Czechoslovak Mathematical Journal

Tibor Šalát

Zu einigen Fragen der Gleichverteilung (mod 1)

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 18 (1968), No. 3, 476–488

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/100847`

ZU EINIGEN FRAGEN DER GLEICHVERTEILUNG (mod 1)

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

(Eingegangen am 26. Januar 1967)

Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, in deren Definitionsbereich jede natürliche Zahl gehört. Es sei $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$. Bezeichnen wir mit $N(P; \alpha, \beta)$ die Anzahl aller derjenigen natürlichen $x \leqq P$, für welche $\alpha \leqq \{f(x)\} < \beta$ gilt (siehe Definitionen und Bezeichnungen, 6.). Die Funktion $f(x)$ nennt man gleichverteilt (mod 1), wenn für alle α, β; $0 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$ die Beziehung

$$N(P; \alpha, \beta) = P(\beta - \alpha) + o(P) \quad (P \to +\infty)$$

gilt.

Anstatt „die Funktion $f(x)$ ist gleichverteilt (mod 1)" sagen wir auch „die Folge $\{a_x\}_{x=1}^{\infty}$; $a_x = f(x)$, ist gleichverteilt (mod 1)".

Die Definition der Gleichverteilung (mod 1) und die Hauptergebnisse über dieselbe befinden sich in der Arbeit [1]. Dort ist auch das folgende Kriterium der Gleichverteilung (mod 1) bewiesen, das wir im weiteren benutzen werden:

Die Funktion $f(x)$ ist dann und nur dann gleichverteilt (mod 1), *wenn für jedes* $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{P \to \infty} \frac{1}{P} \sum_{x=1}^{P} e^{2\pi i m f(x)} = 0$$

gilt.

In der Arbeit [2] studiert man ausser anderem auch einige Fragen, die mit der Gleichverteilung der Funktionen $f_t(x) = t q_1 q_2 \ldots q_x$ zusammenhängen, wobei t eine reelle Zahl und $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen ist, welche die Bedingungen $q_k > 1$ und $\lim_{k \to \infty} q_k = +\infty$ erfüllt. Diese Fragen kann man mit Hilfe der Cantorschen Entwicklungen der Zahlen

$$t = \varepsilon_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \tag{1}$$

studieren, wobei $\varepsilon_i(t)$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ ganze Zahlen mit $0 \leqq \varepsilon_i(t) < q_i$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ sind und wo für unendlich viele i $\varepsilon_i(t) < q_i - 1$ ist.

Im ersten Teil dieser Arbeit verallgemeinern wir ein Ergebnis der Arbeit [2]. Im zweiten Teil der Arbeit werden einige Ergebnisse über die Gleichverteilung (mod 1) der Funktionen $F_t(x) = \varepsilon_x(t)/q_x$ abgeleitet (siehe (1)).

DEFINITIONEN UND BEZEICHNUNGEN

1. Wenn A eine Menge von natürlichen Zahlen ist, dann setzen wir bei natürlichem n $A(n) = \sum_{a \leqq n, a \in A} 1$. Weiter setzen wir

$$\delta_1(A) = \liminf_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n}, \quad \delta_2(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n} \quad \text{und} \quad \delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{A(n)}{n},$$

sobald dieser Grenzwert existiert. Die Zahlen $\delta_1(A)$, $\delta_2(A)$ und $\delta(A)$ nennt man die untere asymptotische Dichte, die obere asymptotische Dichte und die asymptotische Dichte der Menge A.

2. Wenn $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine Folge von natürlichen Zahlen ist, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, dann zerfällt bei natürlichem n das ganze Intervall $\langle 0, 1)$ in $q_1 q_2 \ldots q_n$ Intervalle n-ter Ordnung

$$i_n^{(k)} = \left\langle \frac{k}{q_1 q_2 \ldots q_n}, \frac{k+1}{q_1 q_2 \ldots q_n} \right) \quad (k = 0, 1, \ldots, q_1 q_2 \ldots q_n - 1).$$

Wenn

$$\frac{k}{q_1 q_2 \ldots q_n} = \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \frac{\varepsilon_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\varepsilon_n}{q_1 q_2 \ldots q_n}$$

ist, wo ε_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ganze Zahlen sind, $0 \leqq \varepsilon_i < q_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, dann sagen wir, dass das Intervall $i_n^{(k)}$ zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ gehört. Wenn $t \in i_n^{(k)}$ ist und (1) die Cantorsche Entwicklung von t ist, dann ist $\varepsilon_0(t) = 0$ und $\varepsilon_i(t) = \varepsilon_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

3. $|M|$ bezeichnet das Lebesguesche Mass der Menge M und $|M|_e$ bezeichnet das äussere Lebesguesche Mass der Menge M.

4. Die Menge $M \subset \langle 0, 1)$ nennt man homogen in $\langle 0, 1)$, wenn eine solche Zahl $d \in \langle 0, 1\rangle$ existiert, dass für jedes Intervall $I \subset \langle 0, 1)$ die Beziehung $d = |M \cap I|_e / |I|$ gilt.

5. In der ganzen Arbeit bedeutet $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine folge von natürlichen Zahlen, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$.

6. $[u]$ ist der ganze Teil von u, $\{u\}$ ist der Bruchteil von u, also $u = [u] + \{u\}$.

7. $\{a_k\}_k'$ bedeutet die Menge aller Häufungspunkte der Folge $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

1

In der Arbeit [2] ist bewiesen, dass die Funktion $f_t(x)$ dann und nur dann gleichverteilt (mod 1) ist, wenn die Zahl t die Form

$$t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\vartheta_k q_k]}{q_1 q_2 \dots q_k}$$

hat, wo a_0 eine ganze Zahl und $\vartheta_k = \{\varphi(k)\}$ ist, wobei $\varphi(x)$ eine gleichverteilte (mod 1) Funktion ist. Dabei wird

$$(i) \qquad \lim_{k \to \infty} q_k = +\infty .$$

vorausgesetzt.

Wir zeigen jetzt, dass die Voraussetzung (i) durch die schwächere Voraussetzung

$$(ii) \qquad \sum_{k=1}^{P} \frac{1}{q_k} = o(P) \quad (P \to +\infty)$$

ersetzt werden kann (siehe den Satz 1,1).

Die Voraussetzung (ii) ist tatsächlich schwächer als die Voraussetzung (i). Es ist vor allem ersichtlich, dass aus (i) die Voraussetzung (ii) folgt. Mit Hilfe einfacher Beispiele kann man zeigen, dass im allgemeinen aus (ii) die Voraussetzung (i) nicht folgt. Definieren wir z. B. $q_k = 2$, wenn k ein Quadrat ist, anderenfalls $q_k = k + 1$. Für die so definierte Folge gilt dann (i) nicht. Durch eine einfache Abschätzung bekommt man

$$\sum_{k=1}^{P} \frac{1}{q_k} \leqq \frac{\sqrt{P}}{2} + \sum_{k=1}^{P} \frac{1}{k} = \frac{\sqrt{P}}{2} + O(\log P) = o(P) ,$$

also (ii) gilt.

B e m e r k u n g 1,1. Unterziehen wir die Voraussetzung (ii) einer Analyse. Wir zeigen, dass diese Voraussetzung der folgenden anschaulichen Bedingung gleichbedeutend ist:

$$(iii) \qquad \text{Für jedes } s = 2, 3, 4, \dots \text{ ist } \delta(\{n;\, q_n = s\}) = 0 .$$

Tatsächlich, es gelte (iii) nicht. Dann existiert ein $s \geqq 2$ mit

$$(2) \qquad \delta_2(A_s) > 0 , \quad A_s = \{n;\, q_n = s\} .$$

Aus (2) folgt das Vorhandensein einer positiven Zahl η so, dass für unendlich viele P

$$A_s(P) > \eta P \tag{3}$$

ist. Durch eine einfache Abschätzung bekommt man für jene P, für welche (3) gilt, die Beziehung

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{q_k} \geqq \frac{\eta P}{Ps} = \frac{\eta}{s} > 0$$

und daraus folgt die Unmöglichkeit von (ii).

Es gelte (iii). Es sei $\varepsilon > 0$. Wählen wir eine natürliche Zahl $K > 1/\varepsilon$. Setzen wir $B = \{n;\ q_n \leqq K\}$. Aus (iii) folgt leicht $\delta(B) = 0$. Durch eine einfache Abschätzung bekommt man

$$\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{q_k} \leqq \frac{1}{P}\frac{B(P)}{2} + \frac{1}{P}\frac{P - B(P)}{K} < \varepsilon + \frac{1}{P}\frac{B(P)}{2},$$

so dass

$$\limsup_{P\to\infty}\frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}\frac{1}{q_k} \leqq \varepsilon$$

ist. Daraus folgt leicht (ii).

Lemma 1,1. *Es sei $f(x)$ gleichverteilt* (mod 1) *und die für alle natürlichen x definierte Funktion $\psi(x)$ erfülle die Bedingung*

$$\sum_{x=1}^{P}|\psi(x)| = o(P)\,. \tag{j}$$

Dann ist auch die Funktion $f(x) + \psi(x)$ gleichverteilt (mod 1).

Beweis. Auf Grund des am Anfang der Arbeit erwähnten Weylschen Kriteriums genügt es zu beweisen, dass für jede natürliche Zahl m

$$\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m(f(x)+\psi(x))} = o(1) \quad (P \to +\infty)$$

gilt.

Durch eine einfache Umformung bekommt man

$$\frac{1}{P}\Big|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m(f(x)+\psi(x))}\Big| = \frac{1}{P}\Big|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m(f(x)+\psi(x))} - \sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m f(x)} + \sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m f(x)}\Big| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{P}\Big|\sum_{x=1}^{P}e^{2\pi i m f(x)}\Big| + \frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}\big|e^{2\pi i m\psi(x)} - 1\big|\,.$$

Der erste Summand auf der rechten Seite ist gleich $o(1)$ wegen der Gleichverteilung (mod 1) der Funktion $f(x)$. Es genügt also zu beweisen, dass auch der zweite Summand gleich $o(1)$ ist. Dazu benutzen wir die Abschätzung

$$\left|e^{2\pi iu} - e^{2\pi iv}\right| = \left|2\pi i \int_u^v e^{2\pi iz}\,\mathrm{d}z\right| \leqq 2\pi \left|\int_u^v \left|e^{2\pi iz}\right| \mathrm{d}z\right| = 2\pi|v - u|\,,$$

u, v sind reelle Zahlen. So bekommen wir bei Benutzung der Voraussetzung (j)

$$\frac{1}{P}\sum_{x=1}^{P}\left|e^{2\pi im\psi(x)} - 1\right| \leqq \frac{2\pi m}{P}\sum_{x=1}^{P}|\psi(x)| = o(1)\,.$$

Satz 1,1. $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *erfülle die Bedingung* (ii). *Dann ist die Funktion* $f_t(x) = tq_1q_2 \ldots q_x$ *dann und nur dann gleichverteilt* (mod 1), *wenn eine gleichverteilte* (mod 1) *Funktion* $\varphi(x)$ *so existiert, dass* t *in der Form*

$$t = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\vartheta_k q_k]}{q_1 q_2 \ldots q_k} \tag{4}$$

dargestellt werden kann, wo a_0 *eine ganze Zahl und* $\vartheta_k = \{\varphi(k)\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ *ist.*

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass t auf die erwähnte Weise dargestellt werden kann. Dann ist bei $k \geqq 2$

$$tq_1q_2 \ldots q_{k-1} = D_k + \frac{[\vartheta_k q_k]}{q_k} + \frac{C_k}{q_k}\,,$$

D_k ganz,

$$C_k = \frac{[\vartheta_{k+1} q_{k+1}]}{q_{k+1}} + \ldots + \frac{[\vartheta_{k+i} q_{k+i}]}{q_{k+1} \ldots q_{k+i}} + \ldots\,.$$

Durch eine einfache Abschätzung bekommt man

$$0 < C_k < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{q_{k+i} - 1}{q_{k+1} \ldots q_{k+i}} = 1\,. \tag{4'}$$

Durch eine einfache Umformung bekommt man daraus

$$tq_1q_2 \ldots q_{k-1} = D_k + \vartheta_k + \frac{C_k - \{\vartheta_k q_k\}}{q_k}\,. \tag{5}$$

Setzen wir

$$g(x) = D_{x+1} + \vartheta_{x+1}\,, \quad v(x) = C_{x+1} - \{\vartheta_{x+1} q_{x+1}\}\,, \quad \psi(x) = \frac{v(x)}{q_{x+1}}\,.$$

Dann ist offensichtlich

$$|v(x)| < 1\,, \quad f_t(x) = tq_1q_2 \ldots q_x = g(x) + \psi(x)\,.$$

Nach der Voraussetzung des Satzes ist die Funktion $g(x)$ gleichverteilt (mod 1) und die Funktion $\psi(x)$ erfüllt die Voraussetzung (j) in Lemma 1,1. Aus Lemma 1,1 folgt dann, dass auch $f_t(x)$ gleichverteilt (mod 1) ist.

2. Es sei $f_t(x)$ gleichverteilt (mod 1). Es gibt Zahlen $a_0, a_1, \ldots; t_1, t_2, \ldots$, so dass folgende Beziehungen gelten:

$$
\begin{aligned}
&a_0 = [t]\,, && t = a_0 + t_1\,, && t_1 = \{t\}\,,\\
&t_1 q_1 = a_1 + t_2\,, && a_1 = [t_1 q_1]\,, && t_2 = \{t_1 q_1\} = \{t q_1\}, \ldots\\
(6)\quad &\vdots\\
&t_k q_k = a_k + t_{k+1}\,, && a_k = [t_k q_k]\,, && t_{k+1} = \{t_k q_k\} = \{t q_1 q_2 \ldots q_k\}, \ldots .
\end{aligned}
$$

Bei natürlichem x ist also

$$t_x = \{f_t(x-1)\}\,, \quad a_x = [\{f_t(x-1)\}\, q_x]\,.$$

Aus dem Weylschen Kriterium kann man leicht herleiten, dass zusammen mit der Funktion $f_t(x)$ auch die Funktion $f_t(x-1)$ $(f_t(0) = 1)$ gleichverteilt (mod 1) ist. So folgt aus (6), dass t in der Form (4) dargestellt werden kann, wobei $\varphi(x) = f_t(x-1)$ ist.

Jetzt beweisen wir ein ähnliches Ergebnis auch für die Funktion $F_t(x) = \varepsilon_x(t)/q_x$.

Satz 1,2. $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *erfülle die Bedingung* (ii). *Dann ist die Funktion* $F_t(x) = \varepsilon_x(t)/q_x$ *dann und nur dann gleichverteilt* (mod 1), *wenn eine gleichverteilte* (mod 1) *Funktion* $\varphi(x)$ *existiert, so dass* t *in der Form* (4) *dargestellt werden kann.*

Beweis. 1. Setzen wir voraus, dass t auf die erwähnte Weise dargestellt werden kann. Dann ist

$$F_t(x) = \frac{[\vartheta_x q_x]}{q_x} = \vartheta_x - \frac{\{\vartheta_x q_x\}}{q_x}\,.$$

Setzen wir $\psi(x) = -\{\vartheta_x q_x\}/q_x$. Dann erfüllt die Funktion $\psi(x)$ die Voraussetzung (j) in Lemma 1,1, und da die Funktion $\varphi(x)$ nach der Voraussetzung gleichverteilt (mod 1) ist, folgt aus Lemma 1,1, dass auch die Funktion $F_t(x)$ gleichverteilt (mod 1) ist.

2. Es sei $F_t(x)$ gleichverteilt (mod 1). Aus (5) bekommt man

$$f_t(x-1) = \frac{C_x}{q_x} + (F_t(x) + D_x)\,.$$

Wenn wir $\psi(x) = C_x/q_x$ setzen, stellen wir leicht mit Hilfe von (4') und der Voraussetzung des Satzes fest, dass $\psi(x)$ die Bedingung (j) in Lemma 1,1 erfüllt. Mit $F_t(x)$ ist auch $F_t(x) + D_x$ gleichverteilt (mod 1). Aus Lemma 1,1 folgt nun, dass $f_t(x-1)$ und natürlich auch $f_t(x)$ gleichverteilt (mod 1) ist. Nach dem Satze 1,1 kann man also t in der Form (4) darstellen, wo $\varphi(x)$ eine gleichverteilte (mod 1) Funktion ist.

Bezeichnen wir mit $H = H(q_1, q_2, \ldots)$ bzw. $H^* = H^*(q_1, q_2, \ldots)$ die Menge aller derjenigen

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \in \langle 0, 1)$$

(die Cantorsche Reihe von t), für welche $\{\varepsilon_k(t)/q_k\}_k' = \langle 0, 1\rangle$ ist bzw. $F_t(x) = \varepsilon_x(t)/q_x$ gleichverteilt (mod 1) ist. Verschiedene Eigenschaften der Menge $H(q_1, q_2, \ldots)$ studiert man in der Arbeit [3]. Dort ist bewiesen, dass aus

$$\limsup_{k \to \infty} q_k = +\infty \tag{7}$$

die Gleichheit $|H(q_1, q_2, \ldots)| = 1$ folgt. Es ist offensichtlich immer

$$H^*(q_1, q_2, \ldots) \subset H(q_1, q_2, \ldots) .$$

In der Arbeit [3] konstruiert man eine die Bedingung (7) erfüllende Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, für welche $H^*(q_1, q_2, \ldots) = \emptyset$ ist.

Zuerst beweisen wir einige allgemeine Eigenschaften, welche die Menge $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ bei beliebiger „Grundfolge" $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ hat.

Satz 2,1. *Es sei $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ eine beliebige Folge von natürlichen Zahlen, $q_k > 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Dann ist $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ eine homogene Borelsche $G_{\delta\sigma\delta}$ – Menge von erster Baireschen Kategorie in $\langle 0, 1)$* [1].

Zum Beweis des Satzes 2,1 benutzen wir die folgenden Hilfssätze.

Lemma 2,1. *$\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ bedeute die Folge aller rationalen Zahlen des Intervalles $(0, 1)$; m, s seien natürliche Zahlen. Bezeichnen wir mit $M_k(m, s)$ die Menge aller derjenigen*

$$t = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(t)}{q_1 q_2 \ldots q_l} \in \langle 0, 1) ,$$

für welche die folgende Aussage richtig ist: wenn $p_s(t)$ die Anzahl aller $l \leqq s$ bezeichnet, für welche $\varepsilon_l(t)/q_l < r_k$ ist, dann ist

$$p_s(t) \in \left(\left(r_k - \frac{1}{m}\right) . s\, , \ \left(r_k + \frac{1}{m}\right) . s\right).$$

Dann gilt

$$H^*(q_1, q_2, \ldots) = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s=n}^{\infty} M_k(m, s) . \tag{8}$$

---

[1]) $\langle 0, 1)$ betrachten wir als einen metrischen Raum mit der euklidischen Metrik.

Beweis von Lemma 2,1. Es sei $t_0 \in H^*(q_1, q_2, \ldots)$. Dann ist für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\delta\left(\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < r_k\right\}\right) = r_k. \tag{9}$$

Es seien k, m natürliche Zahlen. Aus (9) folgt, dass für alle hinreichend grossen s (für $s \geqq n$)

$$\left|\frac{p_s(t_0)}{s} - r_k\right| < \frac{1}{m},$$

also $t_0 \in M_k(m, s)$ gilt. Es ist also $t_0 \in M_k(m, s)$ und wegen der Beliebigkeit von k, m gehört t_0 zur rechten Seite von (8).

Es gehöre t_0 zur rechten Seite von (8). Dann ist für jedes $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$t_0 \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s=n}^{\infty} M_k(m, s).$$

Daraus folgt leicht

$$\delta\left(\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < r_k\right\}\right) = r_k \quad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Zur Beendung des Beweises genügt es zu zeigen, dass für jedes $\alpha \in (0, 1)$

$$\delta\left(\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < \alpha\right\}\right) = \alpha$$

gilt.

Wählen wir zur Zahl $\alpha \in (0, 1)$ zwei Folgen $\{\alpha'_l\}_{l=1}^{\infty}$, $\{\alpha''_l\}_{l=1}^{\infty}$ von rationalen Zahlen des Intervalles (0, 1) mit

$$\alpha'_l \to \alpha, \quad \alpha''_l \to \alpha, \quad \alpha'_l \leqq \alpha \leqq \alpha''_l \quad (l = 1, 2, 3, \ldots).$$

Aus den Inklusionen

$$\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < \alpha'_l\right\} \subset \left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < \alpha\right\} \subset \left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < \alpha''_l\right\}$$

folgt nun leicht

$$\alpha'_l \leqq \delta_1\left(\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < \alpha\right\}\right) \leqq \delta_2\left(\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_0} < \alpha\right\}\right) \leqq \alpha''_l$$

und durch den Grenzübergang $l \to +\infty$ bekommt man

$$\delta\left(\left\{n; \frac{\varepsilon_n(t_0)}{q_n} < \alpha\right\}\right) = \alpha .$$

Lemma 2,2. *B sei eine messbare Menge, $B \subset \langle 0, 1)$. Es sei für jedes $n = 1, 2, 3, \ldots$ die folgende Bedingung erfüllt: wenn k, k' zwei von den Zahlen $0, 1, \ldots, q_1 q_2 \ldots$ $\ldots q_n - 1$ sind, dann ist $|B \cap i_n^{(k)}| = |B \cap i_n^{(k')}|$. Behauptung: B ist homogen (in $\langle 0, 1)$).*

Beweis von Lemma 2,2 – siehe [3].

Beweis des Satzes 2,1. Da die Menge $M_k(m, s)$ bei festen k, m, s die Vereinigungsmenge einiger Intervalle der s-ten Ordnung ist, folgt aus (8) leicht, dass $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ eine $G_{\delta\sigma\delta}$ – Menge in $\langle 0, 1)$ ist.

Die Homogenität der Menge $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ beweisen wir mit Hilfe von Lemma 2,2. Es sei n eine natürliche Zahl und es seien k, k' beliebige zwei von den Zahlen $0, 1, \ldots, q_1 q_2 \ldots q_n - 1$. Setzen wir voraus, dass das Intervall $i_n^{(k)}(i_n^{(k')})$ zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ $(\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_n)$ gehört. Es sei $t \in H^* \cap i_n^{(k)}$,

$$t = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_l(t)}{q_1 q_2 \ldots q_l},$$

$$\varepsilon_l(t) = \varepsilon_l \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, n) .$$

Dann gehört die Zahl

$$t' = t + \sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon'_l - \varepsilon_l}{q_1 q_2 \ldots q_l} = \frac{\varepsilon'_1}{q_1} + \frac{\varepsilon'_2}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{\varepsilon'_n}{q_1 q_2 \ldots q_n} +$$
$$+ \frac{\varepsilon_{n+1}(t)}{q_1 q_2 \ldots q_{n+1}} + \ldots + \frac{\varepsilon_{n+i}(t)}{q_1 q_2 \ldots q_{n+i}} + \ldots$$

zum Intervall $i_n^{(k')}$ und $F_{t'}(x)$ unterscheidet sich von $F_t(x)$ höchstens für $x \leqq n$. Daher ist $t' \in H^*$ und folglich $t' \in H^* \cap i_n^{(k')}$. Wenn umgekehrt $t \in H^* \cap i_n^{(k')}$ ist, so haben wir

$$t' = t + \sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon_l - \varepsilon'_l}{q_1 q_2 \ldots q_l} \in H^* \cap i_n^{(k)} ;$$

die Menge $H^* \cap i_n^{(k')}$ entsteht also aus $H^* \cap i_n^{(k)}$ durch eine Verschiebung um

$$\left|\sum_{l=1}^{n} \frac{\varepsilon'_l - \varepsilon_l}{q_1 q_2 \ldots q_l}\right| .$$

Daraus folgt $|H^* \cap i_n^{(k)}| = |H^* \cap i_n^{(k')}|$ und nach Lemma 2,2 ist $H^* = H^*(q_1, q_2, \ldots)$ eine homogene Menge (in $\langle 0, 1)$).

Jetzt beweisen wir, dass $H^* = H^*(q_1, q_2, \ldots)$ von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$ ist. Wegen (8) genügt es zu beweisen, dass zu jeder natürlichen Zahl k eine solche Zahl m existiert, dass die Menge $A_{k,m} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s=n}^{\infty} M_k(m, s)$ von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$ ist.

Es sei also k eine natürliche Zahl. Wählen wir m so, dass $r_k + 1/m < 1$ ist. Es sei n eine beliebige natürliche Zahl. Es sei I ein Intervall, $I \subset \langle 0, 1)$. Wählen wir j so gross, dass das Intervall I ein gewisses Intervall $i_j^{(v)}$ von j-ter Ordnung enthält. Es gehöre $i_j^{(v)}$ zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j$. Wählen wir eine natürliche Zahl d so, dass $j + d > n$ und $d/(j + d) > r_k + 1/m$ ist. Das Intervall $i_j^{(v)}$ enthält das Intervall $i_{j+d}^{(w)}$ von $(j + d)$-ter Ordnung, welches zur Folge $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_j, 0, 0, \ldots, 0$ (d Nullen) gehört. Wenn $t \in i_{j+d}^{(w)}$ ist, dann haben wir $\varepsilon_l(t)/q_l < r_k$ für $l = j + 1, j + 2, \ldots, j + d$, und so

$$p_{j+d}(t) \geqq d\,, \quad \frac{p_{j+d}(t)}{j + d} \geqq \frac{d}{j + d} > r_k + \frac{1}{m}\,;$$

daher ist $t \notin \bigcap_{s=n}^{\infty} M_k(m, s)$. Daraus folgt, dass die Menge $\bigcap_{s=n}^{\infty} M_k(m, s)$ in $\langle 0, 1)$ (bei beliebigem n) nirgendsdicht ist. Die Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{s=n}^{\infty} M_k(m, s)$ ist also von erster Kategorie in $\langle 0, 1)$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Mit Hilfe des Satzes 1,2 beweisen wir jetzt das folgende Ergebnis über die Struktur der Menge $H^*(q_1, q_2, \ldots)$.

Satz 2,2. $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *erfülle die Bedingung (ii). Dann ist die Menge* $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ *bezüglich des Punktes* $1/2$ *symmetrisch.*

Beweis. Es sei $t_0 \in H^*(q_1, q_2, \ldots)$. Auf Grund des Satzes 1,2 existiert eine gleichverteilte (mod 1) Funktion $\varphi(x)$ so, dass

$$t_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[\vartheta_k q_k]}{q_1 q_2 \ldots q_k} \tag{10}$$

ist, wobei $\vartheta_k = \{\varphi(k)\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ ist.

Dann ist (10) die Cantorsche Reihe der Zahl t_0. Die Entwicklung

$$1 - t_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k - 1 - [\vartheta_k q_k]}{q_1 q_2 \ldots q_k} \tag{11}$$

ist die Cantorsche Reihe der Zahl $1 - t_0$. Das ist leicht einzusehen. Da $0 \leqq \vartheta_k < 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ ist, haben wir $[\vartheta_k q_k] \leqq q_k - 1$, also $q_k - 1 - [\vartheta_k q_k] \geqq 0$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Aus der Definition der Gleichverteilung (mod 1) der Funktion $\varphi(x)$ folgt, dass für unendlich viele k $\frac{1}{2} < \vartheta_k < 1$ ist. Für diese k ist $[\vartheta_k q_k] \geqq [\frac{1}{2} q_k] \geqq$

$\geqq [\frac{1}{2} . 2] = 1$, $q_k - 1 - [\vartheta_k q_k] \leqq q_k - 2$. Daraus folgt, dass (11) die Cantorsche Reihe der Zahl $1 - t_0$ ist.

Setzen wir jetzt $\tau_k = q_k - [\vartheta_k q_k]$, $\vartheta'_k = (\tau_k - 1)/q_k$. Dann gilt offenbar $q_k(1 - \vartheta_k) \leqq \leqq \tau_k < q_k(1 - \vartheta_k) + 1$ und so ist

$$1 - \vartheta_k - \frac{1}{q_k} \leqq \vartheta'_k < 1 - \vartheta_k . \tag{12}$$

Da die Folge $\{\vartheta_k\}_{k=1}^{\infty}$ nach der Voraussetzung gleichverteilt (mod 1) ist, ist auch die Folge $\{1 - \vartheta_k\}_{k=1}^{\infty}$ gleichverteilt (mod 1), was aus der Definition der Gleichverteilung (mod 1) sogleich einzusehen ist. Aus (12) und aus der Bedingung (*ii*) bekommen wir nach Lemma 1,1, dass auch die Folge $\{\vartheta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ gleichverteilt (mod 1) ist. Wenn wir jetzt die Entwicklung (11) berücksichtigen, bekommen wir auf Grund des Satzes 1,2 $1 - t_0 \in H^*(q_1, q_2, \ldots)$. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Es ist bekannt, dass jede messbare in $\langle 0, 1)$ homogene Menge das Mass 0 oder 1 hat (siehe [4]). Auf Grund des Satzes 2,1 ist also das Lebesguesche Mass von $H^*(q_1, q_2, \ldots)$ gleich 0 oder 1. Der folgende Satz löst vollständig die Frage über die Grösse des Lebesgueschen Masses dieser Menge.

Satz 2,3. a) *Wenn* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *die Bedingung* (*ii*) *erfüllt, dann ist* $|H^*(q_1, q_2, \ldots)| = 1$.
b) *Wenn* $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ *die Bedingung* (*ii*) *nicht erfüllt, dann ist* $|H^*(q_1, q_2, \ldots)| = 0$.

Beweis. a) $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ erfülle die Bedingung (*ii*). Wie wir schon im Beweis des Satzes 1,2 gesehen haben, ist

$$F_t(x + 1) = (f_t(x) - D_{x+1}) - \frac{C_{x+1}}{q_{x+1}} . \tag{13}$$

Nach einem Ergebnis der Arbeit [5] ist die Funktion $t\, M(x)$ für fast alle reellen t gleichverteilt (mod 1), wenn $M(x)$ bei natürlichem x ganz ist und wenn für je zwei natürliche $x_1 \neq x_2$ auch $M(x_1)$ von $M(x_2)$ verschieden ist. Wenn wir $M(x) = q_1 q_2 \ldots \ldots q_x$ setzen, dann sehen wir sofort, das $f_t(x)$ infolge des erwähnten Ergebnisses für fast alle $t \in \langle 0, 1)$ gleichverteilt (mod 1) ist. Aus der Gleichheit (13) folgt dann auf Grund von Lemma 1,1, dass auch die Funktion $F_t(x)$ für fast alle $t \in \langle 0, 1)$ gleichverteilt (mod 1) ist, daher ist $|H^*(q_1, q_2, \ldots)| = 1$.

b) $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ erfülle die Bedingung (*ii*) nicht. Dann gilt

$$\limsup_{P \to \infty} \frac{1}{P} \sum_{k=1}^{P} \frac{1}{q_k} > 0 . \tag{*}$$

Daraus folgt leicht, dass $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ ist. Bezeichnen wir mit $N_n(0, t)$ die Anzahl aller $l \leqq n$, für welche $\varepsilon_l(t) = 0$ ist (siehe (1)). Aus den Ergebnissen der Arbeiten [6], [7] folgt, dass im Falle $\sum_{k=1}^{\infty} 1/q_k = +\infty$ für fast alle $t \in \langle 0, 1)$ die Beziehung

$$(14) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(0, t)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} = 1$$

gilt.

Bezeichnen wir mit A die Menge aller $t \in \langle 0, 1)$, für welche (14) gilt. Dann genügt es auf Grund des vorhergehenden zu beweisen, dass $H^*(q_1, q_2, \ldots) \subset \langle 0, 1) - A$ ist.

Es sei $\alpha \in (0, 1)$, $t \in H^*(q_1, q_2, \ldots)$. Auf Grund der ersichtlichen Inklusion

$$\{n; \varepsilon_n(t) = 0\} \subset \left\{n; \frac{\varepsilon_n(t)}{q_n} < \alpha\right\}$$

bekommt man $\delta_2(\{n; \varepsilon_n(t) = 0\}) \leqq \alpha$; daraus folgt leicht

$$(15) \qquad \delta(\{n; \varepsilon_n(t) = 0\}) = 0\,.$$

Es gehöre jetzt irgendein $t \in \langle 0, 1)$ gleichzeitig zu den Mengen A, $H^*(q_1, q_2, \ldots)$. Für dieses t gilt dann (14) und so existiert eine natürliche Zahl n_0 derart, dass für jedes $n > n_0$ die Ungleichung

$$(16) \qquad \frac{N_n(0, t)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} > \frac{1}{2}$$

gilt. Weiter existiert auf Grund der Voraussetzung (*) eine positive reelle Zahl η, so dass für unendlich viele n (diese n bilden die Menge V)

$$(17) \qquad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} > \eta > 0$$

gilt.

Für $n \in V$, $n > n_0$ bekommt man mit Hilfe von (16), (17)

$$\frac{N_n(0, t)}{n} = \frac{N_n(0, t)}{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q_k} > \tfrac{1}{2}\eta > 0\,.$$

Daraus folgt $\delta_2(\{n; \varepsilon_n(t) = 0\}) > 0$, was einen Widerspruch mit (15) ergibt. Es muss also $A \cap H^*(q_1, q_2, \ldots) = \emptyset$ und daher $H^*(q_1, q_2, \ldots) \subset \langle 0, 1) - A$ gelten. Damit ist der Beweis des Satzes beendet.

Setzen wir $K^*(q_1, q_2, \ldots) = \langle 0, 1) - H^*(q_1, q_2, \ldots)$. Wenn die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ die Bedingung (ii) erfüllt, dann folgt aus dem Satz 2,3 $|K^*(q_1, q_2, \ldots)| = 0$. Für eine genügend weite Klasse von Grundfolgen $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ bestimmt der folgende Satz die Grösse der Hausdorffschen Dimension der Menge $K^*(q_1, q_2, \ldots)$.

Satz 2,4. *$\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$ erfülle für jedes $\varepsilon > 0$ die Bedingung $V(\varepsilon)$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n}{(q_1 q_2 \ldots q_n)^{\varepsilon}} < +\infty .$$

Dann ist $\dim K^*(q_1, q_2, \ldots) = 1$.

Beweis. $S(z)$ bezeichnet bei $z \in \langle 0, 1\rangle$ die Menge aller

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{q_1 q_2 \ldots q_k} \in \langle 0, 1)$$

mit $z \notin \{\varepsilon_k(t)/q_k\}_k'$. Dann ist offenbar $S(z) \subset K^*(q_1, q_2, \ldots)$ und auf Grund des Satzes 2,5 aus der Arbeit [8] gilt $\dim S(z) = 1$. Daraus folgt $\dim K^*(q_1, q_2, \ldots) = 1$.

Bemerkung 2,1. Man kann sich leicht überzeugen, dass die Folge $\{q_k\}_{k=1}^{\infty}$, $q_k = k + 1$ $(k = 1, 2, \ldots)$ die Bedingung (ii) und für jedes $\varepsilon > 0$ auch die Bedingung $V(\varepsilon)$ erfüllt. Daher ist die Menge aller

$$t = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_k(t)}{(k+1)!} \in \langle 0, 1)$$

(Fakultätreihe von t), für welche die Folge $\{\varepsilon_k(t)/(k+1)\}_{k=1}^{\infty}$ gleichverteilt (mod 1) ist, eine Nullmenge, deren Hausdorffsche Dimension gleich 1 ist (das ist eine einfache Folgerung der Sätze 2,3 und 2,4).

Literatur

[1] *H. Weyl:* Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. *77* (1916), 313—352.

[2] *Н. М. Коробов:* О некоторых вопросах равномерного распределения, Изв. акад. наук СССР, *14* (1950), 215—238.

[3] *T. Šalát:* Eine metrische Eigenschaft der Cantorschen Entwicklungen der reellen Zahlen und Irrationalitätskriterien, Czechosl. Math. J. *14* (*89*), (1964), 254—266.

[4] *K. Knopp:* Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten, Math. Ann. *95* (1926), 409—426.

[5] *J. F. Koksma:* Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins, Comp. Math. *2* (1935), 250—258.

[6] *A. Rényi:* A számjegyek eloszlása valós számok Cantor-féle elöállításaiban. Mat. Lap. *VII* (1956), 77—100.

[7] *P. Erdös-A. Rényi:* Some further statistical properties of the digits in Cantor's series, Acta math. acad. sci. Hung. *X* (1959), 21—29.

[8] *T. Šalát:* Über die Cantorschen Reihen, Czechosl. Math. J. *18* (*93*) (1968), 25 — 56.

Anschrift des Verfassers: Bratislava, Šmeralova 2, ČSSR (Prírodovedecká fakulta Komenského university).