Miloslav Jiřina

Гармонизуемые решения обыкновенных дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами и случайной правой частью

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 13 (1963), No. 3, 360–371

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100574

Чехословацкий математический журнал, т. 13 (88) 1963, Прага

ГАРМОНИЗУЕМЫЕ РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ И СЛУЧАЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

МИЛОСЛАВ ИРЖИНА (Miloslav Jiřina), Прага

(Поступило в редакцию 15/V 1961 г.)

В настоящей работе доказываются необходимые и достаточные условия для того, чтобы обыкновенное дифференциальное уравнение со случайными коэффициентами, правая часть которого представляет собой так называемый $\mathscr{T}$-гармонизуемый процесс, имело решение, которое опять является $\mathscr{T}$-гармонизуемым процессом.

ВВЕДЕНИЕ

Статья является продолжением статьи [1]. Вместо $\mathscr{T}$-стационарных решений рассматриваются так наз. $\mathscr{T}$-гармонизуемые решения (по поводу точного определения см. абзац 2.). По возможности сохраняются обозначения статьи [1]. В частности, символы $(\Omega, \mathscr{S}, P)$, $\mathsf{E}(\xi)$, $\mathsf{E}(\xi \mid \mathscr{T})$, $\mathscr{H}$, $|.|$, c, $f(.)$ имеют тот самый смысл как и в [1]*) Действительную прямую обозначим через $R^{(1)}$, и положим $I_n^{(1)} = \langle -n, n \rangle$, $R^{(2)} = R^{(1)} \times R^{(1)}$, $I_n^{(2)} = I_n^{(1)} \times I_n^{(1)}$. Через $\mathscr{B}^{(i)}$ [или $\mathscr{A}^{(i)}$] обозначим систему всех ограниченных борелевских множеств [или всех борелевских множеств] в $R^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ и через $\mathscr{R}^{(2)}$ систему всех множеств вида $A \times B$, причем $A, B \in B^{(1)}$; значит, $\mathscr{A}^{(2)} = \sigma(\mathscr{R}^{(2)})$ и $\mathscr{B}^{(2)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} (I_n^{(2)} \cap \mathscr{A}^{(2)})$. Для данной σ-алгебры $\mathscr{T} \subset \mathscr{S}$ обозначим через $\mathscr{R}^{(1)}(\mathscr{T})$ [или $\mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T})$] систему всех множеств вида $A \times \Gamma$ [или $A \times B \times \Gamma$], где $A, B \in \mathscr{B}^{(1)}$, $\Gamma \in \mathscr{T}$ и, наконец, положим для $i = 1, 2$

$$\mathscr{A}^{(i)}(\mathscr{T}) = \sigma(\mathscr{R}^{(i)}(\mathscr{T})), \quad \mathscr{B}^{(i)}(\mathscr{T}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(I_n^{(i)} \times \Omega) \cap \mathscr{A}^{(i)}] .$$

*) Буква c обозначает характеристическую функцию множества; в [1] мы ее (ошибочно) обозначили через C.

1. СЛУЧАЙНАЯ $\mathscr{T}$-МЕРА

Комплексную функцию X, определенную на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$, назовем *мерой на* $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$, если она вполне аддитивна на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. Это значит, более точно, что существуют неотрицательные вполне аддитивные меры X_j на $\mathscr{A}^{(2)}(\mathscr{T})$, которые конечны на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ и для которых имеет место равенство

$$X(G) = X_1(G) - X_2(G) + i[X_3(G) - X_4(G)] \tag{1.1}$$

для всякого $G \in \mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. Без ограничения общности мы будем предполагать, что они уже выбраны таким образом, что для всякого $G \in \mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ величины $X_1(G)$ и $X_2(G)$ [или $X_3(G)$ и $X_4(G)$] равны *верхней* и *нижней вариации* на G функции $\operatorname{Re} X$ [или $\operatorname{Im} X$]. При этой оговорке мы обозначим через $|X|$ неотрицательную в вполне аддитивную меру, определенную на $\mathscr{A}^{(2)}(\mathscr{T})$ соотношением

$$|X|(G) = \sum_{j=1}^{4} X_j(G) . \tag{1.2}$$

В только что сделанных определениях мы предполагали, что X определена на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. Комплексную функцию X, определенную и конечно-аддитивную на $\mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T})$, мы назовем тоже мерой на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$, если только она расширима на меру на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. Это расширение, если оно существует, однозначно и мы его обозначим тоже через X. Расширение существует тогда и только тогда, когда полные вариации функций $\operatorname{Re} X$ и $\operatorname{Im} X$ конечны на всяком множестве из $\mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T})$ и вполне аддитивны.

Систему всех мер на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$, удовлетворяющих условиям

$$X(A \times B \times \Gamma) = \overline{X}(B \times A \times \Gamma) \quad \text{для} \quad A \times B \times \Gamma \in \mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T}) , \tag{1.3.1}$$

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varrho_j \bar{\varrho}_k X(A_j \times A_k \times (\Gamma_j \cap \Gamma_k)) \geqq 0 \tag{1.3.2}$$

для непресекающихся множеств $A_j \times \Gamma_j \in \mathscr{R}^{(1)}(\mathscr{T})$ и для произвольных комплексных чисел ϱ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, обозначим через $\mathscr{M}(\mathscr{T})$. Систему вес мер на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ *медленного роста* обозначим через $\mathscr{N}(\mathscr{T})$; значит, $X \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$ тогда и только тогда, когда существует l такое, что

$$\int [(1 + a^2)(1 + b^2)]^{-l} \, |X| (\mathrm{d}(a, b, \omega)) < \infty . \tag{1.4}$$

Интеграл $\int f(a, b, \omega) \, X(\mathrm{d}(a, b, \omega))$ от комплексной $A^{(2)}(\mathscr{T})$-измеримой функции f понимается всегда в смысле абсолютно сходящегося интеграла, т.е. интеграл существует тогда и только тогда, когда

$$\int |f(a, b, \omega)| \, |X| (\mathrm{d}(a, b, \omega)) < \infty .$$

Через $\mathscr{L}_0(\mathscr{T})$ мы обозначим систему всех $\mathscr{T}$-*простых* функций (по поводу определения см. [1], 1.8) и через $\mathscr{L}(\mathscr{T})$ систему всех функций, определенных на $R^{(1)} \times \Omega$, которые $\mathscr{A}^{(1)}(\mathscr{T})$-измеримы и для которых существуют n и K такие, что

$$(1.5) \qquad |f(a, \omega)| \leqq K \quad \text{для} \quad a \in I_n \quad \text{и} \quad f(a, \omega) = 0 \quad \text{для} \quad a \notin I_n \,.$$

Если X – мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ и $f, g \in \mathscr{L}(\mathscr{T})$, то интеграл

$$(1.6) \qquad \int f(a, \omega)\, \bar{g}(b, \omega)\, X(\mathrm{d}(a, b, \omega))$$

существует и мы его обозначим через (f, g). Если, кроме того, $X \in \mathscr{M}(\mathscr{T})$, то имеют место соотношения $(f, g) = \overline{(g, f)}$ и $(f, f) \geqq 0$; они получаются легко из (1.3.1) и (1.3.2) при помощи очевидных предельных переходов. Хотя $(.\,, .)$ не удовлетворяет всем аксиомам гильбертова пространства, только что написанных два соотношения влечут за собой неравенства

$$(1.7) \qquad \|f + g\| \leqq \|f\| + \|g\|\,, \quad |(f, g)| \leqq \|f\| \cdot \|g\|\,,$$

где $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Если нам это понадобится, мы будем выражать зависимость символов $(.\,, .)$ и $\|.\|$ от X через $(.\,, .)_X$ и $\|.\|_X$.

Через $\mathscr{L}_X(\mathscr{T})$ мы обозначим систему всех $\mathscr{A}^{(1)}(\mathscr{T})$-измеримых функций, определенных на $R^{(1)} \times \Omega$, для которых существует интеграл

$$(1.8) \qquad \int f(a, \omega)\, \bar{g}(b, \omega)\, X(\mathrm{d}(a, b, \omega))\,.$$

Так как для всякой $f \in \mathscr{L}_X(\mathscr{T})$ существует последовательность $f_n \in \mathscr{L}(\mathscr{T})$, для которой $\|f - f_n\|_X \to 0$, то при помощи (1.7) легко проверяется, что интеграл (1.6) существует для всех $f, g \in \mathscr{L}_X(\mathscr{T})$. Значит, мы можем определить $(.,.)$ и $\|.\|$ через интегралы (1.6) и (1.8) для всех $f, g \in \mathscr{L}_X(\mathscr{T})$ и соотношения (1.7) опять сохраняются.

Подобно тому, как мы определили меру на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ и системы $\mathscr{L}_0(\mathscr{T})$, $\mathscr{L}(\mathscr{T})$, $\mathscr{L}_X(\mathscr{T})$, $\mathscr{M}(\mathscr{T})$, $\mathscr{N}(\mathscr{T})$, можем определить меру на $B^{(2)}$ и системы $\mathscr{L}_0$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_X$, $\mathscr{M}$, $\mathscr{N}$ и доказать аналогичные утверждения. Все различия заключаются только в том, что отсутствуют символы $\mathscr{T}$, $\Gamma \in \mathscr{T}$ и $\omega \in \Omega$.

Позже мы будем пользоваться следующим утверждением:

1.9 *Пусть X – мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ и пусть имеет место следующее предположение: Если $P(\Gamma) = 0$ для некоторого $\Gamma \in \mathscr{T}$, то $X(C \times \Gamma) = 0$ для всех $C \in \mathscr{B}^{(2)}$. Тогда существует функция $X^{(1)}$, определенная на $\mathscr{B}^{(2)} \times \Omega$ и такая, что*

(1.9.1) $\quad X^{(1)}(C, .)$ – *$\mathscr{T}$-измерима для вяского $C \in \mathscr{B}^{(2)}$*

(1.9.2) $\quad X^{(1)}(., \omega)$ – *мера на $\mathscr{B}^{(2)}$ для всякого $\omega \in \Omega$*

(1.9.3) $$\int |X^{(1)}|(C,\omega)\,P(\mathrm{d}\omega) < \infty \text{ для всякого } C \in \mathscr{B}^{(2)}.$$

(1.9.4) $$\int_{\Gamma} X^{(1)}(C,\omega)\,P(\mathrm{d}\omega) = X(C \times \Gamma) \text{ для всех } C \in \mathscr{B}^{(2)} \text{ и } \Gamma \in \mathscr{T}.$$

Примечание. Соотношение (1.9.3) требует, чтобы функция $|X^{(1)}|(C, .)$ (т. е. полная вариация меры $X^{(1)}(., \omega)$ в смысле определения (1.2)) была измерима. Из доказательства теоремы следует, что она $\mathscr{T}$-измерима.

Доказательство. Если $\Gamma \in \mathscr{T}$ и $P(\Gamma) = 0$, то для произвольных $\Delta \subset \Gamma$, $D \subset C \in \mathscr{B}^{(2)}$ имеет место $X(D \times \Delta) = 0$ и, следовательно, $X_j(C \times \Gamma) = 0$ для $j = 1, 2, 3, 4$. По теореме Радона-Никодима существуют для $j = 1, 2, 3, 4$ неорицательные функции Y_j, определенные на $\mathscr{A}^{(2)} \times \Omega$ и такие, что для всякого $C \in \mathscr{B}^{(2)}$ функция $Y_j(C, .)$ $\mathscr{T}$-измерима и

(1.9.5) $$\int_{\Gamma} Y_j(C,\omega)\,P(\mathrm{d}\omega) = X_j(C \times \Gamma) \quad \text{для всех} \quad \Gamma \in \mathscr{T}.$$

Применяя метод доказательства теории регулярных условных вероятностей (см. [2] или [1], доказательство теоремы 1.4) мы можем доказать, что функции Y_j можно выбрать таким образом, что $Y_j(., \omega)$ – вполне аддитивная мера на $\mathscr{A}^{(2)}$ для всякого $\omega \in \Omega$ и $j = 1, 2, 3, 4$. Если положить $X^{(1)} = Y_1 - Y_2 + i(Y_3 - Y_4)$, то $X^{(1)}$ исполняет условия (1.9.1), (1.9.2) и (1.9.4). Для всякого $\omega \in \Omega$ обозначим через $X_1^{(1)}(., \omega)$ и $X_2^{(1)}(., \omega)$ [или через $X_3^{(1)}(., \omega)$ и $X_4^{(1)}(., \omega)$] верхнюю и нижнюю вариацию меры $\operatorname{Re} X^{(1)}(., \omega)$ [или $\operatorname{Im} X^{(1)}(., \omega)$]. Для $C \in \mathscr{R}^{(2)}$ имеет место соотношение

(1.9.6) $$X_1^{(1)}(C,\omega) = \sup_{D \subset C,\, D \in \mathscr{R}^*} \big(Y_1(D,\omega) - Y_2(D,\omega)\big) \leqq Y_1(C,\omega),$$

причем $\mathscr{R}^*$ обозначает некоторую удобную счетную подсистему системы $\mathscr{R}^{(2)}$ (например, систему всех конечных соединений полуоткрытых двумерных интервалов с рациональными концами). Мы видим, что $X_1^{(1)}(C, .)$ $\mathscr{T}$-измерима для всякого $C \in \mathscr{R}^{(2)}$. Так как $X_1^{(1)}(., \omega)$ вполне аддитивна на $\mathscr{B}^{(2)}$ для всех $\omega \in \Omega$, мы можем доказать (напр., при помощи [3], I. 6. Th. B), что $X_1^{(1)}(C, .)$ $\mathscr{T}$-измерима для всех $C \in \mathscr{B}^{(2)}$. Аналогичные утверждения имеют место и для $X_2^{(1)}, X_3^{(1)}, X_4^{(1)}$ и, следовательно, для $|X^{(1)}| = \sum_{j=1}^{4} X_j^{(1)}$. Из (1.9.5) и (1.9.6) наконец следует, что имеет место (1.9.3).

Пусть ξ – комплексная функция, определенная на $\mathscr{B}^{(1)} \times \Omega$. Предположим, что $\xi(A) \in \mathscr{H}$ для всякого $A \in \mathscr{B}^{(1)}$ и что она конечно-аддитивна на $\mathscr{B}^{(1)}$, т. е. $\xi(A \cup B) = \xi(A) + \xi(B)$ для $A \cap B = \emptyset$. При этом равенство понимается в смысле оговорки в [1], абзац 0, т.е. P-почти всюду. В этих условиях конечно-аддитивны функции $X^{(0)}$ и X, определенные на $\mathscr{R}^{(2)}$ и $\mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T})$ соотношениями

(1.10) $$X^{(0)}(A \times B) = \mathsf{E}\big(\xi(A)\,\bar{\xi}(B)\big) \quad \text{и} \quad X(A \times B \times \Gamma) = \mathsf{E}\big(\xi(A)\,\bar{\xi}(B)\,c(\Gamma)\big).$$

В теории случайных процессов второго порядка называют ξ *случайной мерой,* если $X^{(0)}$ – мера на $\mathscr{B}^{(2)}$. Следуя этой терминологии мы назовем ξ *случайной* $\mathscr{T}$*-мерой*, если X является мерой на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. При этих определениях вытекает аддитивность функции ξ из (1.10); ее не надо явно требовать. Из (1.10) следует далее, что $X^{(0)} \in \mathscr{M}$ и $X \in \mathscr{M}(\mathscr{T})$. Для данной случайной $\mathscr{T}$-меры ξ мы будем называть $X^{(0)}$ [или X] мерой на $\mathscr{B}^{(2)}$ [или на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$], соответствующей ξ. Имеет место следующее утверждение:

1.11 *Случайная мера ξ является случайной $\mathscr{T}$-мерой тогда и только тогда, когда существует на $\mathscr{B}^{(2)} \times \Omega$ функция $X^{(1)}$, удовлетворяющая условиям* (1.9.1)–(1.9.3) *и для которой*

$$\mathsf{E}(\xi(A)\,\bar{\xi}(B)\,|\,\mathscr{T}) = X^{(1)}(A \times B, .)\,. \tag{1.11.1}$$

Доказательство. Если условия теоремы выполнены, то для всякого $\Gamma \in \mathscr{T}$ имеют место соотношения

$$|X(A \times B \times \Gamma)| = |\mathsf{E}(c(\Gamma)\,\mathsf{E}(\xi(A)\,\xi(B)\,|\,\mathscr{T})| =$$
$$= \left|\int_\Gamma X^{(1)}(A \times B, \omega)\,P(\mathrm{d}\omega)\right| \leqq \int_\Gamma |X^{(1)}|\,(A, B, \omega)\,P(\mathrm{d}\omega)\,,$$

из которых вытекает, что X – мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. Если, наоборот, X – мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$, то по теореме 1.9 существует $X^{(1)}$, удовлетворяющая условиям (1.9.1)–(1.9.4); соотношение (1.11.1) сразу следует из (1.9.4).

Утверждение 1.11 объясняет более подробно понятие случайной $\mathscr{T}$-меры; это случайная мера, которая остается случайной мерой и при условии $\mathscr{T}$, аналогично тому, как $\mathscr{T}$-ортогональная мера (см. [1]) сохраняла ортогональность при условии $\mathscr{T}$. При помощи утверждения 1.11 мы можем тоже легко показать пример случйаной меры, которая не является случайной $\mathscr{T}$-мерой относительно некоторой σ-алгебры $\mathscr{T}$. Пусть, например, ξ – аддитивная функция, порожденная процессом брауновского движения. Это случайная мера в смысле нашего определения – она даже ортогональна – но если положить $\mathscr{T} = \mathscr{S}$, то $\mathsf{E}(\xi(A)\,\bar{\xi}(B)\,|\,\mathscr{T}) = \xi(A)\,\bar{\xi}(B)$ и общественстно, что полная вариация функции $\xi(A)\,\bar{\xi}(B)$ бесконочна для почти всех ω. Наоборот, всякая случайная мера ξ является случайной $\mathscr{T}$-мерой для произвольной σ-алгебры $\mathscr{T}$ независимой от ξ, так как в этих условиях $X(A \times B \times \Gamma) = X^{(0)}(A \times B)\,P(\Gamma)$. Случайную $\mathscr{T}$-меру назовем случайной $\mathscr{T}$-мерой *медленного роста*, если соответствующая мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ принадлежит системе $\mathscr{N}(\mathscr{T})$.

Теперь мы определим *стохастический интеграл* по случайной $\mathscr{T}$-мере ξ. Для произвольной $f \in \mathscr{L}_0(\mathscr{T})$ стохастический интеграл

$$\xi(f) = \int f(a)\,\xi(\mathrm{d}a)$$

определяется тем же самым образом как и в [1], 1.9. Легко доказать, что имеют место следующие отношения (они соответствуют утверждению 1.10 в [1]).

(1.12.1) $$\mathsf{E}(\xi(f)\,\bar{\xi}(g)) = (f, g)_X\,,$$

(1.12.2) $$\|\xi(f)\| = \|f\|_X\,,$$

(1.12.3) $$\mathsf{E}(\xi(f)\,\bar{\xi}(g)\mid\mathcal{T}) = \int f(a,\,.)\,\bar{g}(b,\,.)\,X^{(1)}(\mathrm{d}(a, b),\,.)\,.$$

Здесь X — мера на $\mathcal{B}^{(2)}(\mathcal{T})$, соответствующая случайной $\mathcal{T}$-мере, и $X^{(1)}$ — функция, определенная в 1.11.

Очевидно, для всякой $f \in \mathcal{L}_X(\mathcal{T})$ и $\varepsilon > 0$ существует $f^* \in \mathcal{L}(\mathcal{T})$ так, что $\|f - f^*\|_X < \varepsilon$. Функция f^* удовлетворяет отношениям (1.5) для некоторых n и K, и мы можем найти $f^{**} \in \mathcal{L}_0(\mathcal{T})$ так, чтобы

$$\int |f^*(a, \omega) - f^{**}(a, \omega)|\; c(I_n^{(1)}, b)\; |X|\; (\mathrm{d}(a, b, \omega)) < \frac{\varepsilon}{K}$$

и чтобы f^{**} выполняла (1.5). Тогда

$$\|f - f^{**}\|_X \leqq \varepsilon + \int |f^*(a, \omega) - f^{**}(a, \omega)|\; (|f^*(b, \omega)| + $$
$$+ |f^{**}(b, \omega)|)\; |X|\; (\mathrm{d}(a, b, \omega)) \leqq 3\varepsilon\,.$$

Из этого следует, что для $f \in \mathcal{L}_X(\mathcal{T})$ существует последовательность $f_n \in \mathcal{L}_0(\mathcal{T})$, для которой $\|f - f_n\|_X \to 0$, и ввиду (1.12.2), мы можем опять принять за стохастический интеграл $\xi(f)$ предел в среднем (т.е. относительно нормы $\|.\|$) последовательности $\xi(f_n)$ (см., напр., [1]). Определение однозначно и имеют место отношения (1.12.1)–(1.12.3). Утверждения 1.14 и 1.17 статьи [1] тоже справедливы для только что определенного стохастического интеграла. Если ξ — случайная $\mathcal{T}$-мера такая, что $c(A) f \in \mathcal{L}_X(\mathcal{T})$ для всех $A \in \mathcal{B}^{(2)}$, то $\eta(A) = \int c(A, a) f(a)\, \xi(\mathrm{d}a)$ определяет новую случайную $\mathcal{T}$-меру (см. утверждение 1.16 в [1]) и если Y — ее мера на $\mathcal{B}^{(2)}(\mathcal{T})$, то

(1.13) $$Y(G) = \int_G f(a, \omega)\, \bar{f}(b, \omega)\, X(\mathrm{d}(a, b, \omega))\,.$$

2. $\mathcal{T}$-ГАРМОНИЗУЕМЫЕ ОБОБЩЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В теории стохастических процессов второго порядка называют стохастический процесс x на $(\Omega, \mathcal{S}, P)$ *гармонизуемым*, если существует случайная мера ξ, для которой $x(t) = \int e^{ita}\, \xi(\mathrm{d}a)$. Следуя этому определению и идеям абзаца 2 в [1], мы назовем комплексную функцию x, определенную на $\mathcal{D} \times \Omega$, *$\mathcal{T}$-гармонизуемым* [или *гармонизуемым*] *обобщенным процессом*, если $x(\varphi) \in \mathcal{H}$ для всякой $\varphi \in \mathscr{D}$ и если существует случайная $\mathscr{T}$-мера [или случайная мера] ξ медленного роста, для которой

$$x(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, \xi(\mathrm{d}a)\,. \tag{2.1}$$

При этом символы φ, $\mathscr{D}$ и $\mathscr{F}_\varphi$ имеют тот же смысл как и в [1], абзац 2. Интеграл (2.1) существует ввиду (1.4) и ввиду известных асимптотических свойств функции $\mathscr{F}_\varphi$.

2.2 *Если x — комплексная функция, определенная на $\mathscr{D} \times \Omega$, и если $x(\varphi) \in \mathscr{H}$ для всех $\varphi \in \mathscr{D}$, то x является $\mathscr{T}$-гармонизуемым обобщенным процессом тогда и только тогда, когда существует мера $X \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$, для которой*

$$\mathsf{E}(x(\varphi)\, \bar{x}(\psi)\, c(\Gamma)) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\; \overline{\mathscr{F}}_\psi(b)\, c(\Gamma)\, X(\mathrm{d}(a, b, \omega)) \tag{2.2.1}$$

для всех $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ и $\Gamma \in \mathscr{T}$. Если условие выполнено, то X является мерой на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$, соответствующей случайной $\mathscr{T}$-мере ξ в (2.1).

Доказательство. Необходимость сразу следует из свойств стохастического интеграла. Предположим наоборот, что условия теоремы выполнены. Так как мы не предполагаем, что $X \in \mathscr{M}(\mathscr{T})$, нам надо поступать следующим образом. Определим неотрицательную меру Z на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ отношением $Z(A \times B \times \Gamma) = |X|(A \times B \times \Gamma) + |X|(B \times A \times \Gamma)$. Ввиду предположений теоремы $Z \in \mathscr{M}(\mathscr{T}) \cap \mathscr{N}(\mathscr{T})$, и поэтому существует число l такое, что

$$L = \int [(1 + a^2)(1 + b^2)]^{-l}\, Z(\mathrm{d}(a, b, \omega)) < \infty\,.$$

Пусть $f \in \mathscr{L}_X$; значит, f не зависит от ω. Применяя приближения, которыми мы уже пользовались при построении стохастического интеграла (см. конец абзаца 1), мы можем найти $\psi \in \mathscr{D}$ для которой $\| |f - \psi| \|_Z < \varepsilon$. Так как всякая функция $\psi \in \mathscr{D}$ является пределом функций вида $\mathscr{F}_\varphi$ относительно обыкновенной топологии пространства быстро убывающих функций (fonctions temperées), то существует $\varphi \in \mathscr{D}$ для которой

$$(1 + a^2)^l\, |\psi(a) - \mathscr{F}_\varphi(a)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{L}}$$

для всех $a \in R^{(1)}$. Значит,

$$\| |\psi - \mathscr{F}_\varphi| \|_Z = \int |\psi(a) - \mathscr{F}_\varphi(a)|\,.$$

$$.\, |\psi(b) - \mathscr{F}_\varphi(b)|\, [(1 + a^2)(1 + b^2)]^l\, [(1 + a^2)(1 + b^2)]^{-l}\, Z(\mathrm{d}(a, b, \omega)) < \varepsilon\,.$$

Из только что доказанного следует, что для $f, g \in L_X$ существуют последовательности $\varphi_n, \psi_n \in \mathscr{D}$, для которых

$$\| |f - \mathscr{F}_{\varphi_n}| \|_Z \to 0 \quad \text{и} \quad \| |g - \mathscr{F}_{\psi_n}| \|_Z \to 0\,. \tag{2.2.2}$$

Пользуясь равенством $(\mathscr{F}_\varphi\, c(\Gamma),\ \mathscr{F}_\psi) = \overline{(\mathscr{F}_\psi,\ \mathscr{F}_\varphi\, c(\Gamma))}$, которое следует сразу из (2.2.1), мы получим

$$(fc(\Gamma), g)_X - (g, fc(\Gamma)) = (fc(\Gamma),\ g - \mathscr{F}_{\psi_n})_X - \overline{(g - \mathscr{F}_{\psi_n},\ fc(\Gamma))}_X + \\ + ((f - \mathscr{F}_{\varphi_n})\, c(\Gamma),\ \mathscr{F}_{\psi_n})_X - (\mathscr{F}_{\psi_n},\ (f - \mathscr{F}_{\varphi_n})\, c(\Gamma))_X\,.$$

Ввиду (2.2.2) каждый из четырех слагаемых правой части этого равенства стремится к нулю, и следовательно, $(fc(\Gamma), g)_X = \overline{(g, fc(\Gamma))}_X$. В частности, для X имеет место (1.3.1), и подобным образом доказывается (1.3.2). Значит, $X \in \mathscr{M}(\mathscr{T})$. Наконец, из (2.2.2) вытекает $\|(f - \mathscr{F}_{\varphi_n})\, c(\Gamma)\|_X \to 0$, $\|g - \mathscr{F}_{\psi_n}\|_X \to 0$ для всех $\Gamma \in \mathscr{T}$. Теперь мы уже можем пользоваться стандартной техникой, т.е. определить отображение T соотношением $T(\mathscr{F}_\varphi) = x(\varphi)$, для которого, ввиду (2.2.1),

$$|T(\mathscr{F}_\varphi)| = \|\mathscr{F}_\varphi\|_X \quad \text{и} \quad \mathsf{E}(T(\mathscr{F}_\varphi)\, \overline{T}(\mathscr{F}_\psi)\, c(\Gamma)) = (\mathscr{F}_\varphi\, c(\Gamma),\ \mathscr{F}_\psi)_X$$

и при помощи только что доказанных приближений расширить T на все пространство L_X. Опять имеют место соотношения

$$|T(f)| = \|f\|_X \quad \text{и} \quad \mathsf{E}(T(f)\, \overline{T}(g)\, c(\Gamma)) = (fc(\Gamma), g)_X\,,$$

и если мы положим $\xi(A) = T(c(A))$, то из последнего равенства вытекает $\mathsf{E}(\xi(A)\, \overline{\xi}(B)\, c(\Gamma)) = X(A \times B \times \Gamma)$. Значит, ξ – случайная $\mathscr{T}$-мера. Так как отображение T линейно и непрерывно по отношению к $|\,.\,|$ и $\|\,.\,\|_X$, то для всякой $f \in \mathscr{L}_X$ имеет место $T(f) = \xi(f)$. Отношение (2.1) является частным случаем последнего равенства.

Случайная $\mathscr{T}$-мера ξ определена отношением (2.1) однозначно, и мы будем ее называть *спектральной случайной мерой* обобщенного процесса x. Соответствующую меру X будем называть *спектральной мерой* обобщенного процесса x.

Аналогичные определения и утверждения имеют место и для гармонизуемых обобщенных процессов, если мы всюду отбросим $\mathscr{T}$, Γ и ω.

Очевидно, что гармонизуемый обобщенный процесс x $\mathscr{T}$-гармонизуемый для всякой σ-алгебры $\mathscr{T}$, независимой от x. Имеет место более общее предложение.

2.3 *Гармонизуемый обобщенный процесс x является $\mathscr{T}$-гармонизуемым тогда и только тогда, когда существует на $\mathscr{B}^{(2)} \times \Omega$ функция $X^{(1)}$, удовлетворяющая соотношениям* (1.9.1)–(1.9.3) *и для которой*

$$\mathsf{E}(x(\varphi)\, \overline{x}(\psi) \mid \mathscr{T}) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, \overline{\mathscr{F}}_\psi(b)\, X^{(1)}(\mathrm{d}(a, b), .)\,. \tag{2.3.1}$$

Доказательство. Если процесс x $\mathscr{T}$-гармонизуемый, то по теореме 1.11 существует функция $X^{(1)}$, выполняющая словия (1.9.1)–(1.9.3), и отношения (2.1) и (1.12.3) влечут за собой (2.3.1). Пусть, наоборот, условия теоремы выполнены. Тогда из (2.3.1) вытекает для произвольного $\Gamma \in \mathscr{T}$ равенство

$$\mathsf{E}(x(\varphi)\, \overline{x}(\psi)\, c(\Gamma)) = \mathsf{E}(c(\Gamma)\, \mathsf{E}(x(\varphi)\, \overline{x}(\psi) \mid \mathscr{T})) = \\ = \iint_\Gamma \mathscr{F}_\varphi(a)\, \mathscr{F}_\psi(b)\, X^{(1)}(\mathrm{d}(a, b), \omega)\, P(\mathrm{d}\omega)\,,$$

и если мы определим на $\mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T})$ функцию X отношением

$$X(A \times B \times \Gamma) = \int_\Gamma X^{(1)}(A \times B, \omega)\, P(\mathrm{d}\omega)\,,$$

то из доказательства теоремы 1.11 ясно, что X — мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ и что

$$\mathsf{E}(x(\varphi)\,\bar{x}(\psi)\,c(\Gamma)) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\,\overline{\mathscr{F}}_\psi(b)\,c(\Gamma)\,X(\mathrm{d}(a, b, \omega))\,.$$

Мера $X^{(0)}(C) = X(C \times \Omega)$ является спектральной мерой обобщенного процесса x и, следовательно, $X^{(0)} \in \mathscr{N}$. Но тогда $X \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$, и доказательство закончено.

3. СЛУЧАЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ r-ОГО ПОРЯДКА

В этом абзаце мы займемся решением дифференциального уравнения

(3.1) $$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m\, x^{(m)}(\varphi) = y(\varphi)\,.$$

Мы будем пользоваться обозначениями $f, g, \Omega_k, E_k, F_k, d_k, r_0, \mathscr{T}$ в том же смысле, как и в [1] абзац 3. В частности, $\mathscr{T}$ будет обозначать σ-алгебру, порожденную коэффициентами α_m (см. [1], 3.2.1). Далее положим

$$G_0 = \{(a, b, \omega) : f(a, \omega)\, f(b, \omega) = 0\}.$$

3.2 *Пусть y — $\mathscr{T}$-гармонизуемый обобщенный процесс со спектральной случайной мерой η и спектральной мерой Y. Тогда необходимым и достаточным условием для того, чтобы существовал $\mathscr{T}$-гармонизуемый обобщенный процесс x, удовлетворяющий уравнению* (3.1), *является одновременное выполнение следующих двух соотношений:*

(3.2.1) $$|Y|\,(G_0) = 0\,,$$

(3.2.2) $$\int |g(a, \omega)\, g(b, \omega)|\, [(1 + a^2)(1 + b^2)]^{-l}\, |Y|\, (\mathrm{d}(a, b, \omega)) < \infty$$

для некоторого l.

Если условия выполнены, то $\mathscr{T}$-гармонизуемый обобщенный процесс, удовлетворяющий уравнению (3.1), *имеет вид*

(3.2.3) $$\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a) + \sum_{k=1}^{r_0} \mathscr{F}_\varphi(d_k)\, \gamma_k + x_{-1}(\varphi)\,,$$

причем γ_k — произвольные случайные переменные, которые выполняют следующие условия:

(3.2.4) $$\gamma_k(\omega) = 0 \quad \textit{если} \quad \omega \notin \Omega_k\,,$$

(3.2.5) *существует* l_0 *такое, что* $\gamma_k(1 + d_k^2)^{o-l} \in \mathscr{H}$,

(3.2.6) *функция* $X_{0,k}$, *определенная на* $\mathscr{R}^{(2)}(\mathscr{T})$ *при помощи отношения*

$$X_{0,k}(A \times B \times \Gamma) = \mathsf{E}\left(\int c(A, a)\, g(a)\, \eta(\mathrm{d}a)\, c(\Gamma)\, c(B, d_k)\, \bar{\gamma}_k\right)$$

является мерой на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ *и принадлежит* $\mathscr{N}(\mathscr{T})$; *наконец* x_{-1} — *произвольный* $\mathscr{T}$-*гармонизуемый обобщенный процесс такой, что* $x_{-1}(\varphi, \omega) = 0$ *для* $\omega \notin \Omega_{-1}$.

Доказательство. Предположим, что существует $\mathscr{T}$-гармонизуемый обобщений процесс x, удовлетворяющий (3.1), и обозначим через X и ξ его спектральную меру и спектральную случайную меру. По предположению существует число l, для которого имеет место (1.4). Предположим сначала, что α_m ограничены. Подобным образом как и в [1], доказательство теоремы 3.4, получаются отношения

$$\int c(A, a)\, c(\Gamma)\, f(a)\, \xi(\mathrm{d}a) = \int c(A, a)\, c(\Gamma)\, \eta(\mathrm{d}a)\,, \tag{3.2.7}$$

$$\int_G f(a, \omega)\, \bar{f}(b, \omega)\, X(\mathrm{d}(a, b, \omega)) = Y(G)\,. \tag{3.2.8}$$

Если α_m не ограничены, определим ζ_n и Γ_n тем же самым образом как в [1], и положим далее $Z_n(A \times B \times \Gamma) = X(A \times B \times (\Gamma \cap \Gamma_n)) + Y(A \times B \times (\Gamma - \Gamma_n))$. Очевидно, $Z_n \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$ и $\mathsf{E}(\zeta_n(A)\, \bar{\zeta}_n(B)\, c(\Gamma)) = Z_n(A \times B \times \Gamma)$. Значит, ζ_n — случайная $\mathscr{T}$-мера, и при помощи предельного перехода мы убедимся в справедливости (3.2.7) и (3.2.8) в общем случае (см. [1], доказательство отношения (3.4.12)). Из (3.2.8) вытекает

$$|Y|\,(G) \leqq 2 \int_G |f(a, \omega)\, f(b, \omega)|\; |X|\, (\mathrm{d}(a, b, \omega)) \tag{3.2.9}$$

и из этого неравенства сразу следует (3.2.1). Чтобы доказать (3.2.2) положим

$$E^{(n)} = \left\{(a, \omega) : |f(a, \omega)| \geqq \frac{1}{n}\right\};$$

$$g_n(a, \omega) = [f(a, \omega)]^{-1}\,, \quad \text{если} \quad (a, \omega) \in E^{(n)}\,;$$

$$g_n(a, \omega) = 0\,, \quad \text{если} \quad (a, \omega) \notin E^{(n)}\,.$$

Ввиду (3.2.9) имеют место неравенства

$$\int_G |g_n(a, \omega)\, g_n(b, \omega)|\; |Y|\, (\mathrm{d}(a, b, \omega)) \leqq$$

$$\leqq 2 \int_G |g_n(a, \omega)\, g_n(b, \omega)\, f(a, \omega)\, f(b, \omega)|\; |X|\, (\mathrm{d}(a, b, \omega)) \leqq 2|X|\, (G)$$

для всякого $G \in \mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$. При помощи предельного перехода получаем отсюда

$$\int_G |g(a, \omega)\, g(b, \omega)|\, |Y|\, (\mathrm{d}(a, b, \omega)) \leqq 2|X|\, (G)\,,$$

и имея в виду (1.4), мы убеждаемся в справедливости (3.2.2).

Если мы наконец определим x_k и γ_k тем же самым образом как в [1], отношения (3.4.9) и (3.4.21), то x можно написать в виде (3.2.3), и очевидно выполнены (3.2.4) и (3.2.5). Последнее требование (3.2.6) вытекает сразу из неравенства

$$|X_{0,k}(A \times B \times \Gamma)| =$$
$$= \left| \mathsf{E} \left(\int c(A, a)\, c(F_0, a)\, \xi(\mathrm{d}a) \,.\, \overline{\int c(\Gamma)\, c(B, b)\, c(F_k, b)\, \xi(\mathrm{d}b)} \right) \right| \leqq |X|\, (A \times B \times \Gamma)\,,$$

которое легко получается при помощи (3.2.7).

Пусть, наоборот, выполнены условия (3.2.1) и (3.2.2) и пусть γ_k и x_{-1} удовлетворяют требованиям теоремы. Определим ξ_k $(k = -1, 0, 1, \ldots, r_0)$ тем же самым образом как в [1] и положим, далее, для $h, k = -1, 0, 1, \ldots, r_0$

$$X_{h,k}(A \times B \times \Gamma) = \mathsf{E}(\xi_h(A)\, \bar{\xi}_k(B)\, c(\Gamma))\,.$$

Мы прежде всего докажем, что $X_{h,k} \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$. Это вытекает для $(h, k) = (0, 0)$ из соотношения

$$X_{0,0}(G) = \int_G g(a, \omega)\, \bar{g}(b, \omega)\, Y(\mathrm{d}(a, b, \omega))$$

и из предположения (3.2.2), для $h \geqq 1$ и $k \geqq 1$ из неравенств

$$|X_{h,k}(A \times B \times \Gamma)| = |\mathsf{E}(c(A, d_h)\, c(B, d_k)\, c(\Gamma)\, \gamma_h \bar{\gamma}_k)| \leqq$$
$$\leqq \mathsf{E}(c(A, d_h)\, c(B, d_k)\, c(\Gamma)\, |\gamma_h \gamma_k|)\,,$$

$$\int [(1 + a^2)(1 + b^2)]^{-l}\, |X_{h,k}|\, (\mathrm{d}(a, b, \omega)) \leqq \mathsf{E}([(1 + d_h^2)(1 + d_k^2)]^{-l}\, |\gamma_h \gamma_k|)$$

и из соотношения (3.2.5), и для $X_{0,k}$ и $X_{k,0}$ с $k \geqq 1$ из (3.2.6). Соотношения $X_{-1,-1} \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$ и $X_{-1,k} \equiv 0$ и $X_{k,-1} \equiv 0$ для $k \neq -1$ очевидны. Из только что доказанного следует, что $\xi = \sum_{k=-1}^{r_0} \xi_k$ является случайной $\mathscr{T}$-мерой, что соответствующая мера на $\mathscr{B}^{(2)}(\mathscr{T})$ равна $X = \sum_{h,k=-1}^{r_0} X_{h,k}$ и что $X \in \mathscr{N}(\mathscr{T})$.

Если мы наконец определим x_k как в [1], мы можем доказать тем самым образом, что $\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_k^{(m)}(\varphi) = 0$ для $k \neq 0$ и что

$$\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_0^{(m)}(\varphi) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, c(F_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a)\,.$$

Наконец, ввиду (3.2.1)

$$\mathsf{E}\left(\left|\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, c(E_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a)\right|^2\right) =$$

$$= \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, \overline{\mathscr{F}}_\varphi(b)\, c(G_0, a, b, \omega)\, Y(\mathrm{d}(a, b, \omega)) \leqq M|Y|(G) = 0$$

и, следовательно, $\int \mathscr{F}_\varphi(a)\, c(E_0, a)\, \eta(\mathrm{d}a) = 0$. Из этого вытекает, что $\sum_{m=0}^{r} \alpha_m x_0^{(m)}(\varphi) = y(\varphi)$, и мы доказали, что $\sum_{k=-1}^{r_0} x_k$ удовлетворяет уравнению (3.1).

Примечание. Подобным образом как и в [1], абзац 4, мы могли бы тоже описать общее $\mathscr{T}$-гармонизуемое решение обыкновенного разностного уравнения.

Литература

[1] *М. Иржина:* Случайные дифференциальные и разностные уравнения со случайными коэффициентами и случайной правой частью. Чехосл. мат. ж. *12* (*87*), 1962, 457–474.

[2] *М. Иржина:* Условные вероятности на σ-алгебрах со счетным базисом. Чехосл. мат. ж. *4* (*79*), 1954, 372–380.

[3] *P. Halmos:* Measure theory. New York 1950.

Summary

HARMONISABLE SOLUTIONS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM COEFFICIENTS AND RANDOM RIGHT-HAND SIDE

MILOSLAV JIŘINA, Praha

The article is a continuation of [1] (see the list of references) and in this summary we use the notation introduced in the summary of [1]. As in [1] we solve the differential equation (3.1), but we suppose here that x is a $\mathscr{T}$-harmonisable random distribution, i.e. a complex function defined on $\mathscr{D} \times \Omega$ and such that

$$\mathsf{E}(x(\varphi)\, \bar{x}(\psi)\, c(\Gamma)) = \int \mathscr{F}_\varphi(a)\, \overline{\mathscr{F}}_\psi(b)\, c(\Gamma)\, X(\mathrm{d}(a, b, \omega))$$

for some σ-additive set function X of bounded variation; $\mathscr{F}_\varphi$ denotes the Fourier transform of $\varphi \in \mathscr{D}$. We are interested in solutions of the same type. The main result can be expressed as follows (Theorem 3.2):

In order that there may exist a $\mathscr{T}$-harmonisable random distribution x satisfying (3.1), *it is necessary and sufficient that both* (3.2.1) *and* (3.2.2) (*for some l*) *be fulfilled where G_0 denotes the set* $\{(a, b, \omega) : f(a, \omega) f(b, \omega) = 0\}$. Also, the general form of the solution is desribed.