Josef Vala

Über die Dualisation einiger Paare von Mannigfaltigkeiten mit linearen Erzeugenden

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 23 (1973), No. 3, 509–520

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101193

Czechoslovak Mathematical Journal, 23 (98) 1973, Praha

ÜBER DIE DUALISATION EINIGER PAARE VON MANNIGFALTIGKEITEN MIT LINEAREN ERZEUGENDEN

JOSEF VALA, Brno

(Eigegangen am 3. Oktober 1972)

In der Abhandlung [4] findet man die Eigenschaften einiger Paare von Mannigfaltigkeiten mit linearen Erzeugenden. Die Ergebnisse benützt man zur Dualisation solcher Paare.

Im projektiven $(2m - 1)$-dimensionalen Raum P_{2m-1} $(m \geqq 2)$ betrachten wir $2m$ Punktmannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots, (A_m), (\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \ldots, (\bar{A}_m)$. Jede von ihnen soll von den Hauptparametern $u_1, u_2, \ldots, u_m$ abhängig sein. Die Parameter sollen alle Werte aus dem Gebiet Δ einnehmen. Wir werden voraussetzen, daß für alle Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ die entsprechenden Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m$ linear unabhängig sind.

Im Raume P_{2m-1} benützen wir ein bewegliches Koordinatensystem mit den Eckpunkten $A_1, A_2, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m$. Dann gilt:

$$(1) \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k + \tilde{\omega}_i^k \bar{A}_k\,, \quad \mathrm{d}\bar{A}_i = \tilde{\bar{\omega}}_i^k A_k + \bar{\omega}_i^k \bar{A}_k\,; \quad i, k = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Alle Formen $\tilde{\omega}_i^k$, $\tilde{\bar{\omega}}_i^k$ sind Hauptformen; für alle Werte $i, k, i \neq k$, sind ω_i^k, $\bar{\omega}_i^k$ auch Hauptformen.

Die durch einander entsprechende (für gleiche Werte der Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m$) Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m$ bestimmten linearen Räume bezeichnen wir mit P_{m-1}, ähnlich kann man die Räume $\bar{P}_{m-1}$ definieren. Die einander entsprechenden Räume P_{m-1}, $\bar{P}_{m-1}$ haben keinen Punkt gemein. Wenn wir alle Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ betrachten, dann bilden die Räume P_{m-1} die Mannigfaltigkeit V, ebenso bilden die Räume $\bar{P}_{m-1}$ die Mannigfaltigkeit $\bar{V}$.

Der Berührraum τ_M der Mannigfaltigkeit V im Punkte $M \subset V$ ist der Raum kleinster Dimension, der die Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_m, \mathrm{d}M$ enthält. Im allgemeinen Fall fällt der Raum τ_M mit P_{2m-1} zusammen. Im anderen Fall ist *M der Brennpunkt der Erzeugenden P_{m-1} der Mannigfaltigkeit V.* Die Brennpunkte des Raumes P_{m-1} bilden die algebraische Punktmannigfaltigkeit V_{m-1}^m m-ter Ordnung. Wenn wir alle diese Mannigfaltigkeiten für $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ betrachten, dann bilden sie die

Mannigfaltigkeit V_b. Ähnliche Beziehungen gelten auch für die Mannigfaltigkeit $\bar{V}$. Die zugeordneten Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir wie im vorhergehenden Falle, man muß nur noch das Zeichnen $^{-}$ zufügen.

Wir werden voraussetzen, daß für alle Gesamtheiten von m Zahlen $u_1, u_2, \dots, u_m \subset \Delta$ die Dimension der Berührräume der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \dots, (A_m), (\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \dots, (\bar{A}_m)$ gleich m ist. Weiter soll

$$(A_1), (A_2), \dots, (A_m) \subset V_b\,, \quad (\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \dots, (\bar{A}_m) \subset \bar{V}_b$$

gelten. Für alle Werte $i = 1, 2, \dots, m$ und für alle Gesamtheiten von $u_1, u_2, \dots, u_m \subset \Delta$ sollen die Berührräume τ_{A_i} der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_i die Dimension $(2m - 2)$ haben.

Der Berührraum der Mannigfaltigkeit (A_i) im Punkte A_i schneidet den zugehörigen Raum P_{m-1} in der Geraden t_i. Der beliebige durch die Gerade t_i gehende Berührunterraum der Mannigfaltigkeit (A_i) ist *der Torsalunterraum der Mannigfaltigkeit* (A_i) im Punkte A_i.

Durch die Angabe von m Werten $u_1, u_2, \dots, u_m \subset \Delta$ ist auf jeder der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \dots, (A_m)$ immer ein Punkt gegeben. Dadurch entsteht die Korrespondenz B der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \dots, (A_m)$.

$$\Omega = 0 \tag{2}$$

sei die Pfaffsche Gleichung in den Differentialen $\mathrm{d}u_1, \mathrm{d}u_2, \dots, \mathrm{d}u_m$. Die Korrespondenz B nennt man für die gegebenen Werte $u_1, u_2, \dots, u_m$ singulär, wenn mindestens eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist: 1. Durch die einzige Gleichung (2) sind in allen zugeordneten Punkten $A_1, A_2, \dots, A_m$ die Torsalunterräume der entsprechenden Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \dots, (A_m)$ gegeben. 2. Es existieren zwei unabhängige Gleichungen (2) und die Zahl i aus der Menge $1, 2, \dots, m$ so, daß durch jede dieser Gleichungen in den zugehörigen Punkten $A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_m$ die Torsalunterräume der entsprechenden Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \dots, (A_{i-1}), (A_{i+1}), \dots, (A_m)$ gegeben sind.

Im folgenden setzen wir voraus, daß für alle Werte von $u_1, u_2, \dots, u_m \subset \Delta$ die Korrespondenz C nicht singulär ist.

Die Mannigfaltigkeiten $(\bar{A}_1), (\bar{A}_2), \dots, (\bar{A}_m), \bar{V}$ sollen dieselbe Voraussetzungen wie $(A_1), (A_2), \dots, (A_m), V$ erfüllen. Die zugeordneten Bezeichnungen muß man noch mit $^{-}$ ergänzen. Dann kann man die infinitesimale Bewegung des Bezugssystems durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathrm{d}A_i &= \omega_i^k A_k + \varphi_i^{kr} \omega_r \bar{A}_k\,, \\ \mathrm{d}\bar{A}_i &= \psi_i^{kr} \bar{\omega}_r A_k + \bar{\omega}_i^k \bar{A}_k\,; \end{aligned} \tag{3}$$

$$i, k = 1, 2, \dots, m\,; \quad r = 1, 2, \dots, (i-1), (i+1), \dots, m$$

ausdrücken. $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m$ sind die linear unabhängigen Pfaffschen Hauptformen.

Die Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ nennt man *die torsalen Formen der Mannigfaltigkeit V*. Dasselbe gilt für die Formen $\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \ldots, \bar{\omega}_m$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$. φ_i^{kr}, ψ_i^{kr} sind die Funktionen der Hauptparameter und im allgemeinen auch der sekundären Parameter [4].

Durch die Gleichungen

$$\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \ldots, \omega_{i-1} = 0, \omega_{i+1} = 0, \ldots, \omega_m = 0$$

ist auf der Mannigfaltigkeit V die Schicht der einparametrigen Systeme der Räume P_{m-1} gegeben. In jedem dieser Systeme sind die Punkte A_i (i ist fest) singulär in dem Sinne, daß der Berührraum dieses Systemes im Punkte A_i mit der entsprechenden Erzeugenden P_{m-1} der Mannigfaltigkeit V zusammenfällt. Die angeführten Systeme bezeichnen wir als *die zum Werte i gehörigen Torsalsysteme der Erzeugenden* P_{m-1}. Die beliebige lineare Kombination der Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{i-1}, \omega_{i+1}, \ldots, \omega_m$ bezeichnen wir als *die zum Paare* A_i, *V gehörige Torstalform.* Θ sei eine solche Form. Zur Gleichung $\Theta = 0$ gehört der Berührraum der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_i, der höchstens die Dimension $(2m - 3)$ hat.

Durch die Gleichungen

$$\bar{\omega}_1 = 0, \bar{\omega}_2 = 0, \ldots, \bar{\omega}_{i-1} = 0, \bar{\omega}_{i+1} = 0, \ldots, \bar{\omega}_m = 0$$

sind auf der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ *die zum Werte i gehörigen Schichten der Torsalsysteme der Erzeugenden* $\bar{P}_{m-1}$ gegeben. Man kann auch die *zum Paare* $\bar{A}_i$, $\bar{V}$ *gehörigen Torsalformen* definieren.

Untersuchen wir das Paar der Mannigfaltigkeiten V, $\bar{V}$. Das Paar besitze die Korrespondenz C: $V(P_{m-1}) \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$, wobei die zugeordneten Erzeugenden P_{m-1}, $\bar{P}_{m-1}$ stets denselben m Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_m$ entsprechen. Wenn für jeden Wert von i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ zu jedem Torsalsystem der Erzeugenden der Mannigfaltigkeit V das Torsalsystem der Erzeugenden der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ entspricht, dann bezeichnen wir die Korrespondenz C: $V(P_{m-1}) \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$ als torsal. Wenn C: $V(P_{m-1}) \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$ torsal ist, dann kann man die Gleichung (3) in der Form

$$\text{(4)} \qquad \mathrm{d}A_i = \omega_i^k A_k + \varphi_i^{kr} \omega_r \bar{A}_k\,, \quad \mathrm{d}\bar{A}_i = \psi_i^{kr} \omega_r A_k + \bar{\omega}_i^k \bar{A}_k$$

schreiben [4].

In jedem Punkt A_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ betrachten wir den Berührraum α_i der Mannigfaltigkeit V. Es gilt nach (3):

$$\text{(5)} \qquad \alpha_i = \left(A_1, A_2, \ldots, A_m, \varphi_i^{k1}\bar{A}_k, \varphi_i^{k2}\bar{A}_k, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}\bar{A}_k, \varphi_i^{k(i+1)}\bar{A}_k, \ldots, \varphi_i^{km}\bar{A}_k\right).$$

Ähnlich kann man den Berührraum $\bar{\alpha}_i$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}$ im Punkte $\bar{A}_i$ berechnen:

$$\text{(6)} \qquad \bar{\alpha}_i = \left(\psi_i^{k1} A_k, \psi_i^{k2} A_k, \ldots, \psi_i^{k(i-1)} A_k, \psi_i^{k(i+1)} A_k, \ldots, \psi_i^{km} A_k, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m\right).$$

Für die Werte von $\varrho = 1, 2, \ldots, m$ führen wir die folgende Bezeichnung ein:

(7)
$$T_\varrho = (A_1, A_2, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_{\varrho-1}, \bar{A}_{\varrho+1}, \ldots, \bar{A}_m)\,,$$
$$Q_\varrho = (A_1, A_2, \ldots, A_{\varrho-1}, A_{\varrho+1}, \ldots, A_m, \bar{A}_1, \bar{A}_2, \ldots, \bar{A}_m)\,.$$

Aus den Gleichungen (5), (6), (7) folgt dann:

(8)
$$\begin{aligned}\alpha_i = {} & T_1(\varphi_i^{k_1 1}, \varphi_i^{k_1 2}, \ldots, \varphi_i^{k_1(i-1)}, \varphi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_1 m}) + \\ & + T_2(\varphi_i^{k_2 1}, \varphi_i^{k_2 2}, \ldots, \varphi_i^{k_2(i-1)}, \varphi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_2 m}) + \\ & + \ldots + \\ & + T_m(\varphi_i^{k_m 1}, \varphi_i^{k_m 2}, \ldots, \varphi_i^{k_m(i-1)}, \varphi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_m m})\,.\end{aligned}$$

(9)
$$\begin{aligned}\bar{\alpha}_i = {} & Q_1(\psi_i^{k_1 1}, \psi_i^{k_1 2}, \ldots, \psi_i^{k_1(i-1)}, \psi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \psi_i^{k_1 m}) + \\ & + Q_2(\psi_i^{k_2 1}, \psi_i^{k_2 2}, \ldots, \psi_i^{k_2(i-1)}, \psi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \psi_i^{k_2 m}) + \\ & + \ldots + \\ & + Q_m(\psi_i^{k_m 1}, \psi_i^{k_m 2}, \ldots, \psi_i^{k_m(i-1)}, \psi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \psi_i^{k_m m})\,.\end{aligned}$$

Die Zeilen der Determinaten in den Klammern sind durch $k_1 = 2, 3, \ldots, m$; $k_2 = 1, 3, 4, \ldots, m; \ldots; k_m = 1, 2, \ldots, (m-1)$; bestimmt.

Setzen wir den zum Raume P_{2m-1} dualen Raum P^*_{2m-1} voraus. Die Punkte dieses Raumes sind die zum Raume P_{2m-1} gehörigen $(2m-2)$-dimensionalen Räume.

Die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sind für die Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ linear unabhängig, wenn

(10a)
$$((\varphi_i^{k_1 1}, \varphi_i^{k_1 2}, \ldots, \varphi_i^{k_1(i-1)}, \varphi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_1 m}), (\varphi_i^{k_2 1}, \varphi_i^{k_2 2}, \ldots \ldots, \varphi_i^{k_2(i-1)}, \varphi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_2 m}), \ldots, (\varphi_i^{k_m 1}, \varphi_i^{k_m 2}, \ldots, \varphi_i^{k_m(i-1)}, \varphi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_m m})) \neq 0$$

gilt. Auf der linken Seite der Relation (10a) steht die Determinante, ihre Glieder sind die Koeffizienten der Gleichung (8), die Zeilen sind durch die Werte $i = 1, 2, \ldots \ldots, m$ bestimmt. Ebenso sind die Punkte $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ für die bestimmten Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ linear unabhängig, wenn

(10b)
$$((\psi_i^{k_1 1}, \psi_i^{k_1 2}, \ldots, \psi_i^{k_1(i-1)}, \psi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \psi_i^{k_1 m}), (\psi_i^{k_2 1}, \psi_i^{k_2 2}, \ldots \ldots, \psi_i^{k_2(i-1)}, \psi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \psi_i^{k_2 m}), \ldots, (\psi_i^{k_m 1}, \psi_i^{k_m 2}, \ldots, \psi_i^{k_m(i-1)}, \psi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \psi_i^{k_m m})) \neq 0$$

gilt. Wenn die einander entsprechenden Räume $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ linear unabhängig sind und dasselbe für die entsprechenden Räume $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ gilt, dann sind die Räume $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ linear unabhängig. Im folgenden werden wir voraussetzen, daß die Ungleichheiten (10a), (10b) für alle Werte von $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ gelten.

Bei den festen Werten der Parameter $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ bestimmen die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ den $(m-1)$-dimensionalen linearen Raum P^*_{m-1}. Nach (8), (10a) fällt der Raum P^*_{m-1} mit dem durch die entsprechenden Punkte $T_1, T_2, \ldots, T_m$ bestimmten linearen Raum zusammen.

Im Raume P_{m-1} betrachten wir den Punkt

$$M = x^j A_j \quad (j = 1, 2, \ldots, m) .$$

Dann gilt:

$$\mathrm{d}M = x^j \varphi_j^{kr} \omega_r \bar{A}_k \quad (\mathrm{mod}\ A_1, A_2, \ldots, A_m) .$$

Wenn M der Brennpunkt des Raumes P_{m-1} ist, dann sind die Punkte

$$x^j \varphi_j^{k1} \bar{A}_k,\ x^j \varphi_j^{k2} \bar{A}_k, \ldots, x^j \varphi_j^{km} \bar{A}_k$$

linear abhängig. Wenn die Dimension des Berührraumes τ_M der Mannigfaltigkeit V im Punkte M gleich $(2m - 2)$ ist, dann kann man τ_M als die lineare Kombination von $T_1, T_2, \ldots, T_m$ bestimmen. Im Raume P^*_{2m-1} gehört zum Raume τ_M der im Raume P^*_{m-1} liegende Punkt. Der Raum P^*_{m-1} gehört also nicht nur zu den Punkten $A_1, A_2, \ldots, A_m$, sondern zu allen Punkten der Brennmannigfaltigkeit des Raumes P_{m-1}, in denen die Dimension des Berührraumes der Mannigfaltigkeit V gleich $(2m - 2)$ ist.

Ähnliche Betrachtungen gelten auch für den durch die Punkte $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ bestimmten $(m - 1)$-dimensionalen Raum $\bar{P}^*_{m-1} \subset P^*_{2m-1}$.

Unter Voraussetzung aller Werte $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ bilden die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_m$, $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ die Punktmannigfaltigkeiten $(\alpha_1), (\alpha_2), \ldots, (\alpha_m), (\bar{\alpha}_1), (\bar{\alpha}_2), \ldots$ $\ldots, (\bar{\alpha}_m)$. Die Räume P^*_{m-1} bestimmen dann die Mannigfaltigkeit V^*, ebenso bilden die Räume $\bar{P}^*_{m-1}$ die Mannigfaltigkeit $\bar{V}^*$. V^*, $\bar{V}^*$ bilden das Paar P^* der Mannigfaltigkeiten des Raumes P^*_{2m-1}.

Im folgenden untersuchen wir die Berührräume der Mannigfaltigkeit V^* in den Punkten $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und die Berührräume von $\bar{V}^*$ in den Punkten $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$. Durch die Differentiation der Gleichung (7) folgt:

$$(11) \qquad \mathrm{d}T_\varrho = (-1)^{(\varrho-1)+(m-1)} \varphi_1^{\varrho r} \omega_r Q_1 + (-1)^{(\varrho-1)+(m-2)} \varphi_2^{\varrho r} \omega_r Q_2 + \\ + \ldots + (-1)^{(\varrho-1)} \varphi_m^{\varrho r} \omega_r Q_m + (\ldots) .$$

Mit $(\ldots)$ bezeichnen wir die Glieder, die lineare Kombinationen der Größen $T_1, T_2, \ldots$ $\ldots, T_m$ sind.

Ähnlich bekommen wir:

$$(12) \qquad \mathrm{d}Q_\varrho = (-1)^{(m-\varrho)} \psi_1^{\varrho r} \bar{\omega}_r T_1 + (-1)^{(m-\varrho)+1} \psi_2^{\varrho r} \bar{\omega}_r T_2 + \\ + \ldots + (-1)^{(m-\varrho)+(m-1)} \psi_m^{\varrho r} \bar{\omega}_r T_m + [\ldots] .$$

Mit $[\ldots]$ bezeichnen wir die Glieder, die lineare Kombinationen der Größen Q_1, $Q_2, \ldots, Q_m$ sind.

Aus den Gleichungen (8), (11) folgt dann:

$$
\begin{aligned}
(13)\quad d\alpha_i = {} & Q_1[(-1)^{(m-1)}\, \varphi_1^{1r}\omega_r(\varphi_i^{k_1 1}, \varphi_i^{k_1 2}, \ldots, \varphi_i^{k_1(i-1)}, \varphi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_1 m}) + \\
& + (-1)^{1+(m-1)}\, \varphi_1^{2r}\omega_r(\varphi_i^{k_2 1}, \varphi_i^{k_2 2}, \ldots, \varphi_i^{k_2(i-1)}, \varphi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_2 m}) + \\
& + \ldots + \\
& + (-1)^{(m-1)+(m-1)}\, \varphi_1^{mr}\omega_r(\varphi_i^{k_m 1}, \varphi_i^{k_m 2}, \ldots, \varphi_i^{k_m(i-1)}, \varphi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_m m})] + \\
& + Q_2[(-1)^{(m-2)}\, \varphi_2^{1r}\omega_r(\varphi_i^{k_1 1}, \varphi_i^{k_1 2}, \ldots, \varphi_i^{k_1(i-1)}, \varphi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_1 m}) + \\
& + (-1)^{1+(m-2)}\, \varphi_2^{2r}\omega_r(\varphi_i^{k_2 1}, \varphi_i^{k_2 2}, \ldots, \varphi_i^{k_2(i-1)}, \varphi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_2 m}) + \\
& + \ldots + \\
& + (-1)^{(m-1)+(m-2)}\, \varphi_2^{mr}\omega_r(\varphi_i^{k_m 1}, \varphi_i^{k_m 2}, \ldots, \varphi_i^{k_m(i-1)}, \varphi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_m m})] + \\
& + \ldots + \\
& + Q_m[\varphi_m^{1r}\omega_r(\varphi_i^{k_1 1}, \varphi_i^{k_1 2}, \ldots, \varphi_i^{k_1(i-1)}, \varphi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_1 m}) + \\
& + (-1)\, \varphi_m^{2r}\omega_r(\varphi_i^{k_2 1}, \varphi_i^{k_2 2}, \ldots, \varphi_i^{k_2(i-1)}, \varphi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_2 m}) + \\
& + \ldots + \\
& + (-1)^{m-1}\varphi_m^{mr}\omega_r(\varphi_i^{k_m 1}, \varphi_i^{k_m 2}, \ldots, \varphi_i^{k_m(i-1)}, \varphi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_m m})] + \\
& + (\ldots)\,.
\end{aligned}
$$

Daraus folgt:

$$
\begin{aligned}
(14)\quad d\alpha_i = {} & Q_1[(-1)^{m-1+1+i}\, \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_1^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})] + \\
& + Q_2[(-1)^{m-2+1+i}\, \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_2^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})] + \\
& + \ldots + \\
& + Q_{i-1}[(-1)^{m-i+1+1+i}\, \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_{(i-1)}^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})] + \\
& + Q_{i+1}[(-1)^{m-i-1+1+i}\, \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_{(i+1)}^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})] + \\
& + \ldots + \\
& + Q_m[(-1)^{1+i}\, \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_m^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})] + \\
& + (\ldots)\,.
\end{aligned}
$$

Es gilt nämlich:

$$
(15)\qquad \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_i^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km}) = 0\,.
$$

(Die Zeilen der Determinanten in den Gleichungen (14), (15) sind durch $k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, m$ bestimmt.)

Wir benützen die folgende Bezeichnung:

$$
(16)\qquad d\alpha_i = \Omega_i^s\alpha_s + \tilde{\Omega}_i^s\bar{\alpha}_s\,, \quad s = 1, 2, \ldots, m\,.
$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8), (9) bekommen wir dann:

$$(17)\quad \begin{aligned} d\alpha_i = {} & Q_1[\tilde{\Omega}_i^s(\psi_s^{k_11}, \psi_s^{k_12}, \ldots, \psi_s^{k_1(s-1)}, \psi_s^{k_1(s+1)}, \ldots, \psi_s^{k_1m})] + \\ & + Q_2[\tilde{\Omega}_i^s(\psi_s^{k_21}, \psi_s^{k_22}, \ldots, \psi_s^{k_2(s-1)}, \psi_s^{k_2(s+1)}, \ldots, \psi_s^{k_2m})] + \\ & + \ldots + \\ & + Q_m[\tilde{\Omega}_i^s(\psi_s^{k_m1}, \psi_s^{k_m2}, \ldots, \psi_s^{k_m(s-1)}, \psi_s^{k_m(s+1)}, \ldots, \psi_s^{k_mm})] + \\ & + (\ldots)\,. \end{aligned}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der Größen $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$ in den Gleichungen (17), (14). Für jeden Wert von $i = 1, 2, \ldots, m$ bekommen wir dann m lineare Gleichungen für m Unbekannte $\tilde{\Omega}_i^1, \tilde{\Omega}_i^2, \ldots, \tilde{\Omega}_i^m$. Daraus kann man die Formen $\tilde{\Omega}_i^1$, $\tilde{\Omega}_i^2, \ldots, \tilde{\Omega}_i^m$ berechnen. Das folgt aus der Relation (10b). Die angeführten Formen hängen nur von den folgenden $(m-1)$ Formen ab:

$$(18)\quad \begin{aligned} \omega_{i1}^* &= \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_1^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})\,, \\ \omega_{i2}^* &= \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_2^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})\,, \\ &\vdots \\ \omega_{i(i-1)}^* &= \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_{(i-1)}^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})\,, \\ \omega_{i(i+1)}^* &= \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_{(i+1)}^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})\,, \\ &\vdots \\ \omega_{im}^* &= \omega_r(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_m^{kr}, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km})\,. \end{aligned}$$

Ähnlich bekommen wir:

(19)

$$\begin{aligned} d\bar{\alpha}_i = {} & T_1[(-1)^{m-1+i+1}\ \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_1^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})] + \\ & + T_2[(-1)^{m-1+1+i+1}\ \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_2^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})] + \\ & + \ldots + \\ & + T_{i-1}[(-1)^{m-1+i-2+i+1}\ \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_{(i-1)}^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})] + \\ & + T_{i+1}[(-1)^{m-1+i+i+1}\ \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_{(i+1)}^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})] + \\ & + \ldots + \\ & + T_m[(-1)^{m-1+m-1+i+1}\ \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_m^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})] + \\ & + [\ldots]\,. \end{aligned}$$

$$\bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_i^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km}) = 0\,.$$

Wir benützen die folgende Bezeichnung:

$$(20)\qquad d\bar{\alpha}_i = \tilde{\bar{\Omega}}_i^s \alpha_i + \bar{\Omega}_i^s \bar{\alpha}_i\,.$$

Mit Hilfe der Gleichungen (8), (9) bekommen wir dann:

$$(21)\qquad \begin{aligned} \mathrm{d}\bar{\alpha}_i = {} & T_1[\bar{\tilde{\Omega}}{}^s_i(\varphi_i^{k_1 1}, \varphi_i^{k_1 2}, \ldots, \varphi_i^{k_1(i-1)}, \varphi_i^{k_1(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_1 m})] + \\ & + T_2[\bar{\tilde{\Omega}}{}^s_i(\varphi_i^{k_2 1}, \varphi_i^{k_2 2}, \ldots, \varphi_i^{k_2(i-1)}, \varphi_i^{k_2(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_2 m})] + \\ & + \ldots + \\ & + T_m[\bar{\tilde{\Omega}}{}^s_i(\varphi_i^{k_m 1}, \varphi_i^{k_m 2}, \ldots, \varphi_i^{k_m(i-1)}, \varphi_i^{k_m(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{k_m m})] + \\ & + [\ldots]\,. \end{aligned}$$

Vergleichen wir die Koeffizienten der Größen $T_1, T_2, \ldots, T_m$ in den Gleichungen (19), (21). Für jeden Wert $i = 1, 2, \ldots, m$ bekommen wir dann m lineare Gleichungen für m Umbekannte $\tilde{\Omega}_i^1, \tilde{\Omega}_i^2, \ldots, \tilde{\Omega}_i^m$. Daraus kann man die Formen $\tilde{\Omega}_i^1, \tilde{\Omega}_i^2, \ldots, \tilde{\Omega}_i^m$ berechnen. Das folgt aus der Relation (10a). Die angeführten Formen hängen nur von den folgenden $(m-1)$ Formen ab:

$$(22)\qquad \begin{aligned} \bar{\omega}^*_{i1} &= \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_1^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})\,, \\ \bar{\omega}^*_{i2} &= \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_2^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})\,, \\ &\vdots \\ \bar{\omega}^*_{i(i-1)} &= \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_{(i-1)}^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})\,, \\ \bar{\omega}^*_{i(i+1)} &= \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_{(i+1)}^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})\,, \\ &\vdots \\ \bar{\omega}^*_{im} &= \bar{\omega}_r(\psi_i^{k1}, \psi_i^{k2}, \ldots, \psi_i^{k(i-1)}, \psi_m^{kr}, \psi_i^{k(i+1)}, \ldots, \psi_i^{km})\,. \end{aligned}$$

Satz 1. *$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ sind die Brennpunkte der Mannigfaltigkeit V^*, ebenso sind $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ die Brennpunkte der Mannigfaltigkeit $\bar{V}^*$.*

Beweis. Für jeden Wert von i sind die Formen $\tilde{\Omega}_i^s$, $s = 1, 2, \ldots, m$, nur von $(m-1)$ Formen (18) abhängig. Der Berührraum der Mannigfaltigkeit V^* im Punkte α_i ist durch die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ und durch die $(m-1)$ linearen Kombinationen der Punkte $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ bestimmt. Im allgemeinen ist die Dimension des Berührraumes gleich $2m - 2 < 2m - 1$. Der Punkt α_i ist der Brennpunkt der Mannigfaltigkeit V^*. Ähnliche Betrachtungen folgen für die Punkte $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots, \bar{\alpha}_m$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}^*$.

Im folgenden werden wir voraussetzen, daß i eine feste Zahl aus der Menge $1, 2, \ldots, m$ ist. Für alle Werte $1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, m$ sollen die Formen $\omega^*_{i1}, \omega^*_{i2}, \ldots, \omega^*_{i(i-1)}, \omega^*_{i(i+1)}, \ldots, \omega^*_{im}$ linear unabhängig sein. Dasselbe soll für die Formen $\bar{\omega}^*_{i1}, \bar{\omega}^*_{i2}, \ldots, \bar{\omega}^*_{i(i-1)}, \bar{\omega}^*_{i(i+1)}, \ldots, \bar{\omega}^*_{im}$ gelten.

Satz 2. *h soll die Werte $1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, m$ annehmen. Durch die Gleichungen $\omega^*_{ih} = 0$ sind die Tangenten der Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots \ldots, (A_{i-1}), (A_{i+1}), \ldots, (A_m)$ in den einander entsprechenden Punkten $A_1, A_2, \ldots$*

$\ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ gegeben. Diese Geraden liegen immer in dem Berührraum der Mannigfaltigkeit V im entsprechenden Punkte A_i.

Beweis. Setzen wir zuerst voraus, daß h irgendeine der Zahlen $1, 2, \ldots, m$, $h \neq i$, ist. Wenn der lineare Berührunterraum $(m-1)$-ter Ordnung der Mannigfaltigkeit (A_h) im Punkte A_h zum Berührraum der Mannigfaltigkeit V im entsprechenden Punkte A_i gehört, dann sind die zugehörigen Punkte

$$(23)\qquad \varphi_i^{k1}\bar{A}_k,\ \varphi_i^{k2}\bar{A}_k, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}\bar{A}_k,\ \varphi_h^{kr}\omega_r\bar{A}_k,\ \varphi_i^{k(i+1)}\bar{A}_k, \ldots, \varphi_i^{km}\bar{A}_k$$

linear abhängig. Für den gegebenen Berührunterraum gilt dann:

$$\left(\varphi_i^{k1}, \varphi_i^{k2}, \ldots, \varphi_i^{k(i-1)}, \varphi_h^{kr}\omega_r, \varphi_i^{k(i+1)}, \ldots, \varphi_i^{km}\right) = 0\,.$$

Daraus folgt mit Hilfe der Gleichung (18)

$$(24)\qquad \omega_{ih}^* = 0\,.$$

Wenn umgekehrt für den bestimmten Wert von h die Gleichung (24) gilt, dann sind die entsprechenden Punkte (23) linear abhängig. Der entsprechende Berührunterraum $(m-1)$-ter Ordnung der Mannigfaltigkeit (A_h) im Punkte A_h liegt immer im zugehörigen Berührraum der Mannigfaltigkeit V im Punkte A_i.

Setzen wir voraus, daß h alle Werte $1, 2, \ldots, (i-1), (i+1), \ldots, m$ einnimmt. Durch die $(m-1)$ Gleichungen (24) ist in jedem der einander entsprechenden Punkte $A_1, A_2, \ldots, A_{i-1}, A_{i+1}, \ldots, A_m$ die Tangente der zugehörigen Mannigfaltigkeiten $(A_1), (A_2), \ldots, (A_{i-1}), (A_{i+1}), \ldots, (A_m)$ gegeben. Alle diese Tangenten liegen im Berührraum der Mannigfaltigkeit V im entsprechenden Punkte A_i.

Θ^* sei die Pfaffsche Form in den Differentialen $du_1, du_2, \ldots, du_m$. Diese Form nennt man zum Paare α_i, V^* torsal, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist: Zur Gleichung $\Theta^* = 0$ gehört immer der Berührunterraum der Mannigfaltigkeit V^* im Punkte α_i, der höchstens die Dimension $(2m-3)$ hat. Aus den Gleichungen (16), (18) folgt, daß Θ^* die beliebige lineare Kombination der Formen $\omega_{i1}^*, \omega_{i2}^*, \ldots, \omega_{i(i-1)}^*, \omega_{i(i+1)}^*, \ldots, \omega_{im}^*$ ist.

Ähnliche Betrachtungen gelten auch für das Paar $\bar{\alpha}_i, \bar{V}^*$.

Im Falle $m = 2$ bilden $V^*, \bar{V}^*$ das Paar P^* der Geradenkongruenzen des Raumes P_3^*.

Satz 3. *Im Falle $m = 2$ sind die torsalen Formen des Paares A_1, V gleichzeitig die torsalen Formen des Paares α_2, V^*. Die torsalen Formen des Paares A_2, V sind gleichzeitig die torsalen Formen des Paares α_1, V^*.*

Ähnliche Sätze gelten auch für die Mannigfaltigkeiten $\bar{V}, \bar{V}^*$.

Beweis. Im Falle $m = 2$ gilt nach (18), (22):

$$(25)\qquad \begin{aligned} \omega_{12}^* &= \omega_1(\varphi_2^{k1}, \varphi_1^{k2}), & \omega_{21}^* &= \omega_2(\varphi_2^{k1}, \varphi_1^{k2}),\\ \bar{\omega}_{12}^* &= \bar{\omega}_1(\psi_2^{k1}, \psi_1^{k2}), & \bar{\omega}_{21}^* &= \bar{\omega}_2(\psi_2^{k1}, \psi_1^{k2}). \end{aligned}$$

Aus den Gleichungen (16), (20), (25) folgt dann:

$$(26) \qquad \begin{aligned} d\alpha_1 &= \Omega_1^s\alpha_s + \omega_1 H_1^s\bar{\alpha}_s\,, \quad d\alpha_2 = \Omega_2^s\alpha_s + \omega_2 H_2^s\bar{\alpha}_s\,,\\ d\bar{\alpha}_1 &= \bar{\omega}_1\bar{H}_1^s\alpha_s + \bar{\Omega}_1^s\bar{\alpha}_s\,, \quad d\bar{\alpha}_2 = \bar{\omega}_2\bar{H}_2^s\alpha_s + \bar{\Omega}_2^s\bar{\alpha}_s\,; \end{aligned}$$

$s = 1, 2$; H_1^s, H_2^s, $\bar{H}_1^s$, $\bar{H}_2^s$ sind die Funktionen der Haupt- und im allgemeinen auch der sekundären Parameter.

Die Behauptung des Satzes folgt durch die Vergleichung der Relationen (26), (3) für $m = 2$.

Setzen wir nun $m \geqq 2$ voraus. Den beliebigen Werten der Parameter ordnen wir den linearen Raum S_{m-1} zu. Die Punkte dieses Raumes seien die Bilder der Pfaffschen Formen in den Differentialen $du_1, du_2, \ldots, du_m$. Die Eckpunkte des Koordinatensystemes dieses Raumes seien die Bilder der Formen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$. Das Bild der Form ω_{i1}^* liegt nach (18) im linearen Raume, der durch die Bilder der Formen $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_m$ gegeben ist, ebenso liegt das Bild der Form ω_{i2}^* im linearen Raume, der durch die Bilder der Formen $\omega_1, \omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_m$ gegeben ist, u.s.w. Wenn ω_i die Torsalform des Paares α_i, V^* ist, dann geht der durch die Bilder der Formen $\omega_{i1}^*, \omega_{i2}^*, \ldots, \omega_{i(i-1)}^*, \omega_{i(i+1)}^*, \ldots, \omega_{im}^*$ bestimmte Raum durch das Bild der Form ω_i.

Setzen wir nun $m = 3$ voraus. i, p, q seien verschiedene Zahlen aus der Menge 1, 2, 3. Weiter soll $p < q$ gelten. Aus den Gleichungen (18) folgt dann:

$$(27) \qquad \begin{aligned} \omega_{ip}^* &= \varepsilon\{\omega_i(\varphi_p^{ki}, \varphi_i^{kp}, \varphi_i^{kq}) + \omega_q(\varphi_p^{kq}, \varphi_i^{kp}, \varphi_i^{kq})\}\,,\\ \omega_{iq}^* &= \varepsilon\{\omega_i(\varphi_q^{ki}, \varphi_i^{kp}, \varphi_i^{kq}) + \omega_p(\varphi_q^{kp}, \varphi_i^{kp}, \varphi_i^{kq})\}\,; \end{aligned}$$

$\varepsilon = 1$ im Falle $i = 1, 3$, $\varepsilon = -1$ im Falle $i = 2$.

Wenn zum Paare α_i, V^* die Torsalform ω_i gehört, dann sind die Formen ω_i, ω_{ip}^*, ω_{iq}^* linear abhängig. Das ist nach (27) nur dann möglich, wenn mindestens eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$(28a) \qquad (\varphi_p^{kq}, \varphi_i^{kp}, \varphi_i^{kq}) = 0\,,$$

$$(28b) \qquad (\varphi_q^{kp}, \varphi_i^{kp}, \varphi_i^{kq}) = 0\,.$$

Ähnlich folgt: Zum Paare $\bar{\alpha}_i$, $\bar{V}^*$, gehört die Torsalform $\bar{\omega}_i$ genau dann, wenn mindestens eine der folgenden Gleichungen gilt:

$$(29a) \qquad (\psi_p^{kq}, \psi_i^{kp}, \psi_i^{kq}) = 0\,,$$

$$(29b) \qquad (\psi_q^{kp}, \psi_i^{kp}, \psi_i^{kq}) = 0\,.$$

Satz 4. *ω_i ist im Falle $m = 3$ genau dann die Torsalform des Paares α_i, V^*, wenn mindestens ein von den durch $\omega_i = 0$ bestimmten Berührunterräumen der Mannigfaltigkeiten (A_p), (A_q) in den einander entsprechenden Punkten A_p, A_q zum Berührraum der Mannigfaltigkeit V im zugehörigen Punkte A_i gehört.*

Beweis. Bei der Gültigkeit der Voraussetzungen des Satzes sind im ersten Falle die Punkte

$$\varphi_p^{kq}\bar{A}_k,\ \varphi_i^{kp}\bar{A}_k,\ \varphi_i^{kq}\bar{A}_k \tag{30}$$

linear abhängig. Daraus folgt die Gleichung (28a). Aus den Relationen (27) folgt dann, daß ω_i die Torsalform des Paares α_i, V^* ist. Umgekehrt aus der Gültigkeit von (28a) folgt die lineare Abhängigkeit der Punkte (30). Ähnliche Betrachtungen gelten für den zweiten Fall.

Aus den Gleichungen (27) bekommen wir noch: Wenn der Punkt $\varphi_p^{ki}\bar{A}_k$ immer in dem Berührraum der Mannigfaltigkeit V im entsprechenden Punkte A_i liegt, dann ist ω_q die Torsalform des Paares α_i, V^*.

Unter der gegebenen Voraussetzung gilt nämlich

$$(\varphi_p^{ki},\ \varphi_i^{kp},\ \varphi_i^{kq}) = 0\,.$$

Ähnlich gilt: Wenn der Punkt $\varphi_q^{ki}\bar{A}_k$ immer in dem Berührraum der Mannigfaltigkeit V im entsprechenden Punkte A_i liegt, dann ist ω_p die Torsalform des Paares α_i, V^*.

Setzen wir nun $m \geqq 2$ voraus. Durch die Gleichungen (24) mit $h = 1, 2, \ldots$ $\ldots, (i-1), (i+1), \ldots, m$ ist auf der Mannigfaltigkeit V^* die Schicht der einparametrigen Systeme der Räume P_{m-1}^* gegeben. In jedem dieser Systeme sind die Punkte α_i (i ist fest) singulär in dem Sinne, daß der Berührraum dieses Systemes im Punkte α_i mit der entsprechenden Erzeugenden P_{m-1}^* der Mannigfaltigkeit V^* zusammenfällt. Die angeführten Systeme bezeichnen wir als *die zum Werte i gehörigen. Torsalsysteme der Erzeugenden P_{m-1}^* der Mannigfaltigkeit V^**. Ähnlich kann man *die zum Werte i gehörigen Torsalsysteme der Erzeugenden $\bar{P}_{m-1}^*$ der Mannigfaltigkeit* $\bar{V}^*$ definieren.

Untersuchen wir die Korrespondenz $C^*\colon V^*(P_{m-1}^*) \to \bar{V}^*(\bar{P}_{m-1}^*)$, wobei die zugeordneten Erzeugenden P_{m-1}^*, $\bar{P}_{m-1}^*$ stets denselben m Zahlen $u_1, u_2, \ldots, u_m \subset \Delta$ entsprechenden. Wenn für den bestimmten Wert von i zu dem Torsalsystem der Erzeugenden P_{m-1}^* der Mannigfaltigkeit V^* immer das Torsalsystem der Erzeugenden $\bar{P}_{m-1}^*$ der Mannigfaltigkeit $\bar{V}^*$ entspricht, dann ist *die Korrespondenz $C^*\colon V^*(P_{m-1}^*) \to \bar{V}^*(\bar{P}_{m-1}^*)$ für i torsal.*

Setzen wir voraus, daß $C^*\colon V^*(P_{m-1}^*) \to \bar{V}^*(\bar{P}_{m-1}^*)$ für i torsal ist. Für die beliebigen Werte der Parameter gehören die Bilder der Formen ω_{ih}^*, $\bar{\omega}_{ih}^*$, $h = 1, 2, \ldots, (i-1)$, $(i+1), \ldots, m$ im Raume S_{m-1} zu einem linearen Raum $(m-2)$-ter Ordnung.

Wenn $C^*\colon V^*(P_{m-1}^*) \to \bar{V}^*(\bar{P}_{m-1}^*)$ für alle Werte von i torsal ist, dann bezeichnen wir $C^*\colon V^*(P_{m-1}^*) \to \bar{V}^*(\bar{P}_{m-1}^*)$ als torsal.

Satz 5. *Setzen wir den Fall $m = 3$ voraus. $C\colon V(P_{m-1}) \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$* sei torsal. *$C^*\colon V^*(P_{m-1}^*) \to \bar{V}^*(\bar{P}_{m-1}^*)$ ist dann für den Wert i torsal, wenn*

$$\bar{\omega}_{ip}^* = \sigma_p \omega_{ip}^*\,, \quad \bar{\omega}_{iq}^* = \tau_q \omega_{iq}^*$$

gilt. (i, p, q *sind verschiedene Zahlen aus der Menge* 1, 2, 3; $p < q$; σ_p, τ_q *sind die Funktionen der erwähnten Parameter.*)

Beweis. Nach den schon früher gemachten Voraussetzungen sind die Formen ω^*_{ip}, ω^*_{iq} linear unabhängig, dasselbe gilt für die Formen $\bar{\omega}^*_{ip}$, $\bar{\omega}^*_{iq}$. Wenn C: $V(P_{m-1}) \to \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$ torsal ist, dann kann man die Gleichungen (4) benützen. Es gilt dann:

$$\begin{aligned}(31) \qquad \bar{\omega}^*_{ip} &= \varepsilon\{\omega_i(\psi^{ki}_p, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i) + \omega_q(\psi^{kq}_p, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i)\}\,, \\ \bar{\omega}^*_{iq} &= \varepsilon\{\omega_i(\psi^{ki}_q, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i) + \omega_p(\psi^{kp}_q, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i)\}\,,\end{aligned}$$

$$\varepsilon = 1 \text{ im Falle } i = 1, 3\,, \quad \varepsilon = -1 \text{ im Falle } i = 2\,.$$

Wenn C^*: $V^*(P^*_{m-1}) \to \bar{V}^*(\bar{P}^*_{m-1})$ für i torsal ist, dann sind die Formen $\bar{\omega}^*_{ip}$, ω^*_{ip}, ω^*_{iq} linear abhängig. Dasselbe gilt für die Formen $\bar{\omega}^*_{iq}$, ω^*_{ip}, ω^*_{iq}. Das kann man folgenderweise aufschreiben:

$$\begin{aligned}(32) \qquad \bar{\omega}^*_{ip} &= \sigma_p\omega^*_{ip} + \sigma_q\omega^*_{iq}\,, \\ \bar{\omega}^*_{iq} &= \tau_p\omega^*_{ip} + \tau_q\omega^*_{iq}\,.\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (27), (31) folgt dann: $\sigma_q = \tau_p = 0$. Die Lösung ist nur im Falle der Gültigkeit folgender Gleichungen möglich:

$$\begin{aligned}(\varphi^{ki}_p, \varphi^{kp}_i, \varphi^{kq}_i)(\psi^{kq}_p, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i) - (\varphi^{kq}_p, \varphi^{kp}_i, \varphi^{kq}_i)(\psi^{ki}_p, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i) = 0\,, \\ (\varphi^{ki}_q, \varphi^{kp}_i, \varphi^{kq}_i)(\psi^{kp}_q, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i) - (\varphi^{kp}_q, \varphi^{kp}_i, \varphi^{kq}_i)(\psi^{ki}_q, \psi^{kp}_i, \psi^{kq}_i) = 0\,.\end{aligned}$$

Satz 6. *Setzen wir den Fall* $m = 2$ *voraus.* C: $V(P_{m-1}) \to \bar{V}(\bar{P}_{m-1})$ *sei torsal; dann ist* C^*: $V^*(P^*_{m-1}) \to \bar{V}^*(\bar{P}^*_{m-1})$ *torsal.*

Beweis. In die Gleichungen (25) setzen wir $\bar{\omega}_1 = \omega_1$, $\bar{\omega}_2 = \omega_2$ ein. Daraus folgt sofort die Gültigkeit der Behauptung des Satzes.

Literatur

[1] *K. Svoboda:* Über die Punktdeformation einer vollständig fokalen Pseudokongruenzen, Math. Nachrichten *38* (1968), S. 197—206.

[2] *A. Švec:* Projective differential geometry of line congruences, Nakl. ČSAV Praha 1965.

[3] *J. Vala:* Über einige spezielle Kongruenzenpaare, Czech. Mathematical Journal *20* (1970), S. 140—148.

[4] *J. Vala:* Über einiger Mannigfaltigkeiten mit linearen Erzeugenden, Czech. Mathematical Journal *22* (1972), S. 242—265.

Anschrift des Verfassers: 662 37 Brno, Barvičova 85, ČSSR (Vysoké učení technické).