы получаем вместо ожидаемых $n - 1$ инвариантов в общем $n$ инвариантов; эти последние связаны, конечно, условием

$$\varrho'^2 + \varrho^2\, {}^s\omega_1^2 = 1 \tag{2,1}$$

выражающим то обстоятельство, что $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}s$ – единичный вектор.

Часто будет, очевидно, более выгодным взять какой-нубудь другой специальный параметр. Это можно сделать различными способами. Например, можно в качестве параметра взять прямо расстояние от начала $\varrho$, поскольку, конечно, кривая не лежит на гиперсфере. Можно также выбрать специальный параметр так, что нормализируем величину ${}^\tau\omega_k$ путем такого выбора параметризации $\tau$, чтобы при фиксированном $i$ имело место равенство

$$ {}^\tau\omega_i = 1\,. \tag{2,2}$$

Рассмотрим этот второй способ несколько подробнее. Известно, что имеет место

$$\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t} = \pm\frac{{}^t\omega_i}{{}^\tau\omega_i} = \pm\, {}^t\omega_i\,. \tag{2,3}$$

Интегрируя, получаем

$$\tau = \pm\int_{t_0}^{t} {}^t\omega_i\,\mathrm{d}t + \tau_0\,. \tag{2,4}$$

Мы видим, что условием ${}^\tau\omega_i = 1$ специальный параметр определяется вплоть до начального положения и ориентации. Такие специальные параметры мы будем называть *специальными параметрами индекса i,* где $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Тогда из формул (1,7) и (2,3) следует для соответствующих инвариантов индекса $i$

$$ {}^\tau\omega_k = \frac{{}^t\omega_k}{{}^t\omega_i}\,. \tag{2,5}$$

В дальнейшем мы ограничимся *специальным параметром индекса 1,* который обозначим через $\varphi$. Формула (2,5) перейдет в ${}^\varphi\omega_k = {}^t\omega_k/{}^t\omega_1$ или, более подробно, с учетом (1,5)

$$ {}^\varphi\omega_k = \frac{{}^t\omega_k}{{}^t\omega_1} = \frac{\sqrt{{}^tB_{k-2}\,{}^tB_k}\,{}^tB_0}{{}^tB_{k-1}\sqrt{{}^tB_1}}\,. \tag{2,6}$$

Формулы Френе примут тогда специальный вид (штрих означает производную по специальному параметру $\varphi$ индекса 1):

$$
(2,7) \qquad \begin{aligned}
\boldsymbol{a}'_0 &= && \boldsymbol{a}_1\,,\\
\boldsymbol{a}'_1 &= -\boldsymbol{a}_0 && + {}^{\varphi}\omega_2\boldsymbol{a}_2\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
\boldsymbol{a}'_{k-1} &= -{}^{\varphi}\omega_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-2} && + {}^{\varphi}\omega_k\boldsymbol{a}_k\,,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots && \\
\boldsymbol{a}'_{n-2} &= -{}^{\varphi}\omega_{n-2}\boldsymbol{a}_{n-3} && + {}^{\varphi}\omega_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-1}\,,\\
\boldsymbol{a}'_{n-1} &= -{}^{\varphi}\omega_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-2}\,. &&
\end{aligned}
$$

Из первого уравнения (2,7) видно, что параметр $\varphi$ индекса 1 является евклидовой дугой на проекции кривой из центра пространства на единичную гиперсферу. Параметр $\varphi$ обладает еще одним важным свойством. Из замечания 1,3 следует, что кривая и ее проекция из центра пространства на единичную гиперсферу имеют одинаковые сопровождающие $s$-эдры и одинаковые инварианты ${}^{\varphi}\omega_k$. Отсюда следует, что кривые, лежащие на конусе с вершиной в начале пространства, имеют в точках на одной и той же образующей конуса одинаковые инварианты ${}^{\varphi}\omega_k$. Последнее свойство безусловно не имеет места в общем случае для инвариантов ${}^{\tau}\omega_k$ при другой специальной параметризации $\tau$. Параметр $\varphi$ мы будем называть *центроевклидовой дугой*, инварианты же ${}^{\varphi}\omega_k$ — *центроевклидовыми кривизнами.*

Параметры $\varphi$, $\varrho$ и $s$ связаны следующим основным соотношением

$$
(2,8) \qquad \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}\varrho^2 + \varrho^2\,\mathrm{d}\varphi^2\,.
$$

Для доказательства (2,8) продифференцируем уравнение $\boldsymbol{r} = \varrho\boldsymbol{a}_0$. Мы получим $\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}\varrho\boldsymbol{a}_0 + \varrho\,\mathrm{d}\boldsymbol{a}_0$. Отсюда скалярным умножением вектора $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ самого на себя мы получим соотношение (2,8).

Специальный параметр можно было бы также выбрать, например, при помощи условия, чтобы одна из величин ${}^{t}\omega_k$ равнялась прямо расстоянию $\varrho$ или его обратной величине. Снова мы получили бы только $n-1$ существенных инвариантов.

Если взять в качестве параметра последний из упомянутых параметров или специальный параметр индекса $k$ или расстояние $\varrho$ — всегда можно показать, что соответствующими инвариантами (присоединив к ним в случае параметра индекса $k$ еще инвариант $\varrho$) кривая определяется однозначно вплоть до центроевклидовых движений. Здесь мы ограничимся случаем центроевклидовой дуги. Справедлива

**Теорема 2,1.** *Пусть даны функции $\varrho > 0$, $\omega_2 > 0, \dots, \omega_{n-1} > 0$ переменного $\varphi$, обладающие непрерывными производными порядка $n$. Тогда существует кривая, для которой $\varphi$ — центроевклидова дуга, $\varrho$ — расстояние от начала, а функции $\omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ — центроевклидовы кривизны. Если в какой-нибудь точке соответствующей параметру $\varphi_0$, выбрать произвольно сопровождающий $n$-эдр (должно, конечно, быть $\boldsymbol{a}_0(\varphi_0) = \boldsymbol{r}(\varphi_0)/|\boldsymbol{r}(\varphi_0)|$, то кривая будет задана однозначно.*

Доказательство. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (2,7), в которой мы напишем $\omega_k$ вместо ${}^{\varphi}\omega_k$. Подобно тому, как это принято при доказательстве аналогичных теорем в евклидовой геометрии, можно показать, что при выбранных начальных условиях система имеет единственное решение $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, образующее ортонормированный $n$-эдр. Рассмотрим теперь кривую

$$\boldsymbol{r} = \varrho \boldsymbol{a}_0 , \tag{2,9}$$

$\boldsymbol{a}_0$ – единичный вектор в направлении радиуса-вектора и, следовательно, $\varrho$ является расстоянием точки кривой от начала пространства. Как только мы докажем, что векторы $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$, полученные нами в результате решения системы (2,7), составляют сопровождающий $n$-эдр кривой (2,9), из системы (2,7) также видно, что функции $\omega_2, \ldots, \omega_{n-1}$ являются центроевклидовыми кривизнами кривой (2,9).

Для того, чтобы доказать, что $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ являются сопровождающим $n$-эдром кривой (2,9), вычислим определители ${}^{\varphi}B_k$, ${}^{\varphi}\boldsymbol{A}_k$ и с их помощью по формулам (1,1) сопровождающий $n$-эдр $\{{}^{\varphi}\boldsymbol{a}_k\}$.

По уравнениям (2,7) и согласно (2,9) будет, очевидно, $\boldsymbol{r}^{(i)} = \ldots + \varrho\omega_1\omega_2 \ldots \ldots \omega_i \boldsymbol{a}_i$ для $i = 1, \ldots, n-1$, где точками обозначены члены, содержащие только векторы $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{i-1}$. Для упрощения обозначений мы использовали $\omega_1 = 1$.

Опустив нулевые члены, мы можем переписать определитель ${}^{\varphi}B_k$ в виде:

$$ {}^{\varphi}B_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{(k)}) \\ (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}^{(k)}) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k)}) \end{vmatrix} = \tag{2,10}$$

$$= \begin{vmatrix} (\varrho\boldsymbol{a}_0, \varrho\boldsymbol{a}_0), & (\varrho\boldsymbol{a}_0, \varrho\omega_1\boldsymbol{a}_1), & \ldots, (\varrho\boldsymbol{a}_0, \varrho\omega_1 \ldots \omega_k\boldsymbol{a}_k) \\ (\varrho\omega_1\boldsymbol{a}_1, \varrho\boldsymbol{a}_0), & (\varrho\omega_1\boldsymbol{a}_1, \varrho\omega_1\boldsymbol{a}_1), & \ldots, (\varrho\omega_1\boldsymbol{a}_1, \varrho\omega_1 \ldots \omega_k\boldsymbol{a}_k) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ (\varrho\omega_1\omega_2 \ldots \omega_k\boldsymbol{a}_k, \varrho\boldsymbol{a}_0), & (\varrho\omega_1 \ldots \omega_k\boldsymbol{a}_k, \varrho\omega_1\boldsymbol{a}_1), & \ldots, (\varrho\omega_1 \ldots \omega_k\boldsymbol{a}_k, \varrho\omega_1 \ldots \omega_k\boldsymbol{a}_k) \end{vmatrix} =$$

$$= (\varrho^{k+1}\omega_1^k\omega_2^{k-1} \ldots \omega_k)^2 .$$

так как матрица $\|(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_k)\|$ является единичной.

Аналогично мы получим для ${}^{\varphi}\boldsymbol{A}_k$:

$$ {}^{\varphi}\boldsymbol{A}_k = \begin{vmatrix} (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r} \\ (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r}' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}), & (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}'), & \ldots, (\boldsymbol{r}^{(k)}, \boldsymbol{r}^{(k-1)}), & \boldsymbol{r}^{(k)} \end{vmatrix} = \tag{2,11}$$

$$= (\varrho^{k+1}\omega_1^k\omega_2^{k-1} \ldots \omega_k)(\varrho^k\omega_1^{k-1}\omega_2^{k-2} \ldots \omega_{k-1}) \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_0), (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1), \ldots, (\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_{k-1}), \boldsymbol{a}_0 \\ (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_0), (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1), \ldots, (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_{k-1}), \boldsymbol{a}_1 \\ \ldots \\ (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_0), (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_1), \ldots, (\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_{k-1}), \boldsymbol{a}_k \end{vmatrix} =$$

$$= \varrho^{2k+1}\omega_1^{2k-1}\omega_2^{2k-3} \ldots \omega_{k-1}^3\omega_k\boldsymbol{a}_k .$$

Из (2,11) и (2,10) нетрудно получить подстановкой в (1,1)

$$^{\varphi}\boldsymbol{a}_k = \frac{^{\varphi}\boldsymbol{A}_k}{\sqrt{^{\varphi}B_{k-1}{}^{\varphi}B_k}} = \frac{\varrho^{2k+1}\omega_1^{2k-1}\ldots\omega_{k-1}^3\omega_k}{\varrho^k\omega_1^{k-1}\ldots\omega_{k-1}\varrho^{k+1}\omega_1^k\ldots\omega_k}\,\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{a}_k\,.$$

Доказательство теоремы закончено.

Не представляло бы затруднений показать непосредственным вычислением, что $\omega_k$ тождественны с $^{\varphi}\omega_k$ из формул (1,5).

На основании этой теоремы мы имеем право считать уравнения

(2,12) $$\varrho = \varrho(\varphi),\ ^{\varphi}\omega_2 = {}^{\varphi}\omega_2(\varphi),\ \ldots,\ ^{\varphi}\omega_{n-1} = {}^{\varphi}\omega_{n-1} = {}^{\varphi}\omega_{n-1}(\varphi)$$

натуральными уравнениями кривых в центроевклидовом пространстве. Помимо этих натуральных уравнений можно получить и другие натуральные уравнения, если использовать другие специальные параметры, как было намечено в начале этого параграфа.

Замечание 2,1. Из доказательства теоремы 2,1 следует, что центроевклидовы кривизны $^{\varphi}\omega_2, \ldots, {}^{\varphi}\omega_{n-1}$ определяют однозначно, с точностью до центроевклидовых движений, проекцию кривой на единичную сферу или, что то же самое, конус с вершиной в центре пространства, на котором кривая лежит. На этом конусе, как мы знаем, центроевклидовы кривизны $^{\varphi}\omega_2, \ldots, {}^{\varphi}\omega_{n-1}$ всех кривых одинаковы.

Итак, если нужно построить кривую по ее натуральным уравнениям, построим по центроевклидовым кривизнам $^{\varphi}\omega_2. \ldots, {}^{\varphi}\omega_{n-1}$ конус, на котором кривая лежит, а потом при помощи последнего натурального уравнения $\varrho = \varrho(\varphi)$ уже без труда построим кривую. Для построения упомянутого конуса достаточно, очевидно, построить кривую, заданную натуральными уравнениями $\varrho = 1$, $^{\varphi}\omega_2 = {}^{\varphi}\omega_2(\varphi), \ldots, {}^{\varphi}\omega_{n-1} = {}^{\varphi}\omega_{n-1}(\varphi)$ на единичной гиперсфере.

Инварианты $^{\psi}\omega_k$ при какой-либо специальной параметризации $\psi$ имеют подобное же геометрическое значение, как и евклидовские кривизны в $E_n$ (см. [3]). Действительно, справедлива.

**Теорема 2,2.** *Пусть $\psi$ — некоторый специальный параметр, а $^{\psi}\omega_k$ — соответствующие ему инварианты. Пусть $\delta_k$ — острый угол, образованный подпространством $\{\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}\}$ в точке $\psi_0$ с вектором $\boldsymbol{a}_{k-1}$ в точке $\psi$. Тогда для инварианта $^{\psi}\omega_k$ имеет место соотношение $^{\psi}\omega_k = \lim\limits_{\psi\to\psi_0}[\delta_k/(\psi - \psi_0)]$.*

Доказательство формально шаг за шагом одинаково с доказательством аналогичной теоремы в $E_n$ (см. [3]). И здесь теорема справедлива также в том случае, когда точка $\psi_0$ — исключительная, если только все соответствующие ей инварианты $^{\psi}\omega_k$ конечны.

## 3. СВЯЗЬ ИНВАРИАНТОВ $\omega_k$ С КРИВИЗНАМИ $\kappa_k$

Для того, чтобы поставить величины $\varrho, {}^{t}\omega_1, \ldots, {}^{t}\omega_{n-1}$ в более тесную связь с кривизнами $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ кривой, рассматриваемой одновременно в $E_n^c$, возьмем в качестве специального параметра на кривой дугу $s$. Производные по дуге обозначим опять штрихами. Как известно, в $E_n$ имеет место $\boldsymbol{r}' = \mathbf{e}_0$ и справедливы формулы Френе

$$(3,1)\qquad \begin{aligned} \mathbf{e}_0' &= \kappa_1\mathbf{e}_1\,, \\ \mathbf{e}_1' &= -\kappa_1\mathbf{e}_0 + \kappa_2\mathbf{e}_2\,, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_k' &= -\kappa_k\mathbf{e}_{k-1} + \kappa_{k+1}\mathbf{e}_{k+1}\,, \\ &\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{e}_{n-1}' &= -\kappa_{n-1}\mathbf{e}_{n-2}\,, \end{aligned}$$

где $\mathbf{e}_0$ — касательная, $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-1}$ — евклидовы нормали, $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ — евклидовы кривизны.

Мы покажем, что инварианты ${}^s\omega_1, \dots, {}^s\omega_{n-1}$ можно довольно просто выразить с помощью кривизн $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-1}$ и с помощью углов $\alpha_i$, образованных радиусом-вектором кривой с нормалями $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{n-2}$. Справедлива

**Теорема 3,1.** *Для инвариантов ${}^s\omega_k$ справедливы формулы*

$$(3,2)\quad {}^s\omega_1 = \frac{|\sin\alpha_0|}{\varrho}\,,$$

$$(3,3)\quad {}^s\omega_2 = \kappa_1\,\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_0-\cos^2\alpha_1}}{\sin^2\alpha_0}\,,$$

$$(3,4)\quad {}^s\omega_k = \kappa_{k-1}\,\frac{\sqrt{(1-\cos^2\alpha_0-\dots-\cos^2\alpha_{k-3})(1-\cos^2\alpha_0-\dots-\cos^2\alpha_{k-1})}}{(1-\cos^2\alpha_0-\dots-\cos^2\alpha_{k-2})}\,,$$

*для* $k = 3, 4, \dots, n-1$.

Доказательство. При помощи формул (3,1) можно для производных $\boldsymbol{r}^{(k)}$ по дуге вывести формулы

$$(3,5)\qquad \boldsymbol{r}^{(k)} = \dots + \kappa_1\dots\kappa_{k-1}\mathbf{e}_{k-1}\,,\quad k = 2, \dots, n-1\,,$$

где опущенные члены содержат только векторы $\mathbf{e}_0, \dots, \mathbf{e}_{k-2}$.

Подставим производные (3,5) в формулу (1,3). Отбросив нулевые члены, получим после преобразований

$$(3,6)\quad {}^sB_k = (\varrho\kappa_1^{k-1}\kappa_2^{k-2}\dots\kappa_{k-1})^2 \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_0), & (\boldsymbol{a}_0,\mathbf{e}_0), & (\boldsymbol{a}_0,\mathbf{e}_1), & \dots, (\boldsymbol{a}_0,\mathbf{e}_{k-1}) \\ (\mathbf{e}_0,\boldsymbol{a}_0), & (\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_0), & (\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_1), & \dots, (\mathbf{e}_0,\mathbf{e}_{k-1}) \\ (\mathbf{e}_1,\boldsymbol{a}_0), & (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_0), & (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_1), & \dots, (\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_{k-1}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_{k-1},a_0), & (\mathbf{e}_{k-1},\mathbf{e}_0), & (\mathbf{e}_{k-1},\mathbf{e}_1), & \dots, (e_{k-1},\mathbf{e}_{k-1}) \end{vmatrix} =$$

$$= (\varrho\kappa_1^{k-1}\kappa_2^{k-2}\dots\kappa_{k-1})^2 \begin{vmatrix} (\boldsymbol{a}_0,\boldsymbol{a}_0), & (\boldsymbol{a}_0,\mathbf{e}_0), & (\boldsymbol{a}_0,\mathbf{e}_1), & \dots, (\boldsymbol{a}_0,\mathbf{e}_{k-1}) \\ (\mathbf{e}_0,\boldsymbol{a}_0), & 1, & 0, & \dots, 0 \\ (\mathbf{e}_1,\boldsymbol{a}_0), & 0, & 1, & \dots, 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\mathbf{e}_{k-1},\boldsymbol{a}_0), & 0, & 0, & \dots, 1 \end{vmatrix}.$$

Так как $(\boldsymbol{a}_0, \mathbf{e}_i) = \cos\alpha_i$, то после простых вычислений получим

$$(3,7) \qquad {}^sB_k = \left(\varrho\kappa_1^{k-1}\kappa_2^{k-2}\ldots\kappa_{k-1}\right)^2\left(1 - \cos^2\alpha_0 - \ldots - \cos^2\alpha_{k-1}\right).$$

Подставив (3,7) в (1,5), мы получим после несложных выкладок для $k = 3, 4, \ldots, n-1$ формулы (3,4).

В случае ${}^s\omega_1$ и ${}^s\omega_2$ мы получим более простым путем

$${}^s\omega_1 = \frac{\sqrt{{}^sB_1}}{{}^sB_0} = \frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_0}}{\varrho} = \frac{|\sin\alpha_0|}{\varrho}, \quad \text{т. е. } (3,2);$$

$${}^s\omega_2 = \frac{\sqrt{{}^sB_0{}^sB_2}}{{}^sB_1} = \kappa_1\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_0-\cos^2\alpha_1}}{1-\cos^2\alpha_0} = \kappa_1\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha_0-\cos^2\alpha_1}}{\sin^2\alpha_0},$$

т. е. (3,3).

Теорема доказана.

Замечание 3,1. Для кривизн ${}^\varphi\omega_k$ нетрудно получить согласно (2,5)

$$(3,8) \qquad {}^\varphi\omega_2 = \frac{\varrho\kappa_1\sqrt{1-\cos^2\alpha_0-\cos^2\alpha_1}}{\left(1-\cos^2\alpha_0\right)^{3/2}}.$$

Для ${}^\varphi\omega_k$, $k > 2$, будет

$$(3,9) \quad {}^\varphi\omega_k = \frac{\varrho\kappa_{k-1}\sqrt{\left(1-\cos^2\alpha_0-\ldots-\cos^2\alpha_{k-3}\right)\left(1-\cos^2\alpha_0-\ldots-\cos^2\alpha_{k-1}\right)}}{\left(1-\cos^2\alpha_0-\ldots-\cos^2\alpha_{k-2}\right)\sqrt{1-\cos^2\alpha_0}}.$$

**Теорема 3,2.** *Для векторов* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}$ *справедливы формулы*

$$(3,10) \quad \boldsymbol{a}_k = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\cos^2\alpha_0-\ldots-\cos^2\alpha_{k-1}\right)\left(1-\cos^2\alpha_0-\ldots-\cos^2\alpha_{k-2}\right)}}\cdot \begin{vmatrix} 1, \cos\alpha_0, & \ldots, \cos\alpha_{k-2}, & \boldsymbol{a}_0 \\ \cos\alpha_0, & 1, \ldots, 0, & \mathbf{e}_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \cos\alpha_{k-2}, & 0, \ldots, 1, & \mathbf{e}_{k-2} \\ \cos\alpha_{k-1}, & 0, \ldots, 0, & \mathbf{e}_{k-1} \end{vmatrix},$$

$$k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 3,1, можно доказать, что

$$(3,11) \qquad {}^s\boldsymbol{A}_k = \varrho^2\kappa_1^{2k-3}\kappa_2^{2k-5}\ldots\kappa_{k-1} \begin{vmatrix} 1, & (\boldsymbol{a}_0, \mathbf{e}_0), & \ldots, (\boldsymbol{a}_0, \mathbf{e}_{k-2}), & \boldsymbol{a}_0 \\ (\mathbf{e}_0, \boldsymbol{a}_0), & 1, & \ldots, 0, & \mathbf{e}_0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\mathbf{e}_{k-2}, \boldsymbol{a}_0), & 0, & \ldots, 1, & \mathbf{e}_{k-2} \\ (\mathbf{e}_{k-1}, \boldsymbol{a}_0), & 0, & \ldots, 0, & \mathbf{e}_{k-1} \end{vmatrix}.$$

Подставив из формул (3,11) и (3,7) в формулы (1,1), мы получим сразу же доказываемое утверждение.

Замечание 3,2. Так как основная группа $\mathscr{E}_n^c$ пространства $E_n^c$ является подгруппой основной группы $\mathscr{E}_n$ пространства $E_n$, то все свойства геометрии в $E_n$

являются также свойствами геометрии в $E_n^C$. Поэтому кривизны $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ могут быть представлены при помощи инвариантов $\varrho$, ${}^s\omega_1, \ldots, {}^s\omega_{n-1}$ и их производных. Эти соотношения можно было бы получить из формул для $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ (см. [1]), подставив в них выражения для $\boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(r)}$ с использованием формул Френе в $E_n^C$. В общем случае $n$-мерного пространства получаются соотношения довольно сложного вида.

## 4. ПОСТРОЕНИЕ КРИВЫХ ПО ИХ НАТУРАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ — КРИВЫЕ С ПОСТОЯННЫМИ ИНВАРИАНТАМИ

А. Если кривые заданы своими натуральными уравнениями, то при построении кривых (при какой угодно специальной параметризации) главную роль играет решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a}_0' &= {}^\tau\omega_1\boldsymbol{a}_1\,, \\ \boldsymbol{a}_1' &= -\,{}^\tau\omega_1\boldsymbol{a}_0 + {}^\tau\omega_2\boldsymbol{a}_2\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \boldsymbol{a}_{n-1}' &= -\,{}^\tau\omega_{n-1}\boldsymbol{a}_{n-2}\,. \end{aligned} \tag{4,1}$$

а) Если $\tau$ — специальный параметр индекса 1 (или другого индекса $k$), то кривая определяется уравнением $\boldsymbol{r} = \varrho\boldsymbol{a}_0$ ($\varrho$ должно быть тогда, как известно, дано).

б) Если $\tau$ — дуга $s$, то кривая опять определяется уравнением $\boldsymbol{r} = \varrho\boldsymbol{a}_0$. Притом $\varrho$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \varrho^2\,{}^s\omega_1^2 = 1\,. \tag{4,2}$$

в) Если $\tau$ — расстояние $\varrho$ от центра пространства $E_n^C$, то кривая опять определяется формулой $\boldsymbol{r} = \varrho\boldsymbol{a}_0$.

Все это разумеется само собой.

Система (4,1) играет решающую роль также при построении кривых по их кривизнам $\kappa_1 = {}^\tau\omega_1, \ldots, \kappa_{n-1} = {}^\tau\omega_{n-1}$ в евклидовой теории. Это обстоятельство можно с выгодой использовать при построении кривых по инвариантам ${}^\tau\omega_1, \ldots, {}^\tau\omega_{n-1}$ в центроевклидовой теории.

Системе (4,1) удовлетворяют нормали $\mathbf{e}_0 = \mathbf{t}$, $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{n-1}$. Если известна кривая $\boldsymbol{r}$ с кривизнами $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ в евклидовой теории, то для кривой $\boldsymbol{R}$ с инвариантами ${}^\tau\omega_1 = \kappa_1, \ldots, {}^\tau\omega_{n-1} = \kappa_{n-1}$ в центроевклидовой теории можно положить $\boldsymbol{a}_0 = \mathbf{t}$. Тогда $\boldsymbol{R}$ определяется смотря по геометрическому значению параметра $\tau$ согласно а), б) или в).

Б. К р и в ы е  с  п о с т о я н н ы м и  и н в а р и а н т а м и. Если при какой-либо параметризации имеет место ${}^t\omega_k = \text{konst.}$, то это значит, очевидно, что параметр $t$ связан со специальным параметром индекса $k$ соотношением $t = c_1\tau + c_2$. Мы будем коротко говорить, что параметры $t$ и $\tau$ пропорциональны.

Если теперь при параметризации $t$ кроме ${}^t\omega_k = \text{const.}$ имеет место и ${}^t\omega_l = \text{konst.}$, $k \neq l$, то это означает не только геометрическую характеризацию параметра $t$, но и геометрическую специализацию кривой: специальные параметры индекса $k$ и $l$ пропорциональны, другими словами, инвариант ${}^t\omega_k/{}^t\omega_l$ имеет постоянную величину. Если эта постоянная равна единице, то это значит, что специальный параметр индекса $k$ является также специальным параметром индекса $l$. Если пропорциональны параметры всех индексов, то это значит, что специальные инварианты $\omega_k$ при специальной параметризации любого индекса — постоянны.

Если является постоянным еще и инвариант $\varrho$, т. е. расстояние от центра пространства, то мы говорим о кривой *с постоянными центроевклидовскими кривизнами.*

Кроме этих кривых можно рассматривать еще кривые, для которых постоянны инварианты ${}^s\omega_k$. У таких кривых, очевидно, постоянны все инварианты ${}^\tau\omega_k$ при параметризации с помощью специального параметра любого индекса; тогда и дуга пропорциональна специальному параметру любого индекса. Однако, инвариант $\varrho$ не будет обязательно постоянным.

Аналогично можно рассматривать кривые с постоянными инвариантами ${}^\rho\omega_1, \ldots, {}^\rho\omega_{n-1}$.

Если нам уже известны кривые с постоянными инвариантами $\varrho, {}^\varphi\omega_2, \ldots, {}^\varphi\omega_{n-1}$, то мы можем, очевидно, решить систему (4,1) и согласно А б), в) можно определить кривые с постоянными инвариантами ${}^s\omega_1, \ldots, {}^s\omega_{n-1}$ или ${}^\rho\omega_1, \ldots, {}^\rho\omega_{n-1}$.

В. Обратим здесь внимание на одно интересное свойство кривых с постоянными центроевклидовыми кривизнами. Справедлива

**Теорема 4,1.** *В центроевклидовых пространствах нечетной размерности кривые с постоянными центроевклидовыми кривизнами $\varrho, {}^\varphi\omega_2, \ldots, {}^\varphi\omega_{n-1}$ можно погрузить в подходящую гиперплоскость.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно, очевидно, показать, что векторы $\boldsymbol{r}'(\varphi), \boldsymbol{r}''(\varphi), \ldots, \boldsymbol{r}^{(n)}(\varphi)$ линейно зависимы. Выразив эти векторы при помощи формул Френе (2,7), мы получим после несложных выкладок, что определитель из координат векторов $\boldsymbol{r}', \boldsymbol{r}'', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n)}$ по отношению к базису $\boldsymbol{a}_0, \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ равен определителю

$$\begin{vmatrix} 0 & * & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & * & \ldots & 0 & 0 \\ * & 0 & * & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & * & 0 & * & \ldots & * & 0 \\ * & 0 & * & 0 & \ldots & 0 & * \\ 0 & * & 0 & * & \ldots & * & 0 \end{vmatrix},$$

где звездочками обозначены члены, не равне обязательно нулю. (Нечетная размерность проявляется в том, что первый столбец начинается и заканчивается нулем.)

Этот определитель равен нулю. В этом можно убедиться последовательным разложением по первой, третьей и т. д., $(n-2)$-й строке (нумерация отвечает исходному определителю). Действительно, в конце концов мы получим определитель с нулевой последней строкой, чтд.

В пространствах четной размерности эта теорема не справедлива, в чем нетрудно убедиться уже у кривых в плоскости $E_2^C$.

Г. У кривых с постоянными евклидовыми кривизнами $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ еще не обязательно будут постоянными центроевклидовы инварианты. И наоборот, у кривых с постоянными инвариантами ${}^s\omega_1, \ldots, {}^s\omega_{n-1}$ или ${}^\rho\omega_1, \ldots, {}^\rho\omega_{n-1}$ не обязательно будут постоянными евклидовские кривизны $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$. Однако для инвариантов индекса 1 справедлива.

**Теорема 4,2.** *У кривых с постоянными кривизнами* $\varrho, {}^\varphi\omega_2, \ldots, {}^\varphi\omega_{n-1}$ *являются постоянными и кривизны* $\kappa_1, .., \kappa_{n-1}$.

Доказательство этого утверждения легко вытекает из формул для кривизн $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ (см. [3]), если в них подставить выражения для $\boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(r)}$ при помощи формул Френе для $\boldsymbol{a}_0, \ldots, \boldsymbol{a}_{n-1}$ при специальной параметризации индекса *1*.

## 5. ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ТОЧКИ НА КРИВЫХ В $E_n^C$

Займемся теперь исследованием исключительных точек на ориентированных кривых, т. е. точек, в которых $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}] = 0$. Притом мы будем предполагать, что кривая является аналитической и что исключительная точка — изолированная. Прежде всего нас будет интересовать, каким образом можно определить сопровождающий $n$-эдр и инварианты $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ в исключительной точке и как эти величины можно вычислить.

Подобно тому, как и в работе [3], можно показать, что в исследуемой точке существует $n$ линейно независимых производных $\boldsymbol{r}^{(\beta_0)}, \boldsymbol{r}^{(\beta_1)}, \ldots, \boldsymbol{r}^{(\beta_{n-1})}$ (в случае, если $\boldsymbol{r} \neq \boldsymbol{o}$, мы начинаем с $\boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{r}$), которые определены следующим образом: $\boldsymbol{r}^{(\beta_0)}$ есть первая ненулевая производная (мы допускаем и $\beta_0 = 0$). Производная $\boldsymbol{r}^{(\beta_i)}$ есть первая по порядку из производных, следующих за $\boldsymbol{r}^{(\beta_{i-1})}$, которая является линейно независимой от $\boldsymbol{r}^{(\beta_0)}, \ldots, \boldsymbol{r}^{(\beta_{i-1})}$.

Подобно тому, как и в [3], мы дадим в исключительной точке $t = 0$ определение нормалей $\boldsymbol{a}_k$ и инвариантов $\omega_k$ (при всех возможных специальных параметризациях) при помощи предельного перехода

$$\boldsymbol{a}_k(0) = \lim_{t \to 0+} \boldsymbol{a}_k(t)\,, \tag{5,1}$$

$$\omega_k(0) = \lim_{t \to 0+} \omega_k(t)\,. \tag{5,2}$$

Очевидно, можно предположить, что $t > 0$.

Из инвариантов $\omega_k$ мы будем рассматривать лишь инварианты ${}^{\varphi}\omega_k$ индекса 1, а в случае $\beta_0 \geqq 1$ еще инварианты ${}^{s}\omega_k$. При выводе формул для величин $\mathbf{a}_k(0)$ $\omega_k(0)$ можно поступать вполне аналогично тому, как и в случае исключительных точек на кривых в $E_n$ (см. [3]). Поэтому мы приведем лишь общий ход с частичными результатами; подробности читатель найдет в цитированной работе.

Для кривой в окрестности исключительной точки можно написать разложение

$$(5,3)\qquad \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0^{(\beta_0)}\left[\frac{t^{(\beta_0)}}{\beta_0!} + \mathbf{o}(t^{\beta_0})\right] + \mathbf{r}^{(\beta_1}\left[\frac{t^{\beta_1}}{\beta_1!} + \mathbf{o}(t^{(\beta_1)})\right] + \\ + \ldots + \mathbf{r}^{(\beta_k)}\frac{t^{\beta_k}}{\beta_k!} + \mathbf{o}(t^{\beta_k}).$$

Введем обозначения

$$(5,4)\qquad P_k = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_0^{(\beta_0)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_0)}), \ldots, (\mathbf{r}_0^{(\beta_0)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_k)}) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{r}_0^{(\beta_k)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_0)}), \ldots, (\mathbf{r}_0^{(\beta_k)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_k)}) \end{vmatrix},$$

$$(5,5)\qquad \mathbf{Q}_k = \begin{vmatrix} (\mathbf{r}_0^{(\beta_0)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_0)}), \ldots, (\mathbf{r}_0^{(\beta_0)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_{k-1})}), \mathbf{r}_0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\mathbf{r}_0^{(\beta_k)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_0)}), \ldots, (\mathbf{r}_0^{(\beta_k)}, \mathbf{r}_0^{(\beta_{k-1})}), \mathbf{r}_0^{(\beta_k)} \end{vmatrix}.$$

$V_k = V_k(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_k)$ есть определитель Вандермонда

$$(5,6)\qquad V_k = \begin{vmatrix} 1, & 1, \ldots, 1 \\ \beta_0, & \beta_1, \ldots, \beta_k \\ \ldots & \ldots\ldots \\ \beta_0^k, & \beta_1^k, \ldots, \beta_k^k \end{vmatrix}.$$

При помощи разложения (5,3) и его производных можно для ${}^{t}B_k$ и ${}^{t}\mathbf{A}_k$ вывести основные разложения

$$(5,7)\qquad {}^{t}B_k = \frac{{}^{t}P_k V_k^2(\beta_0, \ldots, \beta_k)}{\beta_0!^2\beta_1!^2 \ldots \beta_k!^2}\, t^{2\lambda_k} + \mathbf{o}(t^{2\lambda_k}),$$

$$(5,8)\qquad {}^{t}\mathbf{A}_k = \frac{{}^{t}\mathbf{Q}_k V_k(\beta_0, \ldots, \beta_k)\, V_{k-1}(\beta_0, \ldots, \beta_{k-1})}{\beta_0!^2 \ldots \beta_{k-1}!^2\beta_k!}\, t^{\lambda_k + \lambda_{k-1}} + \mathbf{o}(t^{\lambda_k + \lambda_{k-1}}),$$

где

$$(5,9)\qquad \lambda_k = \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_k - (1 + 2 + \ldots + k).$$

Подставляя разложения (5,7) в (1,5), мы получим для ${}^{t}\omega_k$, $k = 2, \ldots, n - 1$, учитывая еще, что $V_k = (\beta_k - \beta_0) \ldots (\beta_k - \beta_{k-1})\, V_{k-1}$ и $\lambda_{k-2} + \lambda_k - 2\lambda_{k-1} = \beta_k - \beta_{k-1} - 1$,

$$(5,10)\qquad {}^{t}\omega_k = \frac{\sqrt{P_{k-2}P_k}\,\beta_{k-1}!(\beta_k - \beta_0) \ldots (\beta_k - \beta_{k-1})}{P_{k-1}\beta_k!(\beta_{k-1} - \beta_0) \ldots (\beta_{k-1} - \beta_{k-2})}\, t^{\beta_k - \beta_{k-1} - 1} + \mathbf{o}(t^{\beta_k - \beta_{k-1} - 1}).$$

Для $k = 1$ тогда нетрудно получить

$$(5{,}11)\qquad {}^t\omega_1 = \frac{\sqrt{P_1}\beta_0!(\beta_1 - \beta_0)}{P_0\beta_1!}\, t^{\beta_1-\beta_0-1} + \mathbf{o}\left(t^{\beta_1-\beta_0-1}\right).$$

Для инвариантов индекса 1 имеет место, как известно, ${}^\varphi\omega_k = {}^t\omega_k/{}^t\omega_1$. Отсюда и согласно (5,10), (5,11) следует, наконец, разложение

(5,12)

$${}^\varphi\omega_k = \frac{\sqrt{P_{k-2}P_k}\, P_0\beta_{k-1}!\beta_1!(\beta_k - \beta_0)\dots(\beta_k - \beta_{k-1})}{P_{k-1}\sqrt{P_1}\beta_k!\beta_0!(\beta_1 - \beta_0)(\beta_{k-1} - \beta_0)\dots(\beta_{k-1} - \beta_{k-2})}\, t^{\beta_k-\beta_{k-1}-(\beta_1-\beta_0)} + \dots,$$

$k = 2, \dots, n - 1$. $P_i$ дано формулой (5,4). Из формулы (5,12) видно, что инвариант ${}^\varphi\omega_k$ будет конечным в случае, когда

$$(5{,}13)\qquad \beta_k - \beta_{k-1} \geqq \beta_1 - \beta_0\,.$$

${}^\varphi\omega_k$ будет конечным и ненулевым только в случае, когда

$$(5{,}14)\qquad \beta_k - \beta_{k-1} = \beta_1 - \beta_0\,.$$

Для сопровождающего $n$-эдра мы получим из формул (5,7), (5,8) и (1,1) без труда

$$(5{,}15)\qquad \mathbf{a}_k(0) = \frac{\mathbf{Q}_k}{\sqrt{P_{k-1}P_k}}\,,$$

где $P_i$, $\mathbf{Q}_k$ даны формулами (5,4), (5,5).

Итак, мы видим, что сопровождающий $n$-эдр является всегда определенным и из формул (5,15) следует, что его можно получить ортонормировочными процессом Э. Шмидта из векторов $\mathbf{r}_0^{(\beta_0)}, \dots, \mathbf{r}_0^{(\beta_{n-1})}$.

Сформулируем полученные результаты в компактном виде:

**Теорема 5,1.** *Для кривизн ${}^\varphi\omega_k, k = 2, \dots, n - 1$ в исключительной точке справедливы формулы*

$${}^\varphi\omega_k(0) = \frac{\sqrt{P_{k-2}P_k}P_0\beta_{k-1}!(\beta_k - \beta_0)\dots(\beta_k - \beta_{k-1})}{P_{k-1}\sqrt{P_1}\beta_k!\beta_0!(\beta_1 - \beta_0)(\beta_{k-1} - \beta_0)\dots(\beta_{k-1} - \beta_{k-2})} \lim_{t\to 0+} t^{\beta_k-\beta_{k-1}-(\beta_1-\beta_0)},$$

*$k = 2, \dots, n - 1$, где $P_k$ даны формулами* (5,4). *Инвариант будет конечным только в случае, когда $\beta_k - \beta_{k-1} \geqq \beta_1 - \beta_0$; конечным и ненулевым он будет только в случае, когда $\beta_k - \beta_{k-1} = \beta_1 - \beta_0$.*

*В исключительной точке существует сопровождающий $n$-эдр $\mathbf{a}_0(0), \mathbf{a}_1(0), \dots, \dots, \mathbf{a}_{n-1}(0)$, определяемый уравнениями*

$$\mathbf{a}_k(0) = \frac{\mathbf{Q}_k}{\sqrt{P_{k-1}P_k}}\,, \quad k = 0, 1, \dots, n - 1\,,$$

*где $P_k$ даны формулами* (5,4), *$\mathbf{Q}_k$ – формулами* (5,5). *Итак, векторы $\mathbf{a}_k(0)$ возникают путем ортонормировки из производных $\mathbf{r}_0^{(\beta_0)}, \dots, \mathbf{r}_0^{(\beta_{n-1})}$.*

Обратим еще внимание на случай, когда исключительная точка кривой является центром пространства $E_n^C$, то есть $\beta_0 \geqq 1$. Справедлива.

**Теорема 5,2.** *Если кривая проходит через центр пространства $E_n^C$, то в этой точке центроевклидов сопровождающий n-эдр совпадает с евклидовым.*

*Для инвариантов ${}^s\omega_k(0)$ в точке кривой, являющейся центром пространства $E_n^C$, справедливы формулы*

$$(5,16) \qquad {}^s\omega_k(0) = \frac{\beta_{k-1}}{\beta_k} \kappa_k(0)\,,$$

*где $\kappa_k$ — евклидовы кривизны в точке кривой* (см. [3]).

*Эта теорема справедлива независимо от того, является ли рассматриваемая точка с точки зрения евклидовой теории исключительной точкой, или нет.*

Доказательство. Положив $\beta_k = \alpha_{k+1}$, мы получим при обозначениях из работы [3] $\mathbf{Q}_k = \mathbf{T}_{k+1}$, $P_k = S_{k+1}$. Из (5,15) тогда получим

$$(5,17) \qquad \mathbf{a}_k(0) = \frac{\mathbf{T}_{k+1}}{\sqrt{S_k S_{k+1}}}\,.$$

Сравнивая этот результат с [3], мы видим, что определенные там нормали $\mathbf{e}_0(0), \ldots, \mathbf{e}_{n-1}(0)$ совпадают с векторами $\mathbf{a}_0(0), \ldots, \mathbf{a}_{n-1}(0)$, что и доказывает первую часть теоремы.

Для ${}^s\omega_k$ имеет, как известно, место соотнощение

$$(5,18) \qquad {}^s\omega_k = {}^t\omega_k \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\right| = \frac{{}^t\omega_k}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right)}}\,.$$

Для $\sqrt{(\mathbf{r}', \mathbf{r}')}$ нетрудно найти в случае $\beta_0 \geqq 1$

$$(5,19) \qquad \sqrt{(\mathbf{r}', \mathbf{r}')} = \frac{\sqrt{(\mathbf{r}^{(\beta_0)}, \mathbf{r}^{(\beta_0)})}}{(\beta_0 - 1)!} t^{\beta_0 - 1} + \ldots\,.$$

Введя снова обозначение $\beta_k = \alpha_{k+1}$ и пользуясь обозначениями из [3], мы получим

$$\sqrt{(\mathbf{r}', \mathbf{r}')} = \frac{\sqrt{S_1}}{(\alpha_1 - 1)!} t^{\alpha_1 - 1} + \ldots\,.$$

Из $P_k = S_{k+1}$ и согласно (5,10), (5,18), (5,19) получим

$$(5,20) \qquad {}^s\omega_k = \frac{\sqrt{S_{k-1}S_{k+1}}\,\alpha_k!\,(\alpha_1 - 1)!\,(\alpha_{k+1} - \alpha_1)\ldots(\alpha_{k+1} - \alpha_k)}{S_k\sqrt{S_1}\,\alpha_{k+1}!\,(\alpha_k - \alpha_1)\ldots(\alpha_k - \alpha_{k-1})} t^{\alpha_{k+1} - \alpha_k - \alpha_1} + \ldots\,.$$

Сравнением с [3] нетрудно получить формулу

$$(5{,}21) \qquad {}^s\omega_k(0) = \frac{\alpha_k}{\alpha_{k+1}} \kappa_k(0)\,,$$

то есть (5,16). Теорема доказана.

Из теоремы 5,2 следует тесная связь между евклидовой и центроевклидовой теориями в точке кривой, являющейся одновременно центром пространства $E_n^C$. Сопровождающие $n$-эдры евклидовой и центроевклидовой теории совпадают; инвариант ${}^s\omega_k(0)$ отличается от кривизны $\kappa_k$ лишь числовыми множителем. Поскольку исследуемая точка кривой (центр пространства $E_n^C$) не является с точки зрения евклидовой теории исключительной, нетрудно видеть, что инварианты ${}^s\omega_k(0)$ конечны и отличны от нуля и что

$$(5{,}22) \qquad {}^s\omega_k(0) = \frac{k}{k+1} \kappa_k(0)\,.$$

## 6. КРИВЫЕ В ПЛОСКОСТИ

Центроевклидова дуга у плоских кривых, очевидно, совпадает с евклидовой дугой проекции кривой из центра плоскости на единичную окружность. Следовательно, она совпадает и с амплитудой кривой в полярных координатах. Поэтому можно сформулировать теорему:

**Теорема 6,1.** *Если амплитуду $\varphi$ взять в качестве параметра на кривой в плоскости, то этот последний будет центроевклидовой дугой. Натуральное уравнение кривой сводится к ее уравнению $\varrho = \varrho(\varphi)$ в полярных координатах.*

Перейдем теперь к кривым с постоянными инвариантами. Справедлива

**Теорема 6,2.** а) *Кривые с постоянным инвариантом $\varrho$ являются окружностями с центром в центре плоскости.*

б) *Кривые с постоянным инвариантом ${}^s\omega_1$ — это окружности, которые или имеют центр в центре плоскости или проходят через центр плоскости.* в) *Кривые с постоянным инвариантом ${}^\varrho\omega_1$ — это архимедовы спирали с полюсом в центре плоскости.*

г) *Кривые с постоянным инвариантом ${}^s\omega_1/{}^\varrho\omega_1$ $(0 < {}^s\omega_1/{}^\varrho\omega_1 < 1)$ — это логарифмические спирали с полюсом в центре плоскости.*

Доказательство. а) Утверждение а) очевидно.

б) Для ${}^s\omega_1$ можно написать согласно (1,7) ${}^s\omega_1 = |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}s|$. Следовательно, кривые с постоянным ${}^s\omega_1$ описываются согласно (2,8) дифференциальным уравнением $1/{}^s\omega_1^2 = \varrho^2 + (\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}\varphi)^2$. Интегрируя это уравнение мы убеждаемся в справедливости доказываемого утверждения б) теоремы.

в) Для ${}^{\varrho}\omega_1$ можно написать согласно (1,7) ${}^{\varrho}\omega_1 = |\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\varrho|$. Интегрируя уравнение $\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}\varrho = c$, получаем утверждение в).

г) Для ${}^{s}\omega_1/{}^{\varrho}\omega_1$ можно написать согласно (1,7) ${}^{s}\omega_1/{}^{\varrho}\omega_1 = |\mathrm{d}\varrho/\mathrm{d}s|$. Дифференцируя $\varrho = \sqrt{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})}$, получим

$$\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s} = \frac{\left(\boldsymbol{r}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}s}\right)}{\sqrt{(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r})}} = \cos\alpha_0\,, \tag{6,1}$$

где $\alpha_0$ — угол касательной с радиусом-вектором. Кривые с постоянным ${}^{s}\omega_1/{}^{\varrho}\omega_1$ образуют, следовательно, с радиусом-вектором постоянный угол. Однако, в случае $0 < \cos\alpha_0 < 1$, такие кривые и являются логарифмическими спиралями. Случай г), аналогично предыдущим, можно было бы свести к решению некоторого дифференциального уравнения. Формула (6,1), которую мы использовали, остается в силе для пространств любой размерности.

Выясним теперь связь между евклидовой кривизной $\kappa$ и инвариантом $\varrho$. Это мы сделаем так, что выразим $\kappa$ через $\varrho$ и его производные по центроевклидовой дуге. Собственно говоря, это означает — найти формулу для кривизны в полярных координатах. После несложных выкладок мы получим

$$x = \varrho\cos\varphi\,,\quad y = \varrho\sin\varphi\,,\quad x' = \varrho'\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\,,\quad y' = \varrho'\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\,,$$
$$x'' = \varrho''\cos\varphi - 2\varrho'\sin\varphi - \varrho\cos\varphi\,,\qquad y'' = \varrho''\sin\varphi + 2\varrho'\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\,.$$

Отсюда при помощи формулы $\kappa = |[\boldsymbol{r}'\,\boldsymbol{r}'']|/|\boldsymbol{r}'|^3$ получим

$$\kappa = \frac{|\varrho^2 - \varrho\varrho'' + 2\varrho'^2|}{(\varrho^2 + \varrho'^2)^{3/2}}\,. \tag{6,2}$$

Пример 6,1. Закончим этот параграф, посвященный плоским кривым, натуральным уравнением прямой, не проходящей через центр плоскости. Легко видеть, что нее имеет место

$$\varrho = \frac{\varrho_0}{\cos(\varphi - \varphi_0)}\,, \tag{6,3}$$

где $\varrho_0$ — расстояние прямой от начала, а $\varphi_0$ — угол нормали прямой с полярной осью.

Подстановкой в (6,2) мы получили бы для прямой тривиальный результат $\kappa = 0$. Быть может, стоит заметить, что с точки зрения центроевклидовой теории прямая, не проходящая через начало, не является особым случаем.

## 7. КРИВЫЕ В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Результаты, полученные для инвариантов $n$-мерного пространства, дают специальные результаты для $E_3^C$. Сводкой этих результатов является следующая

**Теорема 7,1.** *При любой параметризации справедливы формулы:*

$$(7,1)\qquad \text{a)}\ {}^t\omega_1 = \frac{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}^{\cdot}|}{\varrho^2}, \qquad \text{б)}\ {}^t\omega_2 = \frac{\varrho|[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{\cdot}, \boldsymbol{r}^{\cdot\cdot}]|}{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}^{\cdot}|^2}.$$

*Центроевклидова дуга подчиняется условию*

$$(7,2)\qquad \varrho^2 = \left|\boldsymbol{r} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}\right|.$$

*Для ${}^\varphi\omega_2$ имеет место формула*

$$(7,3)\qquad {}^\varphi\omega_2 = \frac{\varrho^3|[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}^{\cdot}, \boldsymbol{r}^{\cdot\cdot}]|}{|\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}^{\cdot}|^3}$$

*при любой параметризации $t$. При параметризации с помощью центроевклидовой дуги $\varphi$ имеет место*

$$(7,4)\qquad {}^\varphi\omega_2 = \frac{\left|\left[\boldsymbol{r}, \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi}, \dfrac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}\varphi^2}\right]\right|}{\varrho^3},$$

*или также*

$$(7,5)\qquad {}^\varphi\omega_2 = \left|\left[\boldsymbol{a}_0, \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}_0}{\mathrm{d}\varphi}, \frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}_0}{\mathrm{d}\varphi^2}\right]\right|.$$

*Для инвариантов ${}^s\omega_1$, ${}^s\omega_2$ имеет место*

$$(7,6)\qquad {}^s\omega_1 = \frac{|\sin\alpha_0|}{\varrho} = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|, \qquad {}^s\omega_2 = \kappa_1\,\frac{|\cos\alpha_2|}{\sin^2\alpha_0},$$

*где $\alpha_0$ — угол касательной с радиусом-вектором, $\alpha_2$ — угол бинормали с радиусом-вектором, $\kappa_1$ — кривизна (первого рода).*

Далее,

$$(7,7)\qquad {}^\varphi\omega_2 = \varrho\kappa_1\left|\frac{\cos\alpha_2}{\sin^3\alpha_0}\right|, \qquad \frac{{}^s\omega_1}{{}^\rho\omega_1} = |\cos\alpha_0| = \left|\frac{\mathrm{d}\varrho}{\mathrm{d}s}\right|,$$

$$(7,8)\qquad {}^\rho\omega_1 = \frac{|\mathrm{tg}\,\alpha_0|}{\varrho} = \left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\varrho}\right|, \qquad {}^\rho\omega_2 = \frac{\kappa_1}{\sin^2\alpha_0}\left|\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_0}\right|.$$

Формулы для инвариантов индекса 1 справедливы, очевидно, и для плоскости $E_2^C$.

Формулы (7,6) и (7,7) позволяют дать следующее геометрическое истолкование инвариантов ${}^s\omega_1$, ${}^s\omega_2$, ${}^\varphi\omega_2$, при помощи одних длин и евклидовой кривизны. Справедлива

**Теорема 7,2.** *Если обозначить через $d_0$ расстояние начала от касательной,* *а через $d_2$ — расстояние начала от соприкасающейся плоскости, то для инвариантов ${}^s\omega_1, {}^s\omega_2, {}^\varphi\omega_2$ справедливы формулы*

$$(7,9) \qquad \text{а) } {}^s\omega_1 = \frac{d_0}{\varrho^2}, \quad \text{б) } {}^s\omega_2 = \frac{\varkappa_1 d_2 \varrho}{d_0^2}, \quad \text{в) } {}^\varphi\omega_2 = \frac{\varkappa_1 d_2 \varrho^3}{d_0^3}.$$

Доказательство очевидно.

Замечание 7,1. Аналогично евклидовой теории и с точки зрения центроевклидовой теории прямая в пространстве является особой линией (т. е. все ее точки исключительны). Особыми нужно считать и кривые, лежащие в проходящей через центр пространства плоскости. Из §1 следует, что центроевклидова теория этих кривых совпадает с центроевклидовой теорейи кривых в $E_2^C$. Их „натуральное уравнение" имеет вид ${}^\varphi\omega_2 = 0$. Кривые, лежащие в плоскости, не проходящей через центр пространства, не являются, в отличие от евклидовой теории, особыми. При помощи центроевклидовых инвариантов легко можно было бы найти условие для того, чтобы наступил последний из упомянутых случаев. Результат довольно сложен и мы его здесь не приведем.

Замечание 7,2. Из замечания 2,1 следует способ построения кривой по ее натуральным уравнениям

$$(7,10) \qquad \varrho = \varrho(\varphi), \quad {}^\varphi\omega_2 = {}^\varphi\omega_2(\varphi).$$

При помощи уравнения ${}^\varphi\omega_2 = {}^\varphi\omega_2(\varphi)$ построим проекцию кривой из центра пространства на единичную сферу, а тем самым и конус, на котором кривая лежит. На этом конусе тогда нетрудно построить искомую кривую по первому уравнению $\varrho = \varrho(\varphi)$. Упомянутый конус и искомая кривая определяются, конечно, с точностью до центроевклидовых движений.

Замечание 7,3. Обратим внимание еще на одно обстоятельство. Если развернуть коническую поверхность, на которой лежит кривая, на плоскость, то центроевклидова дуга $\varphi$ перейдет в амплитуду, а $\varrho$ — в радиус-вектор в полярных координатах этой плоскости. Натуральное уравнение $\varrho = \varrho(\varphi)$ кривой перейдет в натуральное уравнение плоской кривой в плоскости, на которую мы развернули наш конус. Итак, при построении кривой по натуральным уравнениям (7,10) можно поступать так: По уравнению ${}^\varphi\omega_2 = {}^\varphi\omega_2(\varphi)$ построим конус, на котором лежит кривая; развернем его на плоскость и в этой плоскости по натуральному уравнению $\varrho = \varrho(\varphi)$ построим плоскую кривую. Навертывая плоскость обратно на конус, мы получаем искомую кривую.

Пример 7,1. Из замечания 7,3 и из примера 6,1 следует, что натуральные уравнения геодезических линий на конусе с вершиной в центре пространства с „натуральным уравнением" ${}^\varphi\omega_2 = {}^\varphi\omega_2(\varphi)$, имеют вид

$$(7,11) \qquad \varrho = \frac{c}{\cos(\varphi - d)}, \quad {}^\varphi\omega_2 = {}^\varphi\omega_2(\varphi),$$

где $c$ и $d$ — постоянные.

Замечание 7,4. Обратим теперь внимание на одно геометрическое значение кривизны ${}^{\varphi}\omega_2$. Возьмем проекцию кривой на единичную сферу с центром в центре пространства. Как известно, эта кривая имеет в точках на образующих конуса одинаковую кривизну ${}^{\varphi}\omega_2$ с исходной кривой. Ввиду того, что касательная к сферической кривой перпендикулярна радиусу-вектору и $\varrho = 1$, формула (7,7) для ${}^{\varphi}\omega_2$ сводится к виду

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = \kappa_1 |\cos \alpha_2| , \tag{7,12} $$

где $\kappa_1$ — евклидова кривизна сферической кривой, а $\alpha_2$ — угол ее бинормали в рассматриваемой точке с радиусом-вектором. Ввиду того, что окружность кривизны сферической кривой совпадает с пересечением ее соприкасающейся плоскости со сферой, кривизна сферической кривой дана выражением $\kappa_1 = 1/|\sin \alpha_2|$. В результате получаем

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = |\operatorname{cotg} \alpha_2| . $$

Обратим еще внимание на то, что угол $\alpha_2$ равен половине угла при вершине конуса вращения, который получается при проектировании окружности кривизны сферической кривой из центра пространства. Этот конус вращения определяется, очевидно, однозначно кривизной ${}^{\varphi}\omega_2$. Конус „${}^{\varphi}\omega_2$“ на котором лежит исходная кривая, и упомянутый конус вращения — очевидно, касаются друг друга вдоль их общей образующей.

Построенный здесь конус вращения мы будем называть *соприкасающимся конусом вращения* кривой в данной точке. Полученные результаты можно подытожить в следующей теореме:

**Теорема 7,3.** *Для кривизны ${}^{\varphi}\omega_2$ кривой справедливо выражение*

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = |\operatorname{cotg} \alpha_2| , \tag{7,13} $$

*где $\alpha_2$ — половина угла при вершине соприкасающегося конуса вращения кривой в данной точке.*

Отыщем, наконец, кривые с постоянными инвариантами. Справедлива

**Теорема 7,4.** а) *Кривые с постоянными кривизнами $\varrho$, ${}^{\varphi}\omega_2$ — это окружности на сфере с центром в центре пространства и с радиусом $\varrho$, которые лежат на конусе вращения с вершиной в центре пространства и с углом при вершине $2\alpha_2$, для которого*

$$ {}^{\varphi}\omega_2 = |\operatorname{cotg} \alpha_2| . \tag{7,13} $$

*Кривые с постоянным $\varrho$ — это сферические кривые на сфере с центром в центре пространства и с радиусом $\varrho$. Кривые с постоянной кривизной ${}^{\varphi}\omega_2$ лежат на конусе вращения с вершиной в центре пространства и с углом при вершине $2\alpha_2$, для которого имеет место* (7,13).

б) *Кривые с постоянными инвариантами ${}^{s}\omega_1$, ${}^{s}\omega_2$ имеют или также постоянные $\varrho$, а также, конечно, ${}^{\varphi}\omega_2$, или это кривые на конусе вращения, которые при развертывании конуса на плоскость переходят в окружности, проходящие через вершину развернутого конуса.*

в) *Кривые с постоянными инвариантами* $^{\varrho}\omega_1, {}^{\varrho}\omega_2$ — *это кривые на конусе вращения, которые при развертывании конуса на плоскость развертываются на спирали Архимеда с полюсом в вершине развернутого конуса.*

г) *Кривые с постоянными инвариантами* $^{\varphi}\omega_2$, $^{s}\omega_1/^{\varrho}\omega_1$, $(0 < {}^{s}\omega_1/^{\varrho}\omega_1 < 1)$ — — *это локсодромы на конусе вращения.*

Доказательство. а) Кривые с постоянными кривизнами $\varrho, {}^{\varphi}\omega_2$ лежат на сфере с центром в центре пространства и с радиусом $\varrho$ — по теореме 4,1 это плоские кривые. Поэтому они лежат и на конусе вращения, очевидно, совпадающем с соприкасающимся конусом вращения во всех точках. Отсюда нетрудно по замечанию 7,4 и по теореме 7,3 вывести утверждение а).

Все кривые, рассматриваемые в б), в), г), имеют, очевидно, постоянные $^{\varphi}\omega_2$ и, следовательно, лежат на конусе вращения с вершиной в центре пространства. Остающаяся часть утверждений б), в), г) тогда непосредственно следует из замечания 7,3 и теоремы 6,2. В случае г) нужно принять во внимание, что кривая пересекает образующие конуса под постоянным углом и является поэтому локсодромой. Теорема доказана.

Пример 7,2. Локсодромы на конусе с натуральным уравнением $^{\varphi}\omega_2 = {}^{\varphi}\omega_2(\varphi)$ выражаются, очевидно, натуральными уравнениями

$$^{\varphi}\omega_2 = {}^{\varphi}\omega_2(\varphi)\,, \quad \frac{^{s}\omega_1}{^{\rho}\omega_1} = c\,,$$

где $c$ — постоянная, причем $0 < c < 1$.

*Литература*

[1] *W. Blaschke*: Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Mathematische Zeitschrift. *6*, 1920, 94—99.

[2] *G. Kowalewski*: Einführung in die Determinantentheorie. Leipzig 1909, 423—426.

[3] *Č. Vitner*: Výjimečné body na křivkách v Riemannových prostorech. Čas. pro pěst.matematiky, *84*, 1959, 433—453.

## Zusammenfassung

## DIFFERENTIALGEOMETRIE DER KURVEN IM ZENTROEUKLIDISCHEN RAUM $E_n^C$

ČESTMÍR VITNER, Praha

Die vorliegende Arbeit befasst sich mit dem Studium der Kurven im zentroeuklidischen Raum $E_n^C$ und besteht aus 7 Paragraphen.

In Paragraph 1 wird das begleitende orthonormale $n$-Bein mit Hilfe eines ortho-

normalen Prozesses aus dem Radiusvektor $\boldsymbol{r}$ und seinen Ableitungen $\boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}$ nach dem allgemeinen Parameter $t$ definiert. Für dieses begleitenden $n$-Bein $\{{}^t\boldsymbol{a}_0, {}^t\boldsymbol{a}_1, \ldots, {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}\}$ werden explicite Formeln angeführt. Es gelten den Frenet'schen Formeln analoge Formeln:

$$ {}^t\boldsymbol{a}_0' = {}^t\omega_1 {}^t\boldsymbol{a}_1 , \quad {}^t\boldsymbol{a}_1' = - {}^t\omega_1 {}^t\boldsymbol{a}_0 + {}^t\omega_0 {}^t\boldsymbol{a}_2 , \quad \ldots, \quad {}^t\boldsymbol{a}_{n-1}' = - {}^t\omega_{n-1} {}^t\boldsymbol{a}_{n-2} . $$

Die Grössen ${}^t\omega_k$ wurden dann explicite ausgedrückt. Es wird gezeigt, dass für zwei Parametrisationen $t$ und $\tau$ auf der Kurve

$$ {}^t\boldsymbol{a}_k = \operatorname{sgn}\left(\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right)^k {}^\tau\boldsymbol{a}_k , \quad {}^t\omega_k = {}^\tau\omega_k \left|\frac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}t}\right| $$

gilt.

Im Paragraph 2 werden spezielle Parametrisationen mittels des euklidischen Bogens $s$, mittels der Entfernung $\varrho$ vom Mittelpunkt des Raumes und mittels der so genannten speziellen Parametrisation $\varphi$ des Indices 1 ($\varphi$ ist durch die Bedingung ${}^\varphi\omega_1 = 1$ definiert) und die mit diesen Parametrisationen zusammenhangenden Invarianten ${}^s\omega_k$, ${}^\varrho\omega_k$, ${}^\varphi\omega_k$ betrachtet. Es gilt der Grundsatz über die Bestimmung der Kurve mit Hilfe von Invarianten $\varrho, {}^\varphi\omega_2, \ldots, {}^\varphi\omega_{n-1}$, welcher im Grunde ausdrückt, dass die Invarianten $\varrho, {}^\varphi\omega_2, \ldots, {}^\varphi\omega_{n-1}$ die Kurve eindeutig bis auf die zentroeuklidischen Bewegungen bestimmen. Es wird gleichzeitig eine einfache geometrische Interpretation der Invarianten ${}^\psi\omega_k$ für eine beliebige spezielle Parametrisation $\psi$ angeführt. Siehe Satz 2,2.

In Paragraph 3 wird der Zusammenhang der Invarianten ${}^s\omega_k$ mit den euklidischen Krümmungen $\kappa_k$ gezeigt. Es gelten die Formeln:

$$ {}^s\omega_1 = \frac{|\sin\alpha_0|}{\varrho} , \quad {}^s\omega_2 = \kappa_1 \frac{\sqrt{1 - \cos^2\alpha_0 - \cos^2\alpha_1}}{\sin^2\alpha_0} ; $$

$$ {}^s\omega_k = \kappa_{k-1} \frac{\sqrt{(1 - \cos^2\alpha_0 - \ldots - \cos^2\alpha_{k-3})(1 - \cos^2\alpha_0 - \ldots - \cos^2\alpha_{k-1})}}{(1 - \cos^2\alpha_0 - \ldots - \cos^2\alpha_{k-2})} $$

für $k = 3, 4, \ldots, n-1$, wobei $\alpha_k$ den Winkel des Radiusvektors mit der $k$-ten euklidischen Normale bedeutet. Es werden weiter die Vektoren $\boldsymbol{a}_k$ durch $\boldsymbol{a}_0$ und die euklidischen Normalen $\mathbf{e}_0, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}$ ausgedrückt.

In Paragraph 4 ist eine Vorschrift zur Konstruktion von Kurven aus natürlichen Gleichungen für verschiedene spezielle Parametrisationen gegebn. Es wurden auch Kurven mit konstanten Invarianten $\varrho, {}^\varphi\omega_2, \ldots, {}^\varphi\omega_{n-1}$ betrachtet. Diese Kurven haben ebenfalls ihre euklidischen Krümmungen konstant und in den Räumen mit ungerader Dimension liegen diese Kurven in den Hyperebenen.

In Paragraph 5 werden isolierte aussergewöhnliche Punkte (das sind Punkte in denen die Determinante $[\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}', \ldots, \boldsymbol{r}^{(n-1)}] = 0$ ist) betrachtet. Durch Grenzübergang werden in diesen die begleitenden $n$-Beine und Invarianten ${}^\varphi\omega_k$ definiert und in expliciten Formeln ausgedrückt. Wenn die Kurve durch den Mittelpunkt des Raumes geht, fällt das zentroeuklidische begleitende $n$-Bein mit dem euklidischen zusammen und der Invariant ${}^{s}\omega_k$ ist ein vielfaches der euklidischen Krümmung $\kappa_k$.

In Paragraph 6 werden ebene Kurven untersucht. Nehmen wir die Amplitude $\varphi$ der, zu den betrachteten rechtwinkeligen Koordinaten angesetzten, polaren Koordinaten als Parameter der ebenen Kurve an, so ist dieser ein spezieller Parameter mit dem Index 1. Die natürlichen Gleichungen der Kurven reduzieren sich dann für diese spezielle Parametrisation auf ihre Gleichungen $\varrho = \varrho(\varphi)$ in Polarkoordinaten. Es werden weiter Kurven mit konstanten Invarianten $\varrho$, ${}^{s}\omega_1$, ${}^{\varrho}\omega_1$, ${}^{s}\omega_1/{}^{\varrho}\omega_1$ angeführt.

In Paragraph 7 werden Kurven im dreidimensionalen Raum betrachtet. Neben den Formeln, welche wir aus den Formeln der Paragraphen 1 und 3 erhalten, werden weitere Formeln abgeleitet, die Invarianten ${}^{s}\omega_1$, ${}^{s}\omega_2$, ${}^{\varphi}\omega_2$ nur mit Hilfe der Entfernung des Ursprungs von der Tangente, mit Hilfe der Entfernung des Ursprungs von der Oskulationsebene und mit Hilfe der Flexion im betrachteten Punkt angeben. Es werden weiter Kurven mit konstanten Invarianten $\varrho$, ${}^{\varphi}\omega_2$; ${}^{s}\omega_1$, ${}^{s}\omega_2$; ${}^{\varrho}\omega_1$, ${}^{\varrho}\omega_2$; ${}^{\varphi}\omega_2$, ${}^{s}\omega_1/{}^{\varrho}\omega_1$ angeführt.