Teo Sturm

Zu Äquivalenz- und Ordnungsrelationen

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 362–374

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101177

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

ZU ÄQUIVALENZ- UND ORDNUNGSRELATIONEN*)

TEO STURM, Praha

(Eingegangen am 23. Dezember 1971)

Diese Arbeit knüpft unmittelbar an die Abhandlungen [5] und [6] an. Im ersten Teil wird insbesondere gezeigt, dass zu jeder Äquivalenz ϱ auf A, für welche $\operatorname{card} A/\varrho \geqq 4$ ist, eine zwei Elemente enthaltende e-Charakteristik $\mathscr{V}$ existiert, deren beide Elemente Wohlordnungen auf A sind; dadurch ist auch die Vermutung 53 von [6] widergelegt.

Im zweiten Teil werden Systeme aller Ordnungen auf A untersucht, welche der Minimalbedingung genügen und für welche die gegebene Teiläquivalenz schwach faktorisierend ist.

Meinem Lehrer, Herrn Prof. MIROSLAV NOVOTNÝ bin ich für zahlreiche Ratschläge soeben wie auch für seine Anregungen dankbar.

EINE SPEZIELLE e-CHARAKTERISTIK DER ÄQUIVALENZ

1. Symbolik. Wir übernehmen die Bezeichnungen und Terminologie von [6]. Wenn X eine nichtleere Menge und $\mathscr{V}$ eine Teilmenge in der Menge aller Ordnungen auf X ist (d.h. wenn $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}(X)$ ist), dann ist $e(\mathscr{V}, X)$ die Menge solcher Äquivalenzen ϱ auf X, für welche $\varrho \in G(X, u)$ für alle $u \in \mathscr{V}$ ist (s. [5], Abs. 18); in Einklang mit [6], Abs. 1 bezeichnen wir $e(\mathscr{V}) =_{\mathrm{Df}} e(\mathscr{V}, A)$ für $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}(A)$. Wir bemerken, dass A eine gegebene nichtleere Menge ist. Wenn X eine Menge ist, dann bedeutet $\mathscr{U}'(X)$ die Menge aller linearer Ordnungen auf X.

Wenn $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}(X)$ und $\varrho \in (\mathscr{V}, X)$, dann definierten wir $\mathscr{V}_\varrho =_{\mathrm{Df}} \{u_{X/\varrho} \mid u \in \mathscr{V}\}$ (s. [5], Abs. 16). Schliesslich bemerken wir, dass $\mathscr{V}$ *eine e-Charakteristik von* ϱ genau dann genannt wird, wenn $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(X)$, ϱ eine Äquivalenz auf X, $\varrho \neq X \times X$ und $\varrho = \sup_{(E(X), \subseteq)} \{\sigma \mid \sigma \in e(\mathscr{V}, X), \sigma \neq X \times X\}$ ist (s. [6], Abs. 30).

*) Die Arbeit endstand in einem von Herrn Prof. JIŘÍ FÁBERA geleiteten Seminar über Boolesche Algebren.

2. Lemma. *Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$ und $\varrho \in e(\mathscr{V})$. Dann ist $\mathscr{V}_\varrho \subseteq \mathscr{U}'(A/\varrho)$.*

Beweis. Wählen wir $u \in \mathscr{V}$. Nach [5], Abs. 19 ist $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge. Es sei $X, Y \in A/\varrho$; falls $X = Y$ ist, dann ist offenbar $(X, Y) \in u_{A/\varrho}$ und wir setzen deswegen voraus, dass $X \neq Y$ ist. Es existieren Elemente $x, y, x \in X, y \in Y$; die Ordnung u ist linear und also ist $(x, y) \in u \cup u^{-1}$. Demzufolge (siehe [5] Abs. 17) ist auch $(X, Y) \in u_{A/\varrho} \cup (u_{A/\varrho})^{-1}$, und also ist $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine Kette. Dadurch ist die Inklusion $\mathscr{V}_\varrho \subseteq \mathscr{U}'(A/\varrho)$ bewiesen.

3. Lemma. *Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$, $\varrho \in e(\mathscr{V})$ und sei $\mathscr{B}$ eine $\mathscr{V}_\varrho$-konvexe Teilmenge in A/ϱ* (s. [6], Abs. 22). *Dann ist $\bigcup \mathscr{B}$ eine $\mathscr{V}$-konvexe Teilmenge in A.*

Beweis. Wir bezeichnen $B =_{\mathrm{Df}} \bigcup \mathscr{B}$. Es sei $\mathscr{B}$ eine $\mathscr{V}_\varrho$-konvexe Teilmenge in A/ϱ, $x, y \in B$, $z \in A$, $u \in \mathscr{V}$, und $(x, z), (z, y) \in u$. Es existieren $X, Y, Z \in A/\varrho$ so dass $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$. Dann ist $(X, Z), (Z, Y) \in \dot{u} \cap (A/\varrho \times A/\varrho) \subseteq u_{A/\varrho}$. Von der $\mathscr{V}_\varrho$-Konvexität von $\mathscr{B}$ in A/ϱ folgt dann $Z \in \mathscr{B}$ und also $z \in B$. Die Ordnung $u \in \mathscr{V}$ wurde beliebig gewält und demzufolge ist B eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge.

4. Lemma. *Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$, $\varrho \in e(\mathscr{V})$ und sei B eine $\mathscr{V}$-konvexe Menge. Dann ist $\mathscr{B} =_{\mathrm{Df}} \{X \mid X \in A/\varrho, X \cap B \neq \emptyset\}$*) eine $\mathscr{V}_\varrho$-konvexe Teilmenge in A/ϱ.*

Beweis. Es sei $X, Y \in \mathscr{B}$, $Z \in A/\varrho$, $\bar{u} \in \mathscr{V}_\varrho$, $(X, Z), (Z, Y) \in \bar{u}$. Nach der Definition von $\mathscr{V}_\varrho$ gibt es ein $u \in \mathscr{V}$ so dass $\bar{u} = u_{A/\varrho}$ ist. Wähle man $x \in X$, $y \in Y$, $z \in Z$ und setze man voraus, dass $X \neq Y \neq Z \neq X$ ist. Die geordnete Menge (A, u) ist eine Kette und demzufolge folgt von den vorangehenden Voraussetzungen $(x, z), (z, y) \in \in u$; nach der Definition des Systems $\mathscr{B}$ und der $\mathscr{V}$-Konvexität der Menge B folgt dann $Z \in \mathscr{B}$. In den Fällen $X = Z$ oder $Y = Z$ oder $X = Y$ ist die Beziehung $Z \in \mathscr{B}$ offensichtlich. Also ist $\mathscr{B}$ eine $\mathscr{V}_\varrho$-konvexe Teilmenge in A/ϱ, da $\bar{u} \in \mathscr{V}_\varrho$ beliebig gewählt worden ist.

5. Lemma. *Es sei ϱ eine Äquivalenz auf A, sei* card $A/\varrho \geqq 3$ *und sei $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik von ϱ. Dann existiert für jedes Element $X \in A/\varrho$ ein $u = u(X) \in \mathscr{V}$, so dass X auch nicht das kleinste und auch nicht das grösste Element der Kette $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ ist.*

Denn Beweis geben wir durch einen Widerspruch. Es existierte B, $B \in A/\varrho$ so dass B für alle $u \in \mathscr{V}$ dass grösste oder kleinste Element in $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ ist. Lege man $C =_{\mathrm{Df}} A - B$. Der Voraussetzung nach ist $\emptyset \subset C \subset A$. Wähle man $x, y \in C$, $z \in A$ und für die gegebene Ordnung $v \in \mathscr{V}$ sei $(x, z), (z, y) \in v$. Es existieren $X, Y, Z \in A/\varrho$,

*) $\mathscr{B}$ ist die sog. Hülle der Menge B in der Zerlegung A/ϱ; s. Borůvka, O.: Grundlagen der Gruppoid- und Gruppentheorie. Berlin, VEB deutscher Verlag der Wissenschaften, 1960, S. 7.

so dass $x \in X$, $y \in Y$ und $z \in Z$ ist. Dann gilt (X, Z), $(Z, Y) \in v_{A/\varrho}$, $X \neq B \neq Y$ und also nach der Voraussetzung über B ist $Z \neq B$. Deswegen ist $z \in C$ und C ist eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Menge, nachdem $v \in \mathscr{V}$ beliebig gewählt worden ist. Nach [6], Abs. 37 existiert dann $D \in A/\varrho$, $C \subseteq D$. Also ist $A/\varrho = \{B, D\}$ und dieses widerspricht der Voraussetzung card $A/\varrho \geqq 3$.

6. Satz. *Es sei $\mathscr{V} \subseteq \mathscr{U}'(A)$, ϱ eine Äquivalenz auf A,* card $A/\varrho \geqq 3$ *und $\varrho \in e(\mathscr{V})$. Dann ist $\mathscr{V}$ genau dann eine e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ, wenn $\mathscr{V}_\varrho$ eine e-Charakteristik der Identität* $\mathrm{id}_{A/\varrho}$ *ist.*

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, dass $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ ist und dass $\mathscr{B}$ ein echtes $\mathscr{V}_\varrho$-konvexes Teilsystem in A/ϱ ist. Nach dem Lemma 3 ist dann $B =_{\mathrm{Df}} \bigcup \mathscr{B}$ eine echte $\mathscr{V}$-konvexe Teilmenge in A und also nach [6], Abs. 37 gibt es so eine Menge C, $C \in A/\varrho$, dass $B \subseteq C$ ist. Nach der Konstruktion von B ist dann aber $B = C$ (s. wieder [6], Satz 37) und also ist $\mathscr{B}$ ein Teilsystem in A/ϱ mit einem einzigen Element. Die einzige echte $\mathscr{V}_\varrho$-konvexe Teilsysteme in A/ϱ sind nach dem Obigen nur ein einziges Element enthaltende Teilsysteme in A/ϱ und deswegen ist $\mathscr{V}_\varrho$ nach [6], Satz 37 eine e-Charakteristik der Identität $\mathrm{id}_{A/\varrho}$ in A/ϱ. (In diesem Teil des Beweises spielte die Voraussetzung card $A/\varrho \geqq 3$ keine Rolle!)

Es sei umgekehrt $\mathscr{V}_\varrho$ eine e-Charakteristik der Identität $\mathrm{id}_{A/\varrho}$ und sei B eine nichtleere $\mathscr{V}$-konvexe Teilmenge in A. Nach dem Lemma 4 ist die Hülle

$$\mathscr{B} =_{\mathrm{Df}} \{X \mid X \in A/\varrho, X \cap B \neq \emptyset\}$$

der Menge B in der Zerlegung A/ϱ eine $\mathscr{V}_\varrho$-konvexe Menge in A/ϱ. Wenn card $\mathscr{B} \geqq 2$ ist, dann ist nach der Voraussetzung über $\mathscr{V}_\varrho$ und nach [6], Satz 37 $\mathscr{B} = A/\varrho$. Wählen wir beliebig das Element a, $a \in A$. Dann gibt es ein $C \in A/\varrho$ derart, dass $a \in C$ ist. Nach dem Lemma 5 existiert eine Ordnung $u \in \mathscr{V}$, für welche C auch nicht das kleinste, auch nicht das grösste Element der Kette $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ ist (geordnete Mengen $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ und $((A/\varrho)/id_{A/\varrho}, (u_{A/\varrho})_{(A/\varrho)/id_{A/\varrho}})$ sind offensichtlich isoton-isomorph). Man kann demzufolge von C verschiedene Mengen $X, Y \in A/\varrho$ wählen, für welche die Ungleichungen (X, C), $(C, Y) \in u_{A/\varrho}$ gelten. Setzen wir, dass $B - C \neq \emptyset$; dann ist $\mathscr{B} = A/\varrho$. Nach der Definition von $\mathscr{B}$ und von der Gleichung $\mathscr{B} = A/\varrho$ folgt die Existenz der Elemente $b \in X \cap B$, $c \in Y \cap B$. Die Ordnung u ist auf A linear und deswegen ist (b, a), $(a, c) \in u$. Von der $\mathscr{V}$-Konvexität von B folgt dann $a \in B$ und deswegen ist $B = A$. Daher folgt nach dem Satz 37 in [6], dass $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ ist. (Die Elemente von A/ϱ sind der Voraussetzung zufolge offenbar $\mathscr{V}$-konvex in A).

7. Lemma. *Es sei* card $A \geqq 4$ *und sei* card A *keine ungerade natürliche Zahl. Dann gibt es derartige Wohlordnungen u, v auf A, dass $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Identität* id_A *ist.*

B e w e i s*). Kleine griechische Buchstaben bedeuten da Ordninalzahlen; $\leqq$ ist die natürliche Ordnung in der Klasse aller Ordninalzahlen und und $< =_{\mathrm{Df}} \leqq - \mathrm{id}$, wobei id die Identitätsrelation auf der Universalklasse ist. Für die Ordinalzahl α definieren wir die Mengen

$$W(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \{\xi \mid \xi < \alpha\}\,, \quad W_0(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \{2\xi \mid 2\xi < \alpha\}\,,$$
$$W_1(\alpha) =_{\mathrm{Df}} \{2\xi + 1 \mid 2\xi + 1 < \alpha\}\,.$$

Die Elemente von $W_0(\alpha)$ werden gerade Ordinalzahlen (in $W(\alpha)$) und die Elemente von $W_1(\alpha)$ ungerade Ordinalzahlen (in $W(\alpha)$) genannt. Es gelten die folgenden Behauptungen (s. [3], Kap. VII, § 5, S. 250–255 der russischen Übersetzung und Kap. VI. § 4. S. 226–228 der russischen Übersetzung).

(i) $W(\alpha) = W_0(\alpha) \cup W_1(\alpha)\,, \quad W_0(\alpha) \cap W_1(\alpha) = \emptyset$.

(ii) Wenn $i = 0$ oder $i = 1$ und wenn $\xi,\ \eta \in W_i(\alpha)$ und $\xi < \eta$, dann existiert $\zeta \in W_j(\alpha)$ (es ist $j \geqq 0$ und $i + j = 1$) so dass $\xi < \zeta < \eta$ gilt.

(iii) Wenn $\xi < \eta < \alpha$ gilt, dann existieren ζ, $\zeta + 1$ so dass $\xi \leqq \zeta < \zeta + 1 \leqq \eta$ gilt und dass genau eine der Ordinalzahlen ζ, $\zeta + 1$ ungerade ist (die andere ist also gerade).

(iv) Wenn $\xi + 1 < \alpha$ ist und wenn ξ eine gerade Ordinalzahl ist, dann gibt es ein $\eta \in W_1(\alpha)$, so dass $\xi < \eta$ ist.

Wir übergehen nun zum Beweis vom Lemma. Falls die Menge A endlich ist, dann existiert genau eine Ordinalzahl α, zu der es eine bijektive Abbildung $f : W(\alpha) \to A$ gibt. Wenn card $A = \aleph_\beta$, dann wählen wir $\alpha =_{\mathrm{Df}} \omega_\beta$ und so gibt es wieder eine bijektive Abbildung $f : W(\alpha) \to A$. Es sei u diejenige Wohlordnung auf A, für welche f ein isotoner Isomorphismus der Ketten $(W(\alpha), \leqq)$ und (A, u) ist. Sei v die Ordnung auf A, welche der Ordinalsumme $(f(W_1(\alpha)), u) \oplus (f(W_0(\alpha)), u)$ (siehe (i)) zugehört; offenbar ist v eine Wohlordnung auf A. Wir zeigen, dass $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Identität id_A ist.

Es sei B eine nichtleere, zumindest zwei Elemente enthaltende $\{u, v\}$-konvexe Teilmenge in A; wir zeigen, dass dieser Voraussetzung zufolge $A = B$ ist. Es gibt zwei verschiedene Ordinalzahlen $\beta,\ \gamma \in W(\alpha)$ so dass $f(\beta) \in B$ und $f(\gamma) \in B$ ist. Es sei z.B. $\beta < \gamma$. Nach (iii) und nach der vorausgesetzten $\{u\}$-Konvexität von B existieren $f(\xi), f(\xi + 1) \in B$, wobei genau eine der Ordinalzahlen ξ, $\xi + 1$ ungerade und genau eine gerade ist. Die $\{v\}$-Konvexität von B hat die Relation $f(0) \in B$ zufolge. Von der vorausgesetzten $\{u\}$-Konvexität von B folgt dann $f(\eta) \in B$ für alle η, $0 \leqq \eta \leqq \gamma$ und die $\{v\}$-Konvexität von B bringt $f(\zeta) \in B$ für alle ζ, $\zeta \in W_1(\alpha)$ mit sich.

Von der $\{u\}$-Konvexität von B folgt, dass für alle ξ, $\xi \in W(\alpha)$, zu welchen es ein η, $\eta \in W_1(\alpha)$, $f(\eta) \in B$ gibt, die Beziehung $f(\xi) \in B$ gilt. Nachdem card A nicht eine

---

*) Ich bin dem Kollegen V. SLAVÍK für seine Bemerkungen, in denen er mich auf einige Fehler der usprünglichen Version des Beweises aufmerksam machte, dankbar.

endliche ungerade Zahl ist, gibt es in (A, u) kein grösstes Element der Gestalt $f(2\varkappa)$, $2\varkappa \in W(\alpha)$. Also ist $B = A$ (vgl. das vorangehende und (iv)), d.h. in A gibt es keine andere echte $\{u, v\}$-konvexe Teilmengen als Teilmengen mit einem Element. Nach [6], Abs. 37 ist demzufolge $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik von id_A.

8. Lemma. *Es sei* card $A \geqq 4$ *und sei* card A *eine endliche ungerade Zahl. Dann existieren solche Wohlordnungen u, v auf A, für welche $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Identität* id_A *ist.*

Beweis. Es sei card $A = 2n + 1$, $4 < 2n + 1 < \aleph_0$. Legen wir $Z_{2n+1} = {}_{\mathrm{Df}} \{0, 1, \ldots, 2n\}$ und wählen eine bijektive Abbildung $f : Z_{2n+1} \to A$. Es sei u diejenige Wohlordnung auf A, für welche f ein monotoner Isomorphismus von $(Z_{2n+1}, \leqq)$ auf (A, u) ist. Für $k \in Z_{2n+1}$ bezeichnen wir $a_k =_{\mathrm{Df}} f(k)$. Wir legen

$$A_0 =_{\mathrm{Df}} \{a_{2k+1} \mid k \in N,\, 2k + 1 < 2n\}\,,$$
$$A_1 =_{\mathrm{Df}} \{a_{2k} \mid k \in N,\, 2k < 2n - 2\}\,,$$
$$A_2 =_{\mathrm{Df}} \{a_{2n-2}\}\,, \quad A_3 =_{\mathrm{Df}} \{a_{2n}\}\,.$$

Der vorausgesetzten Ungleichung $4 < 2n + 1 = \text{card } A$ folgt, dass die Mengen A_0, A_1, A_2, A_3 nichtleer sind und von der Bijektivität von f folgt, dass diese auch paarweise punktfremd sind. Die Ordnung v definieren wir als eine der Ordinalsumme

$$(A_0, u) \oplus (A_1, u) \oplus (A_3, u) \oplus (A_2, u)\,;$$

zugehörte Ordnung; offensichtlich ist v eine Wohlordnung auf A.

Wir zeigen, dass $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Identität id_A. Es sei B eine nichtleere zumindest zwei Elemente enthaltende $\{u, v\}$-konvexe Teilmenge in A. Von der $\{u\}$-Konvexität von B dann folgt die Existenz von soeinem $i \in Z_{2n+1}$, $i + 1 \leqq 2n$, für welches a_i, $a_{i+1} \in B$ ist. Eine der Zahlen i, $i + 1$ ist gerade und die andere ist ungerade. Von der $\{v\}$-Konvexität von B folgt dann $a_0 \in B$, von der $\{u\}$-Konvexität von B folgt $a_j \in B$ für alle natürliche j, $0 \leqq j \leqq i + 1$, von der $\{v\}$-Konvexität von B folgt $a_{2k+1} \in B$ für alle natürliche k, $1 \leqq 2k + 1 < 2n$ und daher von der $\{u\}$-Konvexität von B folgt auch $a_{2n-2} \in B$. Von der $\{v\}$-Konvexität von B folgt schliesslich auch $a_{2n} \in B$ und deswegen ist $A = B$ (B ist eine $\{u\}$-konvexe Menge).

Die einzigen echten $\{u, v\}$-konvexen Mengen in A sind also nur ein Element enthaltende Teilmengen in A und also nach [6], Abs. 37 ist $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Identität id_A.

9. Satz. *Es sei ϱ eine Äquivalenz auf A und* card $A/\varrho \geqq 4$. *Dann existieren Wohlordnungen u, v auf A so dass $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ ist.*

Der Beweis folgt von den Absätzen 6, 7 und 8. Für $X \in A/\varrho$ sei w_X eine Wohlordnung auf X. Auf A/ϱ wählen wir Wohlordnungen $\bar{u}$, $\bar{v}$ so, dass $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ eine e-Charakteristik der Identität $\mathrm{id}_{A/\varrho}$ ist; die Existenz soeiner zwei Elemente enthaltender Menge $\{\bar{u}, \bar{v}\}$ folgt vom Lemma 7 und 8, wenn wir anstatt von A eine zumidest vierelementige Zerlegung A/ϱ wählen. Die Ordnung u, welche der Ordinalsumme $\sum_{X \in (A/\varrho, \bar{u})} (X, w_X)$ gehört und v, die der Ordinalsumme $\sum_{X \in (A/\varrho, \bar{v})} (X, w_X)$ gehört, sind Wohlordnungen auf A, nachdem es sich um Ordinalsummen eines wohlgeordneten Systemes wohlgeordneter Mengen handelt.

Es ist $\{u, v\}_\varrho = \{\bar{u}, \bar{v}\}$ und also ist nach dem Satz 6 $\{u, v\}$ eine e-Charakteristik der Äquivalenz ϱ.

10. Folgerung. *Es sei ϱ eine Äquivalenz auf A und* card $A/\varrho \geqq 4$. *Dann ist* $m(\varrho) = 2$ (s. [6], Abs. 47).

Beweis. Die Folgerung folgt unmittelbar vom Satz 9 und der Definition der Funktion m.

11. Lemma. *Es sei ϱ eine Äquivalenz auf A. Dann gelten die folgenden Behauptungen*:

a. *Wenn* card $A/\varrho = 3$ *ist, dann ist* $m(\varrho) = 3$.

b. *Wenn* card $A/\varrho = 2$ *und* card $A \geqq 3$, *dann ist* $m(\varrho) = 2$.

c. *Wenn* card $A/\varrho =$ card $A = 2$ *ist, dann ist* $m(\varrho) = 0$.

d. *Die zu den Äquivalenzen ϱ von den Behauptungen a., b. und c. gehörenden e-Charakteristiken können so gewählt worden, dass deren Elemente Wohlordnungen auf A sind.*

Beweis. *a.* Es sei $\mathscr{V}$ eine e-Charakteristik von ϱ, sei $\{A_1, A_2, A_3\} = A/\varrho$. Für alle i, $i = 1, 2, 3$ gibt es $u_i \in \mathscr{V}$ derart, dass A_i auch nicht das kleinste, auch nicht das grösste Element in $(A/\varrho, (u_i)_{A/\varrho})$ ist (s. Lemma 5). Deswegen gilt in diesem Falle immer die Ungleichung card $\mathscr{V} \geqq 3$ und also ist $3 \leqq m(\varrho)$. Nach [6], Abs. 52 gilt auch die umgekehrte Ungleichung $m(\varrho) \leqq 3$ und also ist $m(\varrho) = 3$.

b. Diese Behauptung ist eine unmittelbare Folgerung vom Lemma 52 in [6].

c. In diesem Falle ist $e(\emptyset) = E(A) = \{\mathrm{id}_A, A \times A\}$, und also unter den angegebenen Voraussetzungen gilt

$$\varrho = \mathrm{id}_A = \sup_{(E(A), \subseteq)} \{\sigma \mid \sigma \in e(\emptyset), \sigma \neq A \times A\}.$$

Deswegen ist $m(\varrho) = 0$.

d. Diese Behauptung kann ähnlicherweise wie der Satz 9 bewiesen werden.

12. Bemerkung. Durch die Folgerung 10 und das Lemma 11 ist die Funktion m vollkommen bestimmt. U. a. ist auch die Vermutung 53 von [6] widergelegt.

Die Ergebnisse von diesem Teil deuten an, dass es nicht ganz uniteressant sein wird, solche Ordnungssysteme zu untersuchen, welche auf A die Minimalbedingung erfüllen und mit Rücksicht auf welche eine in A gegebene Teiläquivalenz schwach faktorisierende ist; diesen Untersuchungen ist der weitere Teil dieser Abhandlung gewidmet.

ÄQUIVALENZEN UND DIE MINIMALBEDINGUNG ERFÜLLENDEN ORDNUNGEN

13. Symbolik. $\mathscr{U}^*(A)$ ist die Menge genau der Ordnungen auf A, welche der Minimalbedingung genügen. $\mathscr{U}^{*\prime}(A)$ ist die Menge genau aller Wohlordnungen auf A. Ferner definieren wir für die Teiläquivalenz ϱ in A

$$U^*(\varrho) =_{\mathrm{Df}} U(\varrho) \cap \mathscr{U}^*(A)\,, \quad U^{*\prime}(\varrho) =_{\mathrm{Df}} U(\varrho) \cap \mathscr{U}^{*\prime}(A)\,.$$

14. Lemma. *Es sei* $u \in \mathscr{U}^*(A)$, $v \in \mathscr{U}(A)$ *und* $v \subseteq u$. *Dann ist* $v \in \mathscr{U}^*(A)$.

Beweis. Wählen wir eine nichtleere Menge X in A. Dann existieren in der geordneten Menge (X, u) Minimalelemente und diese sind dann nach der Voraussetzung $v \subseteq u$ auch in (X, v) minimal.

15. Satz. *Es sei* ϱ *eine Teiläquivalenz in* A. *Dann ist* $(U^*(\varrho), \subseteq)$ *eine nichtleere geordnete Menge mit dem kleinsten Element* id_A. *Wenn* $u \in U^*(\varrho)$, $v \in \mathscr{U}(A)$ *ist und* $v \subseteq u$ *auch gilt, dann ist* $v \in U^*(\varrho)$. *Falls* X *eine nichtleere Teilmenge in* $U^*(\varrho)$ *ist, dann ist* $(\bigcap X) \in U^*(\varrho)$.

Beweis. Offenbar ist $\mathrm{id}_A \in U^*(A)$. Die Behauptungen des Satzes folgen dann unmittelbar vom Satz 5 in [6] und vom Lemma 14.

16. Lemma. *Es sei* u *eine Ordnungsrelation und* $\mathrm{dom}\, u \subseteq A$. *Dann erfüllt die geordnete Menge* $(\mathrm{dom}\, u, u)$ *genau dann die Minimalbedingung, wenn eine Wohlordnung* v *auf* A *derart existiert, dass* $u \subseteq v$ *ist.*

Beweis. S. [4], Th. 2.3.

17. Lemma. *Es sei* $u \in \mathscr{U}(A)$, $a, b \in A$, $(a, b) \notin u \cup u^{-1}$. *Wir definieren* $(x, y) \in u^{ab}$ *genau dann, wenn zumindest eine der Bedingungen*

(1) $(x, y) \in u$,

(2) $(x, a) \in u$ *und* $(b, y) \in u$

gilt.

Dann ist $u^{ab} \in \mathscr{U}(A)$, $u \subset u^{ab}$, $(a, b) \in u^{ab}$ *und für jede Ordnung* $v \in \mathscr{U}(A)$, *für welche* $u \subseteq v$ *und* $(a, b) \in v$ *ist, gilt die Inklusion* $u^{ab} \subseteq v$.

Beweis. Mit der Ausnahme der letzten Behaptung des Lemmas s. [8]. Es sei v eine Ordnung auf A, $u \subseteq v$, $(a, b) \in v$. Dann folgt von der Inklusion $u \subseteq v$, dass v der Bedingung (1) genügt. Falls $(x, a) \in u$, $(b, y) \in u$ ist, dann ist nach der Inklusion $u \subseteq v$ auch $(x, a) \in v$, $(b, y) \in v$ und der Voraussetzung nach ist auch $(a, b) \in v$. Von der Transitivität der Ordnung v ergibt sich $(x, y) \in v$ und also erfüllt v auch die Bedingung (2). Deswegen gilt nach der Definition von u^{ab} die zu beweisende Inklusion $u^{ab} \subseteq v$.

18. Lemma. *Wenn die Ordnung $u \in \mathcal{U}(A)$ die Minimalbedingung erfüllt und wenn $a, b \in A$, $(a, b) \notin u \cup u^{-1}$ ist, dann erfüllt auch die Ordnung u^{ab}* (s. Abs. 17) *auf A die Minimalbedingung.*

Beweis. Wir bezeichnen $I(a) =_{\text{Df}} \{x \mid x \in A, (x, a) \in u\}$. Sei v die der Ordinalsumme $(I(a), u) \oplus (A - I(a), u)$ zugehörende Ordnung. Dann erfüllt auch die Ordnung v auf A die Minimalbedingung. Der Wahl von v nach ist offenbar $u \subseteq v$, $(a, b) \in v$ und deswegen ist nach Abs. 17 $u^{ab} \subseteq v$. Nach Abs. 14 genügt also u^{ab} der Minimalbedingung.

19. Lemma. *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A und sei u, $u \in U^*(\varrho)$ keine lineare Ordnung auf A. Dann existiert eine Ordnung $v_1 \in U^*(\varrho)$ so dass $u \subset v_1$ ist.*

Beweis. Die Ordnung $u \in \mathcal{U}(A)$ ist nicht linear und deswegen gibt es Elementen $a, b \in A$ derart, dass $(a, b) \notin u \cup u^{-1}$ ist. Von der Inklusion $U^*(\varrho) \subseteq U(\varrho)$ und von den Behauptungen der Absätze 13 und 16 in [6] folgt die Existenz einer linearen Ordnung v auf A, für welche $v \in U(\varrho)$ und $u \subset v$ ist. Es sei z.B. $(a, b) \in v$. Wir bezeichnen

$$\mathcal{V} =_{\text{Df}} \{w \mid w \in U(\varrho),\ u \subseteq w,\ (a, b) \in w\}\ .$$

Die Menge $\mathcal{V}$ ist nicht leer, da $v \in \mathcal{V}$ ist und also ist nach [6], Abs. 5. $(\bigcap \mathcal{V}) \in U(\varrho)$. Nach dem Lemma 17 ist $u^{ab} \subseteq \bigcap \mathcal{V}$ und $u^{ab} \in \mathcal{U}(A)$. Dann aber ist wieder nach der Behauptung vom Abs. 5 in [6] $u^{ab} \in U(\varrho)$. Nach dem Lemma 18 genügt die geordnete Menge (A, u^{ab}) der Minimalbedingung. Es ist also $u^{ab} \in U(\varrho) \cap \mathcal{U}^*(A) = U^*(A)$, $u \subset u^{ab}$ und deswegen genügt es $v_1 =_{\text{Df}} u^{ab}$ zu wählen.

20. Satz. *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A und $u \in U^*(\varrho)$. Dann ist u genau dann das Maximalelement in $(U^*(\varrho), \subseteq)$, wenn (A, u) eine wohlgeordnete Menge ist.*

Beweis. Falls (A, u) keine Kette ist, dann ist nach dem Lemma 19 u kein Maximalelement in $(U^*(\varrho), \subseteq)$.

Falls umgekehrt (A, u) eine wohlgeordnete Menge ist, dann ist (A, u) eine Kette und nach [6], Abs. 16 ist u ein Maximalelement in $(U(\varrho), \subseteq)$. Daher, von der Inklusion $U^*(\varrho) \subseteq U(\varrho)$ und von der Beziehung $u \in U^*(\varrho)$ folgt, dass u ein Maximalelement in $(U^*(\varrho), \subseteq)$ ist.

21. Lemma. *Es sei (X, u) eine geordnete Menge mit den folgenden Eigenschaften:*

(3) *Jede Kette in (X, u) ist endlich.*

(4) *Jede Menge Y, $Y \subseteq X$, paarweise u-unvergleichbarer Elemente*), ist endlich.*

Dann ist X eine endliche Menge.

Beweis. Siehe [2], Theorem 5,24. (Das Lemma is Übrigens in [7] S, 35. als eine Übung 16 zum Kap. I. angegeben.)

22. Lemma. *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A, $u \in U(\varrho)$ und sei (A, u) eine teilweise wohlgeordnete Menge**). Dann ist $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine teilweise wohlgeordnete Menge.*

Den Beweis führen wir durch einen Widerspruch. Nach [5], Abs. 19 ist $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge. Es sei $\mathscr{B}$ ein nichtleeres System in der Zerlegung A/ϱ. Setzen wir voraus, dass in der geordneten Menge $(\mathscr{B}, u_{A/\varrho})$ keine Minimalelemente existieren. Dann ist die Menge $\mathscr{B}$ unendlich und demzufolge ist $\varrho \neq \emptyset$; also sind $\mathscr{B}$ und A/ϱ unendliche punktfremde Systeme nichtleerer Teilmengen in A. Ferner gibt es eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen $(B_n)_{n \in N}$ in $\mathscr{B}$ so dass $(B_{n+1}, B_n) \in u_{A/\varrho}$ für alle $n \in N$ ist. Nach der Definition der Ordnung $u_{A/\varrho}$ auf A/ϱ (s. [5], Abs. 17) gibt es eine Folge paarweise verschiedener Elemente $(C_n)_{n \in N}$ in A/ϱ so dass einerseits die Folge $(B_n)_{n \in N}$ eine Teilfolge von $(C_n)_{n \in N}$ ist und andererseits $(C_{n+1}, C_n) \in \dot{u} \cap \cap (A/\varrho \times A/\varrho)$ für alle $n \in N$ ist. Deswegen existieren auch für alle $n \in N$ Elemente a_n, $b_n \in C_n$, für welche die Ungleichungen $(b_{n+1}, a_n) \in u$ erfüllt werden (s. die Definition der Beziehung $\dot{u}$ in [5], Abs. 17). Nach der Wahl der Elemente $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$ sind die Folgen $(a_n)_{n \in N}$ und $(b_n)_{n \in N}$ Folgen von paarweise verschiedenen Elementen und insbesondere ist die Menge $B =_{\mathrm{Df}} \{a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\}$ unendlich. Die geordnete Menge (A, u) ist teilweise wohlgeordnet und deswegen gibt es in ihr keine unendliche u-fallende Kette. Die Kette $(\{C_n \mid n \in N\}, u_{A/\varrho})$ soll den Typ ω^* ***) besitzen, es ist a_n, $b_n \in C_n$ für alle $n \in N$ und also, mit Rücksicht auf die Definition von $u_{A/\varrho}$ und auf die Voraussetzung $u \in U(\varrho)$, gibt es in (B, u) auch keine unendliche zunehmende Kette. Vom Obigen folgt, dass in der geordneten Menge (B, u) alle Ketten endlich

---

*) Die Elemente $x, y \in X$ werden genau dann *u-unvergleichbar* genannt, wenn $(x, y) \notin u \cup u^{-1}$ ist. Die Menge Y, $Y \subseteq X$ wird *eine Menge paarweise u-unvergleichbarer Elemente* genannt falls beliebige zwei verschiedene Elemente in Y u-unvergleichbar sind.

**) Eine geordnete Menge (A, u) wird *teilweise wohlgeordnet* genannt, wenn für jede nichtleere Teilmenge X in A die Menge aller Minimalelemente in (X, u) nichtleer und endlich ist. (S. [1], Kap. I., § 4, S. 33 der russischen Übersetzung.) *Die geordnete Menge (A, u) ist genau dann teilweise wohlgeordnet, wenn einerseits in ihr keine unendliche Teilmenge paarweise u-unvergleichbarer Elemente existiert und wenn sie andererseits die Bedingung der Endlichkeit fallender Ketten erfüllt.* (S. [1], Kap. I., § 4, Übung 5, S. 40 der russichen Übersetzung.)

***) ω^* ist der Ordinaltyp der Menge aller negativen ganzen Zahlen bei der gewöhnlichen Ordnung.

sind, d.h. in (B, u) ist die Bedingung (3) vom Lemma 21. erfüllt. Die geordnete Menge (A, u) ist voraussetzungsgemäss teilweise wohlgeordnet und deswegen ist jede deren Teilmenge paarweise u-unvergleichbarer Elemente endlich. Insbesondere ist jede Teilmenge in B, welche von paarweise u-unvergleichbarer Elementen besteht, endlich und also gilt in (B, u) auch die Bedingung (4) vom Lemma 21. Nach dem Lemma 21 ist also die Menge B endlich. Von diesem Widerspruch folgt die Existenz von Minimalelementen in der geordneten Menge $(\mathscr{B}, u_{A/\varrho})$, d.h. die geordnete Menge $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ erfüllt die Minimalbedingung.

Es sei $\mathscr{D}$ die Menge aller Minimalelemente in $(\mathscr{B}, u_{A/\varrho})$. Falls $X, Y \in \mathscr{D}$ und $X \neq Y$ ist, dann sind die Elemente X, Y $u_{A/\varrho}$-unvergleichbar und also nach der Definition der Ordnung $u_{A/\varrho}$ auf A/ϱ (s. [5], Abs. 17) sind beliebige Elemente x, y, wo $x \in X$, $y \in Y$ ist, u-unvergleichbar. Jede Teilmenge u-unvergleichbarer Elemente in A ist endlich und deswegen ist auch das System $\mathscr{D}$ endlich. Damit ist die Behauptung bewiesen.

23. Folgerung. *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A. Dann gelten die folgenden Behauptungen:*

a. *Sei $u \in U^{*\prime}(\varrho)$. Dann ist $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine wohlgeordnete Kette.*

b. *Sei $u \in U(\varrho)$ und sei (A, u) eine teilweise wohlgeordnete Menge. Dann gilt in der geordneten Menge $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ die Minimalbedingung.*

Beweis. Die Behauptung *a.* ist eine unmittelbare Folgerung der Absätze 2 und 22. Die Behaptung *b.* folgt vom Lemma 22, da jede teilweise wohlgeordnete Menge speziell die Minimalbedingung erfüllen muss.

24. Definition. Sei u eine Ordnung auf A. Dann definieren wir für X, $X \subseteq A$ die *u-konvexe Hülle* $k_u(X)$ der Menge X in A mittels der Gleichung

$$k_u(X) =_{\mathrm{Df}} \{x \mid x \in A, \text{ es gibt } y \in X \text{ und } z \in X \text{ so dass } (y, x) \in u \text{ und } (x, z) \in u \text{ ist}\}^{*)}$$

25. Lemma. *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A und $u \in U(\varrho)$. Dann ist die Abbildung $k_u \mid (A/\varrho)$ ein isotoner Isomorphismus von $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ auf $(A/k(\varrho), u_{A/k(\varrho)})$.*

Beweis. Die Behauptung ist für $\varrho = \emptyset$ trivial. Setzen wir darum voraus, dass $\varrho \neq \emptyset$ ist. Nach [5], Abs. 38 ist $k_u \mid (A/\varrho) : (A/\varrho) \to (A/k(\varrho))$ eine bijektive Abbildung.

Es sei X, $Y \in A/\varrho$, $(X, Y) \in u_{A/\varrho}$. Dann gibt es eine natürliche Zahl n, $n \geqq 1$ und

---

*) Da benützen wir ein vom [5], Abs. 37a. abweichendes Symbol; $k_u(X)$ wurde dort mit $k_A(X)$ bezeichnet. Sonst übernehmen wir die Symbole von [5], Abs. 37—43 restlos, nur die Ordnung auf A bezeichnen wir nicht $\leqq$, sondern — im Einklang mit dem vorangehenden Text — mit dem Symbol u. Insbesondere ist es zu betonen, dass für $\varrho \in D(A)$ das Symbol $\bar{\varrho}$ das kleinste Element in $(G_\varrho(A, u), \subseteq)$ bezeichnet (vgl. [5], Abs. 41 und 43).

Mengen $X_0, \ldots, X_n \in A/\varrho$, so dass $X_0 = X$, $X_n = Y$ ist und für alle $i = 0, \ldots, n-1$ $(X_i, X_{i+1}) \in \dot{u}$ gilt. Von der Definition 24 folgt die Inklusion $X_i \subseteq k_u(X_i)$, $X_n \subseteq \subseteq k_u(X_n)$. Von der Definition der Relation $\dot{u}$ (vgl. [5], Abs. 17) folgen dann die Beziehungen $(k_u(X_i), k_u(X_{i+1})) \in \dot{u}$ und demzufolge ist $(k_u(X), k_u(Y)) \in u_{A/k(\varrho)}$.

Nach der Voraussetzung $u \in U(\varrho)$ und nach [5], Abs. 39 und 19 ist $(A/k(\varrho), u_{A/k(\varrho)})$ eine geordnete Menge.

Es gelte umgekehrt für X, $Y \in A/\varrho$ die Ungleichung $(k_u(X), k_u(Y)) \in u_{A/k(\varrho)}$. Dann existieren $n \in N$, $n \geqq 1$ und $X_0, \ldots, X_n \in A/\varrho$ so dass $X_0 = X$, $X_n = Y$ ist und dass für alle $i = 0, \ldots, n-1$ die Beziehung $(k_u(X_i), k_u(X_{i+i})) \in \dot{u}$ gilt. Es existieren also $x_i \in k_u(X_i)$, $x_{i+1} \in k_u(X_{i+1})$ so dass $(x_i, x_{i+1}) \in u$ ist. Nach dem Abs. 24 existieren dann $y_i \in X_i$, $z_{i+1} \in X_{i+1}$ so dass $(y_i, x_i) \in u$, $(x_{i+1}, z_{i+1}) \in u$ ist und deswegen ist auch $(y_i, z_{i+1}) \in u$, d.h. $(X_i, X_{i+1}) \in \dot{u}$. Nach der Definition von $u_{A/\varrho}$ gilt also die Ungleichung $(X, Y) \in u_{A/\varrho}$.

Also ist $k_u \mid (A/\varrho) : (A/\varrho, u_{A/\varrho}) \nearrow (A/k(\varrho), u_{A/k(\varrho)})$ ein isotoner Isomorphismus.

26. Lemma. *Es sei* $x \in A$, $X \subseteq A$, $Y \subseteq A$ *and* $u \in \mathcal{U}(A)$. *Dann folgt von den Beziehungen* $(X, \{x\}) \in \dot{u}$, $(\{x\}, Y) \in \dot{u}$ *die Beziehung* $(X, Y) \in \dot{u}$.

Der Beweis folgt unmittelbar von der Definition der Relation $\dot{u}$ (s. [5], Abs. 17).

27. Lemma. *Es sei* ϱ *eine Teiläquivalenz in* A *und* $u \in U(\varrho)$. *Dann gilt die Gleichung*

$$u_{A/k(\varrho)} = u_{A/\bar{\varrho}} \cap (A/k(\varrho) \times A/k(\varrho)) .$$

Der Beweis folgt sofort vom Lemma 26, der Definition der Relationen $\dot{u}$, $u_{A/k(\varrho)}$, $u_{A/\bar{\varrho}}$ und von [5], Abs. 41 und 38.

28. Lemma. *Es sei* ϱ *eine Teiläquivalenz in* A, $u \in U^*(\varrho)$ *und es erfülle die geordnete Menge* $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ *die Minimalbedingung. Dann ist* $(A/\bar{\varrho}, u_{A/\bar{\varrho}})$ *eine geordnete Menge, welche der Minimalbedingung genügt.*

Beweis. Nach der Voraussetzung ist $u \in U^*(\varrho)$, es gilt die Inklusion $U^*(\varrho) \subseteq \subseteq U(\varrho)$ und demzufolge ist nach dem Lemma 41 und 19 in [5] $(A/\bar{\varrho}, u_{A/\bar{\varrho}})$ eine geordnete Menge.

Es sei $\mathcal{B}$ ein nichtleers Teilsystem in $A/\bar{\varrho}$. Lege man $\mathcal{B}_1 =_{\mathrm{Df}} \mathcal{B} \cap (A/k(\varrho))$, $\mathcal{B}_2 =_{\mathrm{Df}} \mathcal{B} - \mathcal{B}_1$; es ist $\mathcal{B}_2 = \mathcal{B} \cap (A/\mathrm{id}_{A - \mathrm{dom}\, k(\varrho)})$, und also sind die Elemente von $\mathcal{B}_2$ alle einelementige Teilmengen in $A - \mathrm{dom}\, k(\varrho)$. Von der Nichtleerheit von $\mathcal{B}$ folgt die Nichtleerheit von zumindest einem der Systeme $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$.

Wenn $\mathcal{B}_1 \neq \emptyset$ ist, dann existieren in $(\mathcal{B}_1, u_{A/k(\varrho)})$ nach dem Lemma 25 Minimalelemente und diese sind dann nach dem Lemma 27 auch in $(\mathcal{B}_1, u_{A/\bar{\varrho}})$ minimal. Die geordnete Menge $(\mathcal{B}_2, u_{A/\bar{\varrho}})$ ist mit irgendeiner geordneten Teilmenge in

$(A - \mathrm{dom}\, k(\varrho), u)$ isoton isomorph. Es ist $u \in U^*(\varrho)$ und deswegen genügt $(\mathscr{B}_2, u_{A/\bar{\varrho}})$ der Minimalbedingung. Sei X ein Minimalelement in $(\mathscr{B}_1, u_{A/\bar{\varrho}})$. Wir definieren

$$\mathscr{B}(X) =_{\mathrm{Df}} \{Y \mid Y \in \mathscr{B},\ Y \neq X,\ (Y, X) \in u_{A/\bar{\varrho}}\}\ .$$

Nach der Voraussetzung über die Minimalität des Elementes X in $(\mathscr{B}_1, u_{A/\bar{\varrho}})$, nach dem Lemma 26 und nach der Definition der Systeme $\mathscr{B}_1$ und $\mathscr{B}_2$ gilt die Inklusion $\mathscr{B}(X) \subseteq \mathscr{B}_2$. Falls X nicht minimal in $(\mathscr{B}, u_{A/\bar{\varrho}})$ ist, dann ist $\mathscr{B}(X) \neq \emptyset$. Nach dem Obigen existiert dann in $(\mathscr{B}(X), u_{A/\bar{\varrho}})$ ein Minimalelement Y und dieses ist dann auch in $(\mathscr{B}, u_{A/\bar{\varrho}})$ minimal – wir berücksichtigen das Lemma 26 und die Definition von $\dot{u}$.

Wenn $\mathscr{B}_1 = \emptyset$ ist, dann ist $\mathscr{B}_2 \neq \emptyset$, $\mathscr{B}_2 = \mathscr{B}$ und die Minimalelemente in $(\mathscr{B}_2, u_{A/\bar{\varrho}})$ sind auch in $(\mathscr{B}, u_{A/\bar{\varrho}})$ minimal.

29. Satz *Es sei ϱ eine Teiläquivalenz in A und $u \in U(\varrho)$. Dann gibt es eine Wohlordnung v auf A so dass $v \in U(\varrho)$ ist und $u \subseteq v$ genau dann, wenn die geordneten Mengen (A, u), $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ der Minimalbedingung genügen.*

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, dass $v \in U^{*\prime}(\varrho)$, $u \subseteq v$ existiert. Nach dem Lemma 14 genügt dann (A, u) der Minimalbedingung. (A, v) ist eine wohlgeordnete Menge und demzufolge ist nach der Folgerung 23a auch die Menge $(A/\varrho, v_{A/\varrho})$ wohlgeordnet.

Nach [5], Abs. 17 folgt von der Inklusion $u \subseteq v$ die Beziehung

$$\dot{u} \cap (A/\varrho \times A/\varrho) \subseteq \dot{v} \cap (A/\varrho \times A/\varrho)$$

und also ist auch $u_{A/\varrho} \subseteq v_{A/\varrho}$. Dem Lemma 14 zufolge ist in der geordneten Menge $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ die Minimalbedingung erfüllt.

Setzen wir voraus, dass umgekehrt die geordneten Mengen (A, u) und $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ die Minimalbedingung erfüllen. Dann erfüllt nach dem Lemma 28 auch die geordnete Menge $(A/\bar{\varrho}, u_{A/\bar{\varrho}})$ die Minimalbedingung ebenso wie auch alle geordnete Mengen (X, u) für alle X, $X \in A/\bar{\varrho}$. Nach dem Lemma 16 gibt es Wohlordnungen $\underline{v}$ auf $A/\bar{\varrho}$ und v_X auf X für alle $X \in A/\varrho$, so dass $u_{A/\bar{\varrho}} \subseteq \underline{v}$ und $u \cap (X \times X) \subseteq v_X$ ist. Sei v diejenige Ordnung auf A, welche der Ordinalsumme $\sum_{X \in (A/\bar{\varrho}, \underline{v})} (X, v_X)$ zugehört. Die wohlgeordnete Ordinalsumme wohlgeordnete Mengen ist die wohlgeordnete Kette (A, v). Nach [6], Abs. 11 und 10 ist $v \in U(\varrho)$ und die Inklusion $u \subseteq v$ folgt direkt von der Konstruktion der Ordnung v.

30. Bemerkung. Zum Schluss zeigen wir, dass für eine Teiläquivalenz ϱ in A von der Beziehung $u \in U^*(\varrho)$ allgemein nicht folgen muss, dass die geordnete Menge $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ der Minimalbedingung genügt.

Es sei $a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots$ eine Folge paarweise verschiedener Elemente. Wir wählen

$$A =_{\mathrm{Df}} \{a_0, b_0, a_1, b_1, \ldots\}\ , \quad \varrho =_{\mathrm{Df}} \{(a_i, b_i) \mid i \in N\} \cup \{(b_i, a_i) \mid i \in N\} \cup \mathrm{id}_A\ ,$$
$$u =_{\mathrm{Df}} \{(b_{i+1}, a_i) \mid i \in N\} \cup \mathrm{id}_A\ .$$

Die Beziehung ϱ ist offensichtlich eine Äquivalenz auf A; eine Benützung vom Abs. 17 in [5] gibt dass $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ eine geordnete Menge vom Ordinaltyp ω^* ist.

Insbesondere gilt $u \in U(\varrho)$ (vgl. [5], Abs. 19) und $(A/\varrho, u_{A/\varrho})$ genügt nicht der Minimalbedingung. Also ist $u \in U(\varrho) \cap \mathscr{U}^*(A) = U^*(\varrho)$ und trotzdem ist $u_{A/\varrho} \notin \notin \mathscr{U}^*(A/\varrho)$.

Literatur

[1] *Cohn, P. M.:* Universal Algebra. New York—London, Harper & Row., 1965.

[2] *Dushnik, B. - Miller, E. W.:* Partially ordered sets. Amer. Journ. Math. *63* (1941), 600—610.

[3] *Kuratowski, K. - Mostowski, A.:* Set Theory. Amsterdam, North—Holland Pub. Co., 1967.

[4] *Novák, V.:* On the well dimension of ordered sets. Czech. Math. J. *19 (94)*, 1969, 1—16.

[5] *Sturm, T.:* Verbände von Kernen isotoner Abbildungen. Czech. Math. J. *22 (97)*, 1972, 126—144.

[6] *Sturm, T.:* Äquivalenz- und Ordnungsrelationen. Czech. Math. J. *22 (97)*, 1972, 373—392.

[7] *Szász, G.:* Einführung in die Verbandstheorie. Leipzig, Teubner-Verlag, 1962.

[8] *Szpilrajm, E.:* Sur l'extension de l'ordre partiel. Fund. Math. *16* (1930), 386—389.

Anschrift des Verfassers: 166 27 Praha 6 - Dejvice, Suchbátarova 1902, ČSSR (České vysoké učení technické).