Milan Sekanina

К некоторым вопросам существования факторизации бесконечной циклической группы

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 12 (1962), No. 2, 223–230

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100511

Чехословацкий математический журнал, т. 12 (87) 1962, Прага

К НЕКОТОРЫМ ВОПРОСАМ СУЩЕСТВОВАНИЯ ФАКТОРИЗАЦИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИКЛИЧЕСКОЙ ГРУППЫ

МИЛАН СЕКАНИНА (Milan Sekanina), Брно

(Поступило в редакцию 4/I 1960 г.)

В настоящей статье занимаемся изучением строения системы всех подмножеств B бесконечной циклической группы $\mathfrak{G}$, для которых $\mathfrak{G} = A \dotplus B$, где A — данное подмножество в $\mathfrak{G}$ и $\dotplus$ означает факторизацию в смысле Г. Хаёша (см. [1] и [2]).

I

Не умаляя общности, мы можем ограничиться аддитивной группой целых чисел $\mathfrak{C}$. Если $A, B \subset \mathfrak{C}$, $A + B = A \dotplus B$, то мы будем также писать $A \perp B$. Наши рассуждения будут касаться вопросов двоякого рода, причем мы ограничимся бесконечными факторами A, для которых $\varrho(A) = \aleph_0$ (определение смотри в [2] стр. 486). Множество всех бесконечных факторов A, для которых $\varrho(A) = \aleph_0$ обозначим через $\mathfrak{M}$, символ $\mathfrak{N}$ пусть означает подмножество всех снизу ограниченных факторов из $\mathfrak{M}$.

1. Из теоремы 1.5 в [2] сразу же видно, что $\mathfrak{M}$ не содержит минимальных элементов (т. е. для каждого $A \in \mathfrak{M}$ существует $A_1 \in \mathfrak{M}$ так, что $A \supset A_1$, $A \neq A_1$). Мы покажем, что максимальные элементы из $\mathfrak{M}$, если они вообще существуют, не лежат в $\mathfrak{N}$ (II-ой отдел). Существование максимальных элементов в $\mathfrak{M}$ и максимальных элементов из $\mathfrak{N}$ (все в смысле множественного включения) остается открытым вопросом.

2. Прежде чем приступить к формулировке дальнейших вопросов, приведем несколько простых вспомогательных утверждений.

Пусть A — подмножество в $\mathfrak{C}$. Множество всех разностей $a - a'$, где a, $a' \in A$, обозначим через $D(A)$.

Лемма 1. *Пусть $A, B \subset \mathfrak{C}$, $A \perp B$. Тогда $D(A) \cap D(B) = \{0\}$.*

Доказательство. Если бы было $a - a' = b - b' \neq 0$ для некоторого $a, a' \in A$, $b, b' \in B$, то было бы $a + b' = a' + b$, что противоречит $A \perp B$.

Очевидно, справедлива

Лемма 2. *Пусть* $A \dotplus B = A_1 \dotplus B$, $A_1 \supset A$, $A \neq \emptyset \neq B$, $A, A_1, B \subset \mathfrak{C}$. *Тогда* $A_1 = A$.

Лемма 3. *Пусть* $A \subset \mathfrak{C}$, $A \neq \emptyset$. *Пусть для каждого конечного множества* $B \subset \mathfrak{C}$, *для которого* $A \perp B$, *существует бесконечно много чисел* b *таких, что* $b < \inf B$ *и* $A \perp (B \cup \{b\})$. *Тогда существует* $2^{\aleph_0}$ *бесконечных подмножеств* $D \subset \mathfrak{C}$, *для которых* $A \perp D$.

Доказательство. Для каждого числа $b_1 \in \mathfrak{C}$ выполняется соотношение $A \perp \{b_1\}$. К b_1 существует бесконечно много b_2, меньших b_1, для которых $A \perp \{b_1, b_2\}$. В общем случае, если мы имеем убывающую $(n - 1)$-членную последовательность $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, для которой $A \perp \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, существует бесконечно много $b_n < b_{n-1}$ таких, что $A \perp \{b_1, \ldots, b_n\}$. Множество всех этих чисел b_n мы обозначим через $M(b_1, \ldots, b_{n-1})$. Следовательно, $\operatorname{card} M(b_1, \ldots, b_n) = \aleph_0$, и пусть $\Phi_{b_1, \ldots, b_n}$ является простым отображением этого множества на $\mathfrak{C}$. Пусть D^* означает множество всех определенных таким способом бесконечных убывающих последовательностей $\{b_1, b_2, \ldots\}$ $(= \{b_n\}_1^\infty)$; для каждой такой последовательности $\{b_n\}_1^\infty$ $A \perp \{b_n\}_1^\infty$, и пусть символ $\mathfrak{C}^*$ означает множество всех бесконечных последовательностей чисел из $\mathfrak{C}$. Определим отображение Φ^* множества D^* на $\mathfrak{C}^*$ следующим образом:

$\Phi^*\{b_1, \ldots, b_n, \ldots\} = \{b_1, \Phi_{b_1}(b_2), \ldots, \Phi_{b_1, \ldots, b_{n-1}}(b_n), \ldots\}$.На последовательность $\{c_1, \ldots, c_n, \ldots\} \in \mathfrak{C}^*$ отобразится в Φ^* последовательность $\{d_1, \ldots, d_n, \ldots\} \in D^*$, где числа d_n определены так: $d_1 = c_1$, $d_n = \Phi^{-1}_{d_1, \ldots, d_{n-1}}(c_n)$. Следовательно, $\operatorname{card} D^* \geqq \operatorname{card} \mathfrak{C}^* = 2^{\aleph_0}$ и из неравенства $2^{\aleph_0} \geqq \operatorname{card} \{D\} \geqq \operatorname{card} D^* \geqq 2^{\aleph_0}$, где $\{D\}$ означает систему всех бесконечных D, для которых $D \perp A$, вытекает утверждение леммы.

Перейдем теперь к предмету следующих рассуждений. Пусть $A \in \mathfrak{M}$. Мы будем заниматься множеством $C(A)$ всех $B \in \mathfrak{C}$ для которых $A \dotplus B = \mathfrak{C}$. Из леммы 2 вытекает, что в $C(A)$ не существуют сравнимые, в смысле включения, элементы. Если $B \in C(A)$, то и $B + b \in C(A)$ для каждого $b \in \mathfrak{C}$. Отсюда, опираясь на теоремы 1.3 и 1.1 из работы [2], получаем, что $\operatorname{card} C(A) \geqq \aleph_0$. Из леммы 3 и из построения, произведенного в теореме 1.5 в [2], вытекает, что существуют $A \in \mathfrak{M}$ такие, что $\operatorname{card} C(A) = 2^{\aleph_0}$. В отделе IV мы построим такой фактор $\mathfrak{B}$, что для $A, A' \in C(\mathfrak{B})$ будет существовать $a \in \mathfrak{C}$ такое, что $A + a = A'$. Следовательно, будет тогда $\operatorname{card} C(\mathfrak{B}) = \aleph_0$ (утверждения β) и γ) IV отдела касаются первого рода вопросов). Открытой остается проблема, если в случае кардинального числа $\mathfrak{m}$, для которого $\aleph_0 < \mathfrak{m} < 2^{\aleph_0}$, существует A так, что $\operatorname{card} C(A) = \mathfrak{m}$.

II

Теорема. *Пусть* $A \in \mathfrak{N}$. *Тогда существует* $A^* \supset A$, $A^* \neq A$, $A^* \in \mathfrak{M}$.

Доказательство. Пусть $A \dotplus B = \mathfrak{C}$, $\alpha = \inf A$. B должно быть снизу неограниченным множеством, следовательно, существует бесконечная убывающая последовательность $\{b_1, b_2, \dots\}$ $(= \{b_n\}_1^\infty)$ элементов из B. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ — произвольно выбранная, но закрепленная возрастающая последовательность положительных целых чисел. Определим выбранную последовательность $\{\beta_n\}_1^\infty$ из $\{b_n\}_1^\infty$ следующим образом:

1. $\beta_1 = b_1$.

2. Пусть $n > 1$ и пусть определены числа $\beta_1 > \dots > \beta_{n-1}$. Рассмотрим интервалы $\langle \alpha + \beta_k - a_n, \alpha + \beta_k \rangle$ для $k < n$. Каждый такой интервал содержит только конечное число целых чисел, следовательно, существует только конечное число индексов ν таких, что $A + b_\nu$ инцидентно некоторому из этих интервалов. Существует индекс ν' такой, что $A + b_{\nu'}$ не пересекается ни с одним из этих интервалов, и $b_{\nu'} < \beta_{n-1}$. Положим $\beta_n = b_{\nu'}$. Тогда

$$(1) \qquad (A - \beta_k) \cap \langle \alpha - \beta_n - a_n, \alpha - \beta_n \rangle = \emptyset$$

для каждого $k < n$; если бы, то есть, для некоторого $a \in A$ и $k < n$ было $\alpha - \beta_n - a_n \leqq a - \beta_k \leqq \alpha - \beta_n$, то было бы и $\alpha + \beta_k - a_n \leqq a + \beta_n \leqq \alpha + \beta_k$, что противоречит выбору β_n.

Упорядочим множество $\mathfrak{C}$ в последовательность $\{c_n\}_1^\infty$.

1. Пусть κ_1 — такой индекс, что $\alpha - \beta_{\kappa_1} > c_1$. Такой индекс существует, так как $-\beta_n \to \infty$. Положим

$$A_1 = \{c_1 + \beta_{\kappa_1}\} \cup A\,, \quad B_1 = \{-\beta_{\kappa_1}\}\,.$$

2. Пусть $n > 1$ и пусть определено A_{n-1} и B_{n-1}, обладающее следующими свойствами:

$$A_{n-1} \supset A\,, \quad \sup(A_{n-1} \setminus A) < \alpha\,, \quad \operatorname{card}(A_{n-1} \setminus A) = n - 1\,.$$

B_{n-1} является конечной выбранной последовательностью из $\{-\beta_n\}_1^\infty$, $\operatorname{card} B_{n-1} = n - 1$, $A_{n-1} \perp B_{n-1}$.

Пусть ν_1 — первый из индексов, обладающих тем свойством, что $c_{\nu_1} \notin A_{n-1} \dotplus B_{n-1}$. Существует индекс κ_n такой, что

$$(2) \qquad -\beta_{\kappa_n} - c_{\nu_1} > \sup B_{n-1} - (\inf A_{n-1} + \inf B_{n-1})\,,$$

$$(3) \qquad a_{\kappa_n} > \alpha - \inf A_{n-1}\,,$$

и $-\beta_{\kappa_n} > \sup B_{n-1}$.

Положим

$$A_n = \{c_{\nu_1} + \beta_{\kappa_n}\} \cup A_{n-1}\,, \quad B_n = \{-\beta_{\kappa_n}\} \cup B_{n-1}\,.$$

Мы покажем, что A_n и B_n выполняют предположения индукции. Очевидно, $A_n \supset A$. Согласно (2)

$$c_{\nu_1} + \beta_{\kappa_n} < \inf A_{n-1} + \inf B_{n-1} - \sup B_{n-1} \leqq \inf A_{n-1}\,,$$

откуда, во-первых, следует, что $\sup(A_n \setminus A) < \alpha$ (так как $\inf A_{n-1} < \alpha$), во-вторых, $\operatorname{card}(A_n \setminus A) = n$. Утверждения $B_n \subset \{-\beta_n\}_1^\infty$, $\operatorname{card} B_n = n$ очевидны вследствие выбора $-\beta_{\kappa_n}$.

Теперь докажем, что $A_n \perp B_n$.

α) $A_n \perp B_{n-1}$, так как, во-первых, $A_{n-1} \perp B_{n-1}$, и, во-вторых, для каждого $b \in B_{n-1}$

$c_{\nu_1} + \beta_{\kappa_n} + b \leqq c_{\nu_1} + \beta_{\kappa_n} + \sup B_{n-1} < \inf A_{n-1} + \inf B_{n-1} = \inf (A_{n-1} \dotplus B_{n-1})$, как видно из (2).

β) Мы покажем, что $(A_n + (-\beta_{\kappa_n})) \cap (A_n \dotplus B_{n-1}) = \emptyset$.

a) $(A + (-\beta_{\kappa_n})) \cap (A_n \dotplus B_{n-1}) = \emptyset$. Если бы, то есть, было $a + (-\beta_{\kappa_n}) = a' + b$ для некоторого $a' \in A_n$, $a \in A$, $b \in B_{n-1}$, то было бы $a' > a$, значит, $a' \in A$, что противоречит $A \perp \{-\beta_n\}_1^\infty$.

b) $(A_n - \beta_{\kappa_k}) \cap \langle \alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n} \alpha - \beta_{\kappa_n} \rangle = \emptyset$ для каждого $k < n$. Справедливо, то есть, неравенство $\sup (A_n \setminus A) < \alpha$ и $\alpha - \beta_{\kappa_k} < \alpha - \beta_{\kappa_n}$. Из (1) вытекает, что $\alpha - \beta_{\kappa_k} < \alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n}$, и, следовательно, для $a \in A_n \setminus A$ будет $a - \beta_{\kappa_k} < \alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n}$; для $a \in A$ мы имеем $a - \beta_{\kappa_k}$ non $\in \langle \alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n}, \alpha - \beta_{\kappa_n} \rangle$, как непосредственно следует из (1).

Итак, $A_n \dotplus B_{n-1} \cap \langle \alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n}, \alpha - \beta_{\kappa_n} \rangle = \emptyset$. Теперь мы покажем, что

$$(A_{n-1} \setminus A) + (-\beta_{\kappa_n}) \subset \langle \alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n}, \alpha - \beta_{\kappa_n} \rangle .$$

Пусть будет $a \in A_{n-1} \setminus A$. Тогда

$$\alpha - \beta_{\kappa_n} - a_{\kappa_n} < \inf A_{n-1} - \beta_{\kappa_n} \leqq a - \beta_{\kappa_n} < \alpha - \beta_{\kappa_n},$$

причем мы в первом неравенстве использовали (3).

Потому что $c_{\nu_1} \notin A_n \dotplus B_{n-1}$, так как $c_{\nu_1} \notin A_{n-1} \dotplus B_{n-1}$, из соотношения $c_{\nu_1} + \beta_{\kappa_n} + b = c_{\nu_1}$ вытекает $b = -\beta_{\kappa_n}$; доказательство утверждения

$$(A_n \dotplus (-\beta_{\kappa_n})) \cap (A_n \dotplus B_{n-1}) = \emptyset$$

этим закончено.

Из утверждений, приведенных в абзацах α) и β) сразу же вытекает $A_n \perp B_n$. Добавим еще, что из индукции и из выбора индекса ν_1 вытекает, что $c_n \in A_n \dotplus B_n$.

Если положить $A^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, $B^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, то $A^* + B^* = \mathfrak{C}$, $A^* \supset A$, $A^* \neq A$, чем теорема доказана. Из построения видно, что $A^* \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

III

В настоящем отделе мы выведем несколько вспомогательных результатов, которые применим в отделе IV.

О бесконечной возрастающей последовательности натуральных чисел $\{a_n\}_1^\infty$ мы скажем, что она является V-последовательностью, если для любых четырех индексов m, n, p, r, для которых $n > m, p, r$, справедливо неравенство

$$(V) \qquad a_n - a_m > 2(a_r - a_p).$$

Очевидно, что каждая бесконечная выбранная последовательность из V-последовательности является тоже V-последовательностью. Примером V-последовательности может служить последовательность $\{3^n\}_1^\infty$. Легко можно показать, что

(Z) $$a_n - a_t = a_r - a_s \neq 0 \Rightarrow n = r,\ t = s\,.$$

Лемма 4. *Пусть* $\{a_n\}_1^\infty$ *— V-последовательность. Пусть для индексов* m, n, p, r, s, t, *для которых* $m > n$, $p \geqq s > t$, $p > r$

(4) $$a_m - a_n = a_p - a_r + a_s - a_t\,.$$

Тогда $m = p$, $n = t$, $r = s$.

Доказательство. Мы покажем, что $p = m$. Если бы было $p > m$, то согласно (V) было бы $a_p - a_r > 2(a_m - a_n)$, что противоречит (4). Если бы было $m > p$, то согласно (V) было бы

$$a_m - a_n > 2(a_p - a_r)\,,\quad a_m - a_n > 2(a_s - a_t)\,,$$

откуда следует $a_m - a_n > a_p - a_r + a_s - a_t$, что тоже противоречит (4). Следовательно, $p = m$. Из (4) далее вытекает, что $a_r - a_n = a_s - a_t$, откуда по (Z) $n = t$ и $r = s$.

Лемма 5. *Пусть* $\{a_n\}_1^\infty$ *— V-последовательность. Пусть* $B \subset \mathfrak{C}$ *— такое множество, что* $\operatorname{card} B = \aleph_0$ *и что* $D(B) \subset D(\{a_n\}_1^\infty)$.

Если B упорядочим по величине ($B = \{\ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots\}$, $\ldots < b_{-1} < b_0 < b_1 < \ldots$), *то будет существовать такое число* $b \in \mathfrak{C}$, *что или* $B + b$ *или* $-B + b$ *будет выбранной последовательностью из* $\{a_n\}_1^\infty$.

Доказательство. Сначала мы докажем, что ни для какого m не будет

(5) $$b_m - b_{m-1} = b_{m+1} - b_m\,.$$

Допустим, что такое m существует. Пусть $b_{m+1} - b_m = a_n - a_p$ (имеем $n > p$)

$$b_m - b_{m-1} = a_r - a_s(r > s)\,,\quad b_{m+1} - b_{m-1} = a_t - a_u(t > u)\,.$$

Тогда $a_t - a_u = 2(a_n - a_p)$. Из (V) вытекает $n = t$, следовательно, $a_p - a_u = a_n - a_p$, и из (Z) $p = n$, что приводит нас к противоречию.

Допустим, далее, что существует m такое, что

(6) $$b_m - b_{m-1} > b_{m+1} - b_m\,,\quad b_{m+1} - b_m < b_{m+2} - b_{m+1}\,.$$

Оставим обозначения, введенные в предыдущем отделе, и обозначим далее $b_{m+2} - b_{m+1} = a_v - a_z\,(v > z)$, $b_{m+2} - b_m = a_g - a_h\,(g > h)$, $b_{m+2} - b_{m-1} = a_i - a_j\,(i > j)$. Тогда $a_g - a_h = a_v - a_z + a_n - a_p$.

Из (6) и из (V) получаем $v \geqq n$ и по лемме 4 $v = g$, $p = h$, $z = n$. Из уравнения $a_t - a_u = a_n - a_p + a_r - a_s$ получим по тем же причинам $t = r$, $p = u$, $n = s$.

Далее, справедливы равенства (причем мы используем доказанные равенства между индексами) $b_{m+2} - b_m + b_m - b_{m-1} = a_i - a_j = a_v - a_p + a_r - a_z$. По лемме 4 или $p = r$, но это противоречит неравенствам $n > p$, $r > n$, или $v = z$, что противоречит неравенству $v > z$.

Следовательно, соотношение (6) не имеет места ни для какого m. Значит, множество разностей $b_m - b_{m-1}$ образует в упорядочении по m последовательность типа ω или ω^*. Следовательно, и B будет типа ω или ω^*. Не умаляя общности, можем предполагать, что m пробегает множество $0, 1, 2, \ldots$ или $\ldots, -2, -1, 0$.

Итак, пусть B будет, например, типа ω и $b_1 - b_0 = a_{l_1} - a_{l_0}$, $b_2 - b_1 = a_{l_2} - a_{l_1'}$, $b_2 - b_0 = a_{l'} - a_{l''}$. Из уравнения

$$a_{l'} - a_{l''} = a_{l_2} - a_{l_1'} + a_{l_1} - a_{l_0}$$

и из неравенства $a_{l_2} - a_{l_1'} > a_{l_1} - a_{l_0}$ вытекает, согланcо (V), $l_2 \geqq l_1$, и по лемме 4 $l'_{1'} = l_1$. Следовательно, $l_2 > l_1$. Предположим, что для $k \leqq n$ определены индексы l_k так, что $l_k > l_{k-1}$ и $b_k - b_{k-1} = a_{l_k} - a_{l_{k-1}}$. Пусть

$$b_{n+1} - b_n = a_{l'_{n+1}} - a_{l_n'} \left(l'_{n+1} > l'_n\right), \quad b_{n+1} - b_{n-1} = a_{\lambda'} - a_{\lambda''} \left(\lambda' > \lambda''\right).$$

Тогда из уравнения

$$a_{\lambda'} - a_{\lambda''} = a_{l'_{n+1}} - a_{l_n'} + a_{l_n} - a_{l_{n-1}}$$

и из неравенства $a_{l'_{n+1}} - a_{l_n'} > a_{l_n} - a_{l_{n+1}}$ по лемме 4 вытекает, $l'_n = l_n$. Положим $l'_{n+1} = l_{n+1}$. Тогда $b_n - a_{l_n} = b_k - a_{l_k} = b$ для произвольных двух индексов n и k, следовательно, $b_n = a_{l_n} + b$.

Если B является последовательностью типа ω^*, то мы можем перейти к предыдущему случаю, ведя рассуждения о последовательности $-b_0, -b_{-1}, -b_{-2}, \ldots$

IV

Построение фактора $\mathfrak{B}$:

Пусть $\{b_n\}_1^\infty$ — последовательность, элементами которой являются натуральные числа, причем каждое из натуральных чисел содержится в ней бесконечное число раз. Множество $\mathfrak{C}$ мы упорядочим так, чтобы оно образовало последовательность $\{c_n\}_1^\infty$. Пусть $\{a_n\}_1^\infty$ — V-последовательность.

a) Пусть κ_1 — такой индекс, что $\beta_1 = c_1 + a_{\kappa_1} > 0$. Положим $\mathfrak{B}_1 = \{\beta_1\}$, $A_1 = \{-a_{\kappa_1}\}$.

b) Пусть $n \geqq 1$. Пусть определены множества

$$\mathfrak{B}_n = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\iota_n}\} \left(\beta_1 < \ldots < \beta_{\iota_n}\right), \quad A_n = \{-a_{\kappa_1}, \ldots, -a_{\kappa_n}\} \left(\kappa_1 < \ldots < \kappa_n\right)$$

такие, что $\mathfrak{B}_n \perp A_n$.

Пусть λ_{n+1} является первым индексом, для которого $c_{\lambda_{n+1}} \notin \mathfrak{B}_n \dotplus A_n$. В уравнении

$$c_{\lambda_{n+1}} = x + y \tag{7}$$

выберем решение, обладающее следующими свойствами:

1. $\sup(\mathfrak{B}_n + y) < \inf(\mathfrak{B}_n \dotplus A_n)$,

2. $\inf(x + A_n) > \sup(\mathfrak{B}_n \dotplus A_n)$,

3. $y = -a_{\kappa_{n+1}}$ для подходящего индекса $\kappa_{n+1} > \kappa_n$,

4. $x > \beta_{\iota_n}$.

Так как x является убывающей функцией y и $-a_n \to -\infty$, то решение x и y, имеющее перечисленные свойства, существует. Положим $\mathfrak{B}'_{n+1} = \mathfrak{B}_n \cup \{x\}$.

Из 1. и 2. и из $\mathfrak{B}_n \perp A_n$ вытекает $\mathfrak{B}'_{n+1} \perp A_{n+1}$. Кроме того, $c_{\lambda_{n+1}} \in \mathfrak{B}'_{n+1} \dotplus A_{n+1}$. Пусть, далее, x' — целое число, большее x и такое, что $\inf(x' + A_{n+1}) > \sup(\mathfrak{B}'_{n+1} \dotplus A_{n+1})$ и γ_{n+1} является первым индексом, большим или равным $n + 1$, для которого $b_{\gamma_{n+1}} \notin D(A_{n+1})$. Положим

$$\mathfrak{B}_{n+1} = \mathfrak{B}'_{n+1} \cup \{x', x' + b_{\gamma_{n+1}}\}.$$

Мы покажем, что $\mathfrak{B}_{n+1} \perp A_{n+1}$. Из выбора x' вытекает, что

$$\inf(x' + b_{\gamma_{n+1}} + A_{n+1}) > \sup(\mathfrak{B}'_{n+1} + A_{n+1}).$$

Следовательно,

$$(x' + A_{n+1}) \cap (\mathfrak{B}'_{n+1} \dotplus A_{n+1}) = \emptyset = ((x' + b_{\gamma_{n+1}}) + A_{n+1}) \cap (\mathfrak{B}'_{n+1} \dotplus A_{n+1}).$$

Допустим, что $x' + b_{\gamma_{n+1}} + \alpha' = x' + \alpha''$ для некоторых чисел $\alpha', \alpha'' \in A_{n+1}$. Тогда $b_{\gamma_{n+1}} = \alpha'' - \alpha'$, следовательно, $b_{\gamma_{n+1}} \in D(A_{n+1})$, что противоречит предыдущему.

Положим $\mathfrak{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathfrak{B}_n$, $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Будет $\mathfrak{B} \dotplus A = \mathfrak{C}$, $\mathfrak{B} \in \mathfrak{N}$. Из выбора числа $b_{\gamma_{n+1}}$ видно, что $D(\mathfrak{B}) \cup D(A) = \mathfrak{C}$.

Свойства фактора $\mathfrak{B}$:

α) *Пусть* $\mathfrak{B} \dotplus A' = \mathfrak{C}$. *Тогда* $A' = A + a$ *для подходящего* $a \in \mathfrak{C}$.

Доказательство. Так как (смотри лемму 1) $D(\mathfrak{B}) \cap D(A') = \{0\}$, то $D(A') \subset D(A)$. При этом $\operatorname{card} A' = \aleph_0$, потому что $\mathfrak{B} \in \mathfrak{N}$, т. е. является множеством, ограниченным снизу. По лемме 5 существует $A^* \subset A$ и $a \in \mathfrak{C}$, так, что $A^* + a = A'$ или же $(-A^*) + a = A'$. Второй случай не может наступить, так как A является сверху ограниченным множеством, и $\mathfrak{B} + ((-A^*) + a)$ было бы снизу ограниченным множеством. Следовательно, $A' = A^* + a$, откуда $\mathfrak{B} + A^* = \mathfrak{C}$ и по лемме 2 $A^* = A$.

β) *Пусть* $\mathfrak{B}' \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$ *h* $\operatorname{card}(\mathfrak{B}' \setminus \mathfrak{B}) < \aleph_0$. *Тогда* $\mathfrak{B}'$ *не является фактором* $\mathfrak{C}$.

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{B}' \dotplus A' = \mathfrak{C}$, для подходящего множества A'. Имеем $D(\mathfrak{B}') \supset D(\mathfrak{B})$, и отсюда, как в случае α) вытекает $A' = A^* + a$ для подходящего множества $A^* \subset A$ и подходящего $a \in \mathfrak{C}$. Из $\mathfrak{B}' \supset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$ и из

$$\mathfrak{B} \dotplus A = \mathfrak{B}' + (A^* + a) = \mathfrak{B}' \dotplus A^* = \mathfrak{C}$$

вытекает по лемме 2, что $A^* \neq A$. Пусть $\alpha \in A \setminus A^*$ и пусть $\beta \in \mathfrak{B}$ — такое число, что
$$\alpha + \beta > \sup \left(A^* + (\mathfrak{B}' \setminus \mathfrak{B})\right).$$

Если бы было $\alpha + \beta \in \mathfrak{B}' \dotplus A^*$, и, значит, $\alpha + \beta = a' + b$ для $a' \in A^*$, $b \in \mathfrak{B}'$, то из предыдущего неравенства вытекало бы $b \in \mathfrak{B}$ и, конечно, $a' \in A$. Из $A \perp \mathfrak{B}$ получаем $\alpha = a'$, $b = \beta$, что противоречит тому, что $\alpha \notin A^*$.

γ) *Пусть* $\mathfrak{B}' \subset \mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}' \neq \mathfrak{B}$, $\operatorname{card}(\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}') < \aleph_0$. *Тогда* $\mathfrak{B}'$ *не является фактором* $\mathfrak{C}$.

Доказательство. Допустим, что $\mathfrak{B}' + A' = \mathfrak{C}$ для подходящего множества A'. Имеет место равенство $D(\mathfrak{B}') = D(\mathfrak{B})$. Последовательность $\{b_n\}_1^\infty$ содержит, то есть, каждое натуральное число бесконечное число раз, и, следовательно, согласно выбору числа x' и $b_{\gamma_{n+1}}$ при построении множества $\mathfrak{B}$ каждое число из $D(\mathfrak{B})$ является разностью бесконечного числа взаимно непересекающихся пар чисел из $\mathfrak{B}$. Из предположения $\operatorname{card}(\mathfrak{B} \setminus \mathfrak{B}') < \aleph_0$ затем следует, что $D(\mathfrak{B}') = D(\mathfrak{B})$. Отсюда получаем, как в пункте α), что $A' = A^* + a$ для подходящего $A^* \subset A$ и $a \in \mathfrak{C}$. Значит, $\mathfrak{B} \perp A^*$. Из $A' + \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}$ получаем противоречие $A^* \dotplus \mathfrak{B}' = \mathfrak{C}$, потому что для $b \in \mathfrak{B} - \mathfrak{B}'$, $a \in A$ — произвольное, $a + b \notin A^* \dotplus \mathfrak{B}'$.

Литература

[1] *G. Hajós:* Sur la faktorisation des groupes abéliens. Čas. pro pěst. mat. a fys., *74* (1949), 157—162.

[2] *Милан Секанина:* Замечания к факторизации бесконечной циклической группы. Чех. мат. журнал *9 (84)*, 1959, 485—495.

Summary

ON CERTAIN EXISTENCE — PROBLEMS CONCERNING THE FACTORISATION OF INFINITE CYCLIC GROUPS

MILAN SEKANINA, Brno

In the paper there is studied the structure of the system of infinite factors in HAJÓS' sense of an infinite cyclic group G (a subset A of G is a factor in Hajós' sense for G if there exists a subset B of G — the so-called complementary factor — such that $G = A \dotplus B$, where $\dotplus$ means factorisation in Hajós' sense). It is proved that there exists a factor A for which the system of complementary factors has cardinality $2^{\aleph_0}$. Maximality and minimality of factors is dealt with. There exists no minimal infinite factor.