Czechoslovak Mathematical Journal

Zdeněk Hustý

Asymptotische Eigenschaften perturbierter iterierter Differentialgleichungen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 19 (1969), No. 4, 723–737

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/100932

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1969

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

Czechoslovak Mathematical Journal, 19 (94) 1969, Praha

ASYMPTOTISCHE EIGENSCHAFTEN PERTURBIERTER ITERIERTER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

ZDENĚK HUSTÝ, Brno

(Eingelangt am 24. Februar 1969)

VORBEMERKUNGEN

In dieser Arbeit werden alle Bezeichnungen und Begriffe, die in [1] eingeführt wurden, verwendet. Der Begriff und die Eigenschaften der iterierten Gleichungen sind in der Arbeit [2] angeführt. Die Transformation von Gleichungen resp. von perturbierten iterierten Gleichungen ist in der Arbeit [1] resp. [3] beschrieben. Die Eigenschaften der Polynome mit der Dimension φ, χ, Φ, F sind in [1; §2] abgeleitet. Die Symbole $O[f(x)]$, $o[f(x)]$ sind z. B. in [4; 0.2,1 – 0.2,2] definiert und ihre Eigenschaften sind in [4; 0.2,3], [5; 1] angeführt. Mit dem Symbol I wird das Intervall $\langle x_0, \infty)$ bezeichnet. In der ganzen Arbeit betrachten wir nur Gleichungen mit Dimension, siehe [1; 1.2].

1. DIE TRANSFORMATION DER GLEICHUNGEN n-TER ORDNUNG

Es sei die Gleichung

$$\text{(a)} \qquad z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, z^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad a_i \in C_0(I)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

gegeben und es sei

$$\text{(u)} \qquad u''(x) + \frac{3}{n+1} A_2(x)\, u(x) = 0$$

die die Gleichung (a) begleitende Gleichung mit $A_2 = a_2 - a_1' - a_1^2$.

Ist $a_i \in C_{n-i}(I)$, $i = 1, 2$, so nennt man die Gleichung

$$z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_i^n(a_1, a_2)\, z^{(n-i)}(x) = 0$$

die iterierte Gleichung, wo $f_i^n(a_1, a_2)$ das iterierte Polynom der Elemente a_1, a_2 der Dimension i darstellt, siehe [2; S. 48–49].

Setzt man

$$I_n(z; a_1, a_2) = z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} f_i^n(a_1, a_2)\, z^{(n-i)}(x)\,,$$

so läßt sich die iterierte Gleichung in der Form

$$\text{(I)} \qquad I_n(z; a_1, a_2) = 0$$

schreiben.

Die Gleichung

$$\text{(p)} \qquad I_n(Z; a_1; a_2) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p_i(x)\, Z^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad p_i \in C_0(I)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

nennen wir die *perturbierte iterierte* Gleichung.

1.1. In der ganzen Arbeit setzen wir voraus, daß die Koordinaten des Bildes (ā) $\{H(x), h(x)\} \in O_a(I)$ (siehe [1; 3,1.3 und 3,1.6]) folgende Eigenschaften besitzen:

$$\text{(1.1,1)} \qquad h > 0\,, \quad H > 0\,, \quad H' > 0 \quad \text{in} \quad I\,, \quad \lim_{x \to \infty} H(x) = \infty\,.$$

Das Bild (ā) $\{H(x), h(x)\} \in O_a(I)$ kann man in der Normalform

$$\text{(ā)} \qquad Y^{[n]}(t) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} \bar{a}_i(t)\, Y^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad t \in J = H(I)$$

schreiben mit

$$\text{(1.1,2)} \qquad \bar{a}_i(t) = [H'(x)]^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} a_k(x)\, \Phi_{i-k}^{n,i}[\eta(x), \zeta(x)]\,, \quad a_0 = 1\,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n\,, \quad x = H_{-1}(t)\,,$$

siehe [1; (3.1,4)].

Das Polynom $\Phi_{i-k}^{n,i}$ ist durch die Formel

$$\text{(1.1,3)} \qquad \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta) = \sum_{j=k}^{i} \binom{i-k}{j-k} \varphi_{i-j}^{n-j}(\eta)\, \chi_{j-k}(\zeta)$$

definiert, wo $\eta = H''/H'$, $\zeta = h'/h$ gesetzt wird, siehe [1; (2,3.2)].

Das Polynom $\chi_k(\zeta)$ entspricht der Gleichung

$$\text{(1.1,4)} \qquad \chi_k(\zeta_1 + \zeta_2) = \sum_{\nu=0}^{k} \binom{k}{\nu} \chi_{k-\nu}(\zeta_1)\, \chi_\nu(\zeta_2)\,,$$

siehe [1; (2,2.4)].

Ist

$$\zeta = -\frac{n-1}{2}\eta, \tag{1.1,5}$$

so setzt man

$$\Phi^{n,i}_{i-k}\left(\eta, -\frac{n-1}{2}\eta\right) = \Phi^{n,i}_{i-k}(\eta). \tag{1.1,6}$$

Gilt ferner

$$\eta' = \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{6}{n+1}A_2, \tag{1.1,7}$$

so ist

$$\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta) = \frac{(n-i)!\,(i-k)!}{(n-k)!}\sum_{\varrho=0}^{i-k}\eta^{i-k-\varrho}F^{n,i,k}_{\varrho}(A_2) \tag{1.1,8}$$

siehe [1; (2.3,11)].

Wenn

$$\zeta = -a_1 - \frac{n-1}{2}\eta \tag{1.1,9}$$

gilt, so ist $\bar{a}_1(t) \equiv 0$, so daß das Bild (ā) halbkanonisch ist, siehe [1; 3.2,1].

Gilt gleichzeitig (1.1,9), (1.1,7), so ist $\bar{a}_1(t) \equiv 0$, $\bar{a}_2(t) \equiv 0$, so daß das Bild (ā) kanonisch ist, siehe [1; 3.3,1].

1.2. Es gilt die Formel

$$\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta_1 + \zeta_2) = \sum_{\nu=0}^{i-k}\binom{i-k}{\nu}\chi_\nu(\zeta_1)\,\Phi^{n,i}_{i-k-\nu}(\eta, \zeta_2), \tag{1.2,1}$$

die mit Hilfe von (1.1,3), (1.1,4) bewiesen werden kann.

Gilt (1.1,9), (1.1,7), *so ist*

$$\Phi^{n,i}_{i-k}(\eta, \zeta) = \left[1\Big/\binom{n-k}{n-i}\right]\sum_{\sigma=0}^{i-k}\eta^{i-k-\sigma}\sum_{\nu=0}^{\sigma}\binom{n-k}{\nu}\chi_\nu(-a_1)\,F^{n,i,k+\nu}_{\sigma-\nu}(A_2). \tag{1.2,2}$$

Die Formel (1.2,2) wird mit Hilfe von (1.2,1), (1.1,6) und (1.1,8) bewiesen.

1.3. Die Gleichung (u) sei in I nichtoszillatorisch. Dann gibt es ein $x_1 \geqq x_0$ und eine Lösung $u_2(x)$ von (u) derart, daß

$$u_2(x) > 0 \quad \text{für} \quad x \geqq x_1, \quad \int_{x_1}^{\infty}[u_2(x)]^{-2}\,dx < \infty \tag{1.3,1}$$

gilt.

Die Funktion

$$(1.3{,}2) \qquad u_1(x) = u_2(x) \int_x^{\infty} [u_2(s)]^{-2}\, ds$$

ist eine Hauptlösung von (u) und gilt $u_1(x) > 0$ für $x \geqq x_1$, $\int_{x_1}^{\infty} [u_1(x)]^{-2}\, dx = \infty$.

Die zweigliedrige Folge

$$(1.3{,}3) \qquad u_1(x),\ u_2(x)$$

bezeichnen wir als eine *normierte Hauptbasis* von (u) im Intervall $\langle x_1, \infty)$. Es gilt

$$(1.3{,}4) \qquad W[u_1, u_2] = 1\,.$$

Im Folgenden setzen wir $x_1 = x_0$.

1.4. Es sei $a_i \in C_{n-i}(I)$, $i = 1, 2$ und es sei (1.3,3) eine normierte Hauptbasis der Gleichung (u) im Intervall I. Setzen wir

$$(1.4{,}1) \qquad H(x) = \frac{u_2(x)}{u_1(x)}\,, \quad h(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\, ds\right\} [u_1(x)]^{n-1}\,,$$

so gilt (1.1,1), (1.1,7), (1.1,9). Das Bild der iterierten Gleichung (I) mit den Koordinaten (1.4,1) ist kanonisch und hat die Normalform $Y^{[n]}(t) = 0$. Siehe [1; Bem. 3,3.4)], [3; Abs. (1.1)–(1.5)].

1.5. *Es gelten die Voraussetzungen vom Abs.* 1.4. *Dann hat das Bild der Gleichung* (p) *mit den Koordinaten* (1.4,1) *die Normalform*

$$(\bar{\mathrm{p}}) \qquad Y^{[n]}(t) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} Q_i(t)\, Y^{[n-i]}(t) = 0\,, \quad t \in J\,,$$

wobei

$$(1.5{,}1) \qquad J = \langle t_0, \infty)\,, \quad t_0 = H(x_0)\,,$$

$$(1.5{,}2) \qquad Q_i(t) = (H')^{-i} \sum_{k=1}^{i} \left[\binom{i}{k} \Big/ \binom{n-k}{n-i}\right] p_k \sum_{\sigma=0}^{i-k} \eta^{i-k-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\sigma} \binom{n-k}{\nu} \chi_\nu(-a_1)\,.$$

$$.\, F_{\sigma-\nu}^{n,i,k+\nu}(A_2)\,, \quad x = H_{-1}(t)\,, \quad t \in J\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

gilt.

Zum Beweis ziehen wir die Gleichung (p) in der Gestalt

$$Z^{(n)} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} [f_i^n(a_1, a_2) + p_i]\, Z^{(n-i)} = 0$$

heran, aus der wegen (1.1,2)

$$Q_i(t) = (H')^{-i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} [f_k^n(a_1, a_2) + p_k]\, \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$f_0^n(a_1, a_2) = 1\,, \quad p_0 = 0\,, \quad x = H_{-1}(t)$$

hervorgeht. Gilt (1.4,1), so gilt (1.5,1) und gemäß dem Abs. 1.4 ist

$$\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} f_k^n(a_1, a_2)\, \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta) = 0\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

so daß die Gleichung

$$Q_i = (H')^{-i} \sum_{k=1}^{i} \binom{i}{k} p_k\, \Phi_{i-k}^{n,i}(\eta, \zeta)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{1.5,3}$$

erfüllt ist. Setzen wir in (1.5,3) die Formeln (1.1,9), (1.1,7) ein, so gilt vermöge (1.2,2) die Gleichung (1.5,2).

2. PERTURBIERTE GLEICHUNGEN

Es wird eine Gleichung von der Form

$$z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a_i(x)\, z^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad a_i \in C_0(I)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

und eine perturbierte Gleichung

$$Z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} [a_i(x) + p_i(x)]\, Z^{(n-i)}(x) = 0\,, \tag{2.2}$$

$$p_i(x) \in C_0(I)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

betrachtet. Es bilden die Funktionen

$$z_k(x)\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \tag{2.3}$$

ein Hauptsystem der Gleichung (2.1) und es sei $W(x)$ bzw. $W_i(x)$ die Wronskische Determinante der Funktionen (2.3) bzw. das algebraische Komplement des Elementes $z_i^{(n-1)}(x)$ in der Determinante $W(x)$.

Lemma. *Es sollen derartige positive Funktionen $P_s(x)$, $s = 1, 2, \ldots, n$ existieren, daß für alle $i, k = 1, 2, \ldots, n$*

$$-\frac{W_i(x)}{W(x)} [z_k(x)]^{(n-s)} = O[P_s(x)]\,, \quad s = 1, 2, \ldots, n \tag{2.4}$$

gilt.

Ist

$$(2.5) \qquad \int_{x_0}^{\infty} |p_s(x)| \, P_s(x) \, dx < \infty \,, \quad s = 1, 2, \ldots, n \,,$$

so hat die Gleichung (2.2) *das Hauptsystem*

$$(2.6) \qquad Z_k^{(l)}(x) = z_k^{(l)}(x) + \sum_{i=1}^{n} z_i^{(l)}(x) \, O[\varkappa(x)]$$

$$k = 1, 2, \ldots, n \,; \quad l = 0, 1, \ldots, n-1$$

mit

$$(2.7) \qquad \varkappa(x) = \int_x^{\infty} \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} |p_s(t)| \, P_s(t) \, dt \,.$$

Siehe [5; 8].

3. PERTURBIERTE ITERIERTE GLEICHUNGEN

3.0. Es sei

$$(\mathrm{p}) \qquad I_n(Z; a_1, a_2) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p_i(x) \, Z^{(n-i)}(x) = 0$$

eine perturbierte iterierte Gleichung, wo $a_j(x) \in C_{n-j}(I)$, $a_j^{(s)} = O(1)$, $j = 1, 2$; $s = 0, 1, \ldots, n - 1 - j$, $p_i \in C_0(I_0)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ ist.

Es bilden ferner die Funktionen

$$(3.0,1) \qquad z_k(x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(s) \, ds\right\} u_1^{n-k} u_2^{k-1} \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ein Hauptsystem der iterierten Gleichung

$$(\mathrm{a}) \qquad I_n(z; a_1, a_2) = 0 \,,$$

wo

$$(3.0,2) \qquad u_1(x), \, u_2(x)$$

eine Basis der Gleichung

$$(\mathrm{u}) \qquad u''(x) + \frac{3}{n+1} A_2(x) \, u(x) = 0$$

mit $A_2 = a_2 - a_1' - a_1^2$ darstellt.

3.1. *Es sei $W(x)$ die Wronskische Determinante der Funktionen (3.0,1) und es sei $W_i(x)$ das Komplement des Elementes $z_i^{(n-1)}(x)$ in der Determinante $W(x)$. Dann gelten folgende Formeln:*

$$W(x) = c \exp\left\{-n \int_{x_0}^{x} a_1(s)\, ds\right\}, \quad 0 \neq c \in E_1, \tag{3.1,1}$$

$$W_i(x) = c_i \exp\left\{-(n-1) \int_{x_0}^{x} a_1(s)\, ds\right\} u_1^{i-1} u_2^{n-i}, \quad 0 \neq c_i \in E_1, \tag{3.1,2}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n.$$

Siehe [2; S. 31], [6; (3, 8)].

3.2. *Es sollen derartige positive Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ existieren, daß*

$$u(x) = O[\varphi(x)], \quad u'(x) = O[\psi(x)], \tag{3.2,1}$$

wo $u(x)$ die allgemeine Lösung von (u) ist. Dann gilt

$$(u_1^r u_2^\varrho)^{(j)} = O[\varphi^{r+\varrho-j}(\varphi + \psi)^j]. \tag{3.2,2}$$

Beweis. Nach [7; L. 1.4] ist $(u^r)^{(j)} = \sum_{\mu=0}^{j} O(\varphi^{r-j+\mu})\, O(\psi^{j-\mu}) =$

$$= \varphi^{r-j} \sum_{\mu=0}^{j} O\left[\binom{j}{\mu} \varphi^\mu \psi^{j-\mu}\right] = \varphi^{r-j} O\left[\sum_{\mu=0}^{j} \binom{j}{\mu} \varphi^\mu \psi^{j-\mu}\right] = O[\varphi^{r-j}(\varphi + \psi)^j].$$

Dann ist

$$(u_1^r u_2^\varrho)^{(j)} = \sum_{s=0}^{j} \binom{j}{s} (u_1^r)^{(j-s)} (u_2^\varrho)^{(s)} = \sum_{s=0}^{j} O[\varphi^{r-j+s}(\varphi + \psi)^{j-s}] \,.$$

$$. \, O[\varphi^{\varrho-s}(\varphi + \psi)^s] = \sum_{s=0}^{j} O[\varphi^{r+\varrho-j}(\varphi + \psi)^j] = O[\varphi^{r+\varrho-j}(\varphi + \psi)^j].$$

3.3. *Es gilt*

$$\exp\left\{\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\right\} \left[\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t)\, dt\right\}\right]^{(k)} = \chi_k(-a_1), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3}$$

Siehe [1; (2.2,2)].

3.4. *Es gelte die Voraussetzung vom Abs. 3.2. Dann ist für alle $i, k = 1, 2, \ldots, n$*

$$W^{-1}(x)\, W_i(x)\, [z_k(x)]^{(n-s)} = O\left[\varphi^{2(n-1)}\left(1 + \frac{\psi}{\varphi}\right)^{n-s}\right], \tag{3.4,1}$$

$$s = 1, 2, \ldots, n.$$

Beweis. Gemäß dem Abs. 3.1 – 3.3 und der Formel (3.0,1) gilt

$$W^{-1} W_i z_k^{(n-s)} = (c_i/c) \exp\left\{\int_{x_0}^{x} a_1 \, dt\right\} u_1^{i-1} u_2^{n-i} \left[\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(t) \, dt\right\} u_1^{n-k} u_2^{k-1}\right]^{(n-s)} =$$

$$= (c_i/c) \, u_1^{i-1} u_2^{n-i} \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} \chi_{n-s-j}(-a_1) \, (u_1^{n-k} u_2^{k-1})^{(j)} = O(\varphi^{n-1}) \, .$$

$$\cdot \sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} O[\varphi^{n-1-j}(\varphi + \psi)^j] = O(\varphi^{2(n-1)}) \, O\left[\sum_{j=0}^{n-s} \binom{n-s}{j} \left(1 + \frac{\psi}{\varphi}\right)^j\right] =$$

$$= O\left[\varphi^{2(n-1)} \left(1 + \frac{\psi}{\varphi}\right)^{n-s}\right].$$

3.5. Lemma. *Es gelte die Voraussetzung vom Abs. 3.2. Gilt* (2.5), *wo*

$$P_s(x) = \Phi^{s-1}(\Phi + \Psi)^{n-s} \, , \quad s = 1, 2, \ldots, n \, , \tag{3.5,1}$$

$$\Phi = \varphi^2 \, , \quad \Psi = \varphi\psi$$

gesetzt wird, so hat die Gleichung (p) *das Hauptsystem*

$$Z_k^{(l)}(x) = z_k^{(l)}(x) + \sum_{i=1}^{n} z_i^{(l)}(x) \, O[\varkappa(x)] \, ,$$

$$k = 1, 2, \ldots, n \, ; \quad l = 0, 1, \ldots, n-1 \, ,$$

wo (3.0,1), (2.7), (3.5,1) *gilt.*

Das Lemma folgt aus Abs. 2 (Lemma) und 3.4.

4. PERTURBIERTE ITERIERTE GLEICHUNGEN IM NICHTOSZILLATORISCHEN FALL

Im Teil 4 übernehmen wir die Bezeichnungen und die Voraussetzungen vom Abs. 3.0. Ferner setzen wir voraus, daß die Gleichung (u) nichtoszillatorisch ist und daß die Funktionen (3.0,2) eine normierte Hauptbasis der Gleichung (u) bilden, so daß die Formeln des Abs. 1.3 gelten.

4.1. Die zweigliedrige Funktionenfolge

$$H(x) = \frac{z_2(x)}{z_1(x)} \, , \quad h(x) = z_1(x) \tag{4.1,1}$$

hat unter Berücksichtigung von (3.0,1) dieselbe Eigenschaften wie die Funktionen (1.4,1). Es gelten folgende Beziehungen

$$(4.1,2) \qquad H(x) = u_2(x)/u_1(x)\,, \quad H(x)/H'(x) = u_1(x)\,u_2(x)\,, \\ \eta(x) = -2\,u_1'(x)/u_1(x)\,.$$

Gemäß dem Abs. 1.5 schließen wir, daß das Bild der Gleichung (p) mit den Koordinaten (4.1,1) die Normalform $(\bar{\text{p}})$ hat, wo (1.5,1), (1.5,2) gilt.

4.2. Lemma. *Es sei*

$$(4.2,1) \qquad \int_{x_0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} t^{i-1} |Q_i(t)|\, dt < \infty\,.$$

Dann hat die Gleichung $(\bar{\text{p}})$ *ein Hauptsystem von der Gestalt*

$$(4.2,2) \qquad Y_k^{[s]}(t) = \begin{cases} \dfrac{t^{k-s-1}}{(k-s-1)!}\,[1 + o(1)]\,, & s = 0, 1, \ldots, k-1 \\ o(1)\,, & s = k, k+1, \ldots, n-1\,, \end{cases} \\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Siehe [8].

4.3. *Es sei* $(\bar{\text{p}})$ *das Bild der Gleichung* (p) *der Koordinaten* (4.1,1). *Es sollen derartige positive Funktionen* $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ *existieren, daß*

$$(4.3,1) \qquad u_1(x)\,u_2(x) = O[\Phi(x)]\,, \quad u_1'(x)\,u_2(x) = O[\Psi(x)]$$

ist. Gilt (2.5), *wo*

$$(4.3,2) \qquad P_s(x) = \Phi^{s-1}(\Phi + \Psi + 1)^{n-s}\,, \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

gesetzt wird, so hat die Gleichung $(\bar{\text{p}})$ *das Hauptsystem* (4.2,2).

Es genügt zu beweisen, daß (4.2,1) gilt. Es ist

$$\int_{t_0}^{t} \tau^{i-1} |Q_i(\tau)|\, d\tau = \int_{x_0}^{x} [H(\xi)]^{i-1}\, H'(\xi)\, |Q_i[H(\xi)]|\, d\xi\,.$$

Nach (1.5,2), (4.1,2) ist

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} [H(x)]^{i-1}\, H'(x)\, |Q_i[H(x)]| = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} [H/H']^{i-1}\,.$$

$$\cdot \left| \sum_{k=1}^{i} \left[\binom{i}{k} \middle/ \binom{n-k}{n-i} \right] p_k \sum_{\sigma=0}^{i-k} \eta^{i-k-\sigma} \sum_{\nu=0}^{\sigma} \binom{n-k}{\nu} \chi_\nu(-a_1)\, F_{\sigma-\nu}^{n,i,k+\nu}(A_2) \right| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \sum_{\sigma=0}^{i-k} (u_1 u_2)^{i-1} |p_k| \cdot |u_1'/u_1|^{i-k-\sigma} O(1) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=k}^{n} \sum_{\sigma=0}^{i-k} |p_k| (u_1 u_2)^{k+\sigma-1} \,.$$

$$\cdot |u_1' u_2|^{i-k-\sigma} O(1) = \sum_{k=1}^{n} |p_k| \, \Phi^{k-1} \sum_{i=k}^{n} \sum_{\sigma=0}^{i-k} O \left[\binom{i-k}{\sigma} \Phi^{\sigma} \Psi^{i-k-\sigma} \right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |p_k| \, \Phi^{k-1} \sum_{i=k}^{n} O[(\Phi + \Psi)^{i-k}] = \sum_{k=1}^{n} |p_k| \, \Phi^{k-1} \sum_{j=0}^{n-k} O \binom{n-k}{j} .$$

$$\cdot (\Phi + \Psi)^j = \sum_{k=1}^{n} |p_k| \, \Phi^{k-1} O[(\Phi + \Psi + 1)^{n-k}] = O[\sum_{k=1}^{n} |p_k| \, P_k] \,,$$

wo (4.3,2) zu nehmen ist. Ferner gilt unter Beachtung der Voraussetzung (2.5)

$$\int_{x_0}^{x} O[\sum_{k=1}^{n} |p_k(t)| \, P_k(t)] \, dt = O \left[\sum_{k=1}^{n} \int_{x_0}^{x} |p_k(t)| \, P_k(t) \, dt \right] = O(1) \,,$$

so daß $\int_{x_0}^{\infty} S(x) \, dx < \infty$ und (4.2,1) gilt.

4.4. Lemma. *Es sollen derartige positive Funktionen $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ existieren, daß* (4.3,1) *gilt, wo die Funktionen* (3.0,2) *eine normierte Hauptbasis der Gleichung* (u) *bilden. Gilt* (2.5), *wo wir* (4.3,2) *einsetzen, so hat die Gleichung* (p) *das Hauptsystem*

$$Z_k(x) = z_k(x) \, [1 + o(1)] \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \,,$$

wo (3.0,1) *zu nehmen ist.*

Beweis. Es sei ($\bar{\text{p}}$) das Bild der Gleichung (p) der Koordinaten (4.1,1), so daß

$$Z_k(x) = h(x) \, Y_k[H(x)] \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

gilt, wo $Y_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$ unabhängige Lösungen der Gleichung ($\bar{\text{p}}$) darstellen. Gemäß dem Abs. 4.3 gilt (4.2,2), so daß

$$Z_k(x) = h(x) \, [H(x)]^{k-1} \, [1 + o(1)] \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ist. Aus (4.1,1), (4.1,2), (3.0,1) folgt $hH^{k-1} = z_k$.

4.5. Das geordnete Paar von unabhängigen Lösungen

$$\bar{u}_1(x), \, \bar{u}_2(x) \tag{4.5,1}$$

nennt man eine Hauptbasis der Gleichung (u) im Intervall I, falls $\bar{u}_i \neq 0$ in I, $i = 1, 2$ ist und $\bar{u}_1(x)$ eine Hauptlösung darstellt. Da die Formeln

$$\bar{u}_1(x) = c_1 \, u_1(x) \,, \quad 0 \neq c_1 \in E_1 \,, \quad \bar{u}_2(x) = u_2(x) \, [c_2 + o(1)] \,, \quad 0 \neq c_2 \in E_1$$

(siehe z. B. [4; Abs. 3.1 – 3.2)] gelten, bleibt Lemma 4.4 unverändert, falls wir statt der normierten Basis (3.0,2) eine beliebige Hauptbasis der Gleichung (u) verwenden.

5. HAUPTSATZ

Es seien die Gleichungen

$$\text{(b)} \qquad Z^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} b_i(x)\, Z^{(n-i)}(x) = 0\,, \quad b_i \in C_0(I)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\text{(a)} \qquad I_n(z; a_1, a_2) = 0\,,$$

$$\text{(5.1)} \qquad a_j(x) \in C_{n-j}(I)\,, \quad a_j^{(s)} = O(1)\,, \quad j = 1, 2\,; \quad s = 0, 1, \ldots, n-1-j\,,$$

$$\text{(u)} \qquad u''(x) + \frac{3}{n+1} A_2(x)\, u(x) = 0$$

mit $A_2 = a_2 - a_1' - a_1^2$ gegeben.

Setzt man

$$p_i(x) = b_i(x) - f_i^n(a_1, a_2)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

so kann man die Gleichung (b) auf eine perturbierte iterierte Gleichung von der Form

$$\text{(p)} \qquad I_n(Z; a_1, a_2) + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} p_i(x)\, Z^{(n-i)}(x) = 0$$

überführen.

Hauptsatz. *Es sollen derartige positive Funktionen $\varphi(x)$, $\psi(x)$ existieren, daß*

$$\text{(5.2)} \qquad \int_{x_0}^{\infty} |p_s(x)|\, [\Phi(x)]^{s-1}\, [\Phi(x) + \Psi(x) + \delta]^{n-s}\, \mathrm{d}x < \infty\,,$$

$$\delta = 0, 1\,; \quad s = 1, 2, \ldots, n$$

gilt, wo $\varphi^2 = \Phi$, $\varphi\psi = \Psi$ ist. Dann gelten folgende Behauptungen:

1° *Ist*

$$\text{(i)} \qquad u(x) = O[\varphi(x)]\,, \quad u'(x) = O[\psi(x)]\,, \quad \delta = 0\,,$$

wo $u(x)$ die allgemeine Lösung von (u) bezeichnet, so hat die Gleichung (p) die Basis

$$\text{(5.3)} \qquad Z_k^{(l)}(x) = \left[\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} u_1^{n-k} u_2^{k-1}\right]^{(l)} + \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} a_1(s)\,\mathrm{d}s\right\} \varphi^{n-1-l} \,.$$

$$. (\varphi + \psi)^l\, O[\varkappa(x)]\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,; \quad l = 0, 1, \ldots, n-1\,,$$

wo

$$\text{(5.4)} \qquad u_1(x), u_2(x)$$

eine Basis der Gleichung (u) *darstellt und*

$$(5.5) \qquad \varkappa(x) = \sum_{s=1}^{n} \binom{n}{s} \int_x^\infty |p_s(t)| \, [\Phi(t)]^{s-1} \, [\Phi(t) + \Psi(t)]^{n-s} \, \mathrm{d}t$$

gilt.

2° *Es sei* (5.4) *in I eine Hauptbasis der Gleichung* (u). *Gilt*

$$(\mathrm{ii}) \qquad u_1(x) \, u_2(x) = O[\Phi(x)] \,, \quad u_1'(x) \, u_2(x) = O[\Psi(x)] \,, \quad \delta = 1 \,,$$

so hat die Gleichung (p) *eine Basis der Form*

$$(5.6) \qquad Z_k(x) = \exp\left\{-\int_{x_1}^x a_1(s) \, \mathrm{d}s\right\} u_1^{n-k} u_2^{k-1} [1 + o(1)] \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Der Hauptsatz folgt aus den Hilfssätzen 3.5, 4.4 und aus dem Abs. 4.5.

Bemerkung. Der Hauptsatz erweitert die Ergebnisse, die in [10; 2.1 – 2.2] gegeben sind.

6. EINIGE ANWENDUNGEN DES HAUPTSATZES

Satz. *Es seien* $h(x)$, $H(x)$ *Funktionen mit den folgenden Eigenschaften:*

$$(6.1) \qquad h, H \in C_2(I) \,, \quad H > 0 \,, \quad H' > 0 \,, \quad h > 0 \,,$$

$$(6.2) \qquad \lim_{x \to \infty} H(x) = \infty \,,$$

$$(6.3) \qquad \int_{x_0}^\infty |\mathrm{d} \log h^2 H'| < \infty \,,$$

$$(6.4) \qquad \int_{x_0}^\infty \left| hh'' + \frac{3}{n+1} A_2 h^2 + \varepsilon f^2 F'^2 \right| \mathrm{d}x < \infty \,, \quad \varepsilon = \pm 1 \,,$$

$$(6.5) \qquad hh' = O(1) \,,$$

$$(6.6) \qquad \int_{x_0}^\infty |p_k| \, h^{2(k-1)} (h^2 + 1)^{n-k} \, \mathrm{d}x < \infty \,, \quad k = 1, 2, \ldots, n \,.$$

Dann hat die Gleichung (b) *eine Basis von der Gestalt*

$$(6.7) \qquad \exp\left\{-\int_{x_0}^x a_1 \, \mathrm{d}s\right\} h^{n-1} y_k \,.$$

wo im Fall $\varepsilon = -1$:

$$(6.8) \qquad y_k = \sin^{n-k} H \cos^{k-1} H + O[\varkappa(x)], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

$$(6.9) \qquad \varkappa(x) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \int_x^\infty |p_k| \, h^{2(k-1)}(h^2 + 1)^{n-k} \, dt,$$

im Fall $\varepsilon = 1$

$$(6.10) \qquad y_k = e^{(n-2k+1)H}[1 + o(1)], \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

ist.

Beweis. Wenn (6.1), (6.3), (6.4) für $\varepsilon = -1$ gilt, so hat die Gleichung (u) gemäß [9; 33, S. 217] die allgemeine Lösung

$$(6.11) \qquad u = h[c_1 \sin H + c_2 \cos H + o(1)], \quad c_i \in E_1, \quad i = 1, 2$$

mit der Ableitung

$$(6.12) \qquad u' = [h(c_1 \sin H + c_2 \cos H)]' + h' \, o(1) + hH' \, o(1).$$

Nach (6.11) ist $\varphi(x) = h$, nach (6.3), (6.5), (6.12) ist $\psi(x) = h^{-1}$, so daß

$$(6.13) \qquad \Phi = h^2, \quad \Psi = 1.$$

Wenn wir (6.13) in (5.2) mit $\delta = 0$ einsetzen, erhalten wir (6.6), so daß gemäß der Behauptung 1° des Hauptsatzes (5.3), (5.5) gelten. Setzt man (6.13) und

$$u_1 = h \sin H + o(1), \quad u_2 = h \cos H + o(1)$$

in (5.3), (5.5) ein, erhält man (6.7)–(6.9).

Wenn (6.1)–(6.4) für $\varepsilon = 1$ erfüllt ist, so hat die Gleichung (u) nach [9; 34, S. 218] eine Hauptbasis von der Form

$$(6.14) \qquad \begin{aligned} u_1 &= h\, e^{-H}[1 + o(1)], \quad u_2 = h\, e^{H}[1 + o(1)], \\ u_1' &= e^{-H}\{h'[1 + o(1)] - hH'[1 + o(1)]\}, \end{aligned}$$

so daß unter Berücksichtigung von (6.3), (6.5) die Formeln (6.13) gelten. Wenn wir (6.13) in (5.2) mit $\delta = 1$ einsetzen, erhalten wir (6.6), so daß gemäß der Behauptung 2° des Hauptsatzes (5.6) gilt. Setzt man (6.14) in (5.6) ein, erhält man (6.7), (6.10).

Der bewiesene Satz verallgemeinert die Ergebnisse aus [10; 2.3]. Als Anwendungen des Satzes 6 sollen jetzt einige Beispiele gegeben werden. Das Symbol „$\{y_k\} \in$ (b)" wird folgendermaßen gelesen: „die Funktionen y_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ bilden ein Hauptsystem der Gleichung (b)". Ferner setzen wir $e(x) = \exp\{-\int_{x_0}^\infty a_1(s)\, ds\}$ und anstatt $\int_{x_0}^\infty f\, dx$ werden wir kurz $\int^\infty f$ schreiben.

Beispiele. 1. Es gelte (5.1),

$$\int^\infty x \left| \frac{\alpha}{x^2} + \varepsilon A_2 \right| < \infty\,, \quad \alpha \in E_1\,, \quad \alpha > -\varepsilon \frac{n+1}{12}\,, \quad \varepsilon = \pm 1\,,$$

$$\int^\infty |p_k|\, x^{n-1} < \infty\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,. \tag{6.15}$$

Dann gilt: $\{e(x)\, y_k\} \in (\mathrm{b})$, wobei im Fall $\varepsilon = 1$, $y_k = x^{\beta(n-2k+1)}[1 + o(1)]$ und im Fall $\varepsilon = -1$ $y_k = [\sin(\beta \log x)]^{n-k} [\cos(\beta \log x)]^{k-1} + o(1)$ mit

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{3\alpha}{n+1} + \frac{\varepsilon}{4}\right)}$$

ist. Das folgt aus Satz 6, wo $h = \sqrt{x}$, $H = \beta \log x$ gesetzt wird.

2. Für $\alpha = 0$, $\varepsilon = 1$ ergibt sich aus Beispiel 1 die folgende Behauptung: Es gelte (5.1), $\int^\infty x|A_2| < \infty$, (6.15). Dann ist $\{e(x)\, x^{n-k}[1 + o(1)]\} \in (\mathrm{b})$.

3. Es gelte $\int^\infty |a_1| < \infty$, $\int^\infty x|a_2| < \infty$, (5.1), (6.15). Dann ist $\{x^{n-\nu}[1 + o(1)]\} \in$ $\in (\mathrm{b})$. Gemäß [8; Hilfssatz 2.5] besitzt die Gleichung (u) die Hauptbasis $u_1 = 1 +$ $+ o(1)$, $u_2 = x[1 + o(1)]$, $u_1' = x^{-1}\, o(1)$; mithin gilt $\Phi(x) = x$, $\Psi(x) = 1$ und wir können den Hauptsatz anwenden.

4. Es gelte (5.1), $\int^\infty x^{-2s}|A_2 x^{4s} + \varepsilon c^2| < \infty$, $c > 0$, $s < \frac{1}{2}$, $(c, s \in E_1)$, $\varepsilon = \pm 1$, $\int^\infty |p_k|\, x^{2s(k-1)}(x^{2s} + 1)^{n-k} < \infty$, $k = 3, 4, \ldots, n$. Dann ist $\{e(x)\, x^{s(n-1)} y_k\} \in (\mathrm{b})$, wobei im Fall $\varepsilon = 1$

$$y_k = \exp\{\beta(n - 2k + 1)\, x^{1-2s}\}\, [1 + o(1)]\,,$$

und im Fall $\varepsilon = -1$

$$y_k = [\sin(\beta x^{1-2s})]^{n-\nu} [\cos(\beta x^{1-2s})]^{\nu-1} + o(1)$$

mit $\beta = (c/(1-2s)) \sqrt{(3/(n+1))}$ ist. Dieses folgt vom Satz 6, wo $h = x^s$, $H = x^{1-2s}$ gesetzt wird.

5. Für $s = 0$ folgt aus Beispiel 4 die folgende Behauptung: Es gelte (5.1), $\int^\infty |A_2 +$ $+ \varepsilon c^2| < \infty$, $\varepsilon = \pm 1$, $\int^\infty |p_k| < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Dann gilt $\{e(x)\, y_k\} \in (\mathrm{b})$, wo im Fall $\varepsilon = 1$ $y_k = \exp\{\beta(n - 2k + 1)\, x\}\, [1 + o(1)]$, und im Fall $\varepsilon = -1$ $y_k =$ $= [\sin \beta x]^{n-\nu} . [\cos \beta x]^{\nu-1} + o(1)$ mit $\beta = c\sqrt{(3/(n+1))}$ ist.

Literatur

[1] *Z. Hustý:* Über die Transformation und Äquivalenz homogener linearer Differentialgleichungen von höherer als der zweiten Ordnung. I. Teil: Transformation regulärer Gleichungen. Czechoslovak Math. J. *13* (*90*) (1965), 479—502.

[2] *Z. Hustý:* Die Iteration homogener linearer Differentialgleichungen. Publ. Fac. Sci. Univ. J. E. Purkyně, Brno, No 449, (1964), 23—56.

[3] *Z. Hustý:* Perturbierte homogene lineare Differentialgleichungen. Časopis Pěst. Mat. *91* (1966), 154—169.

[4] *Z. Hustý:* Asymptotische Eigenschaften der Differentialgleichung $y'' + 2a_1y' + a_2y = 0$. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*) (1969), 208—240.

[5] *Z. Hustý:* Beitrag zu einem Satz von Ráb. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*), (1969), 716—722.

[6] *J. Suchomel:* Wronskische Determinanten von Lösungen iterierter Gleichungen. Czechoslovak Math. J. *19* (*94*) (1969), 711—715.

[7] *Z. Hustý:* Asymptotische Formeln für die Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung im oszillatorischen Fall. Časopis Pěst. Mat. *90* (1965), 79—86.

[8] *A. Chizetti:* Un teorema sul comportamento asintotico degli integrali delle equazioni differenziali lineari omogenee. Rendiconti di matematica e delle sue applicazioni, Roma (5), *8*, (1949), 28—42.

[9] *M. Ráb:* Asymptotische Formeln für die Lösungen der Differentialgleichung $y'' + q(x)\, y = 0$. Czechoslovak Math. J. *14* (*89*) (1964), 203—221.

[10] *Z. Hustý:* Asymptotische Eigenschaften von Lösungen homogener linearer Differentialgleichungen n-ter Ordnung. Mathematische Nachrichten *32* (1966), 173—185.

Anschrift des Verfassers: Brno, Zemědělská 5, ČSSR (Vysoká škola zemědělská).