Czechoslovak Mathematical Journal

Jaroslav Lukeš

Théorème de Keldych dans la théorie axiomatique de Bauer des fonctions harmoniques

Czechoslovak Mathematical Journal, Vol. 24 (1974), No. 1, 114–125

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/101222`

Czechoslovak Mathematical Journal, 24 (99) 1974, Praha

THÉORÈME DE KELDYCH DANS LA THÉORIE AXIOMATIQUE DE BAUER DES FONCTIONS HARMONIQUES

JAROSLAV LUKEŠ, Praha

(Reçu le 13. avril 1973)

Introduction. Soit $(X, \mathscr{H})$ l'espace harmonique fort au sens de l'axiomatique de Bauer. Si U est un ouvert relativement compact dans X et si f est une fonction continue sur sa frontière U^*, la solution généralisée H_f^U du problème de Dirichlet relatif à f se prolonge d'une certaine façon en fonction finement continue à la fermeture $\overline{U}$ toute entière, désignons F sa restriction sur U^*. La fonction F est évidemment résolutive et la solution généralisée H_F^U ne s'identifie pas, en général, avec la solution initiale H_f^U. Observons que ce phénomène n'a pas lieu dans l'axiomatique de Brelot avec l'axiome (D), car H_f^U, pour f continue, est la seule fonction harmonique qu'on puisse faire correspondre à f de façon qu'elle soit linéaire et croissante par rapport à f et qui coïncide avec la solution du problème de Dirichlet lorsqu'elle existe (le théorème de Keldych-Brelot). L'inégalité qui existe entre H_f^U et H_F^U est causée par la non-coïncidence générale de la balayée $\hat{R}_p^{CU}$ et de la balayée double $\hat{R}_{\hat{R}_p{}^{CU}}^{CU}$.

Pour cette raison, dans la première partie de cette note, on construit „la balayée généralisée" $\hat{\boldsymbol{R}}_p^E$ de telle façon que l'égalité $\hat{\boldsymbol{R}}_{\hat{\boldsymbol{R}}_p{}^E}^E = \hat{\boldsymbol{R}}_p^E$ soit valable pour tout potentiel p continu. A l'aide de $\hat{\boldsymbol{R}}_p^E$ il est possible de définir la „solution généralisée" du problème de Dirichlet, qui s'identifie avec la solution du problème de Dirichlet lorsqu'elle existe. De plus, cette „solution généralisée" coïncide avec la „solution de Perron" de son prolongement finement continu. On montre que l'unicité du prolongement fonctionnel de la solution du problème de Dirichlet dépend essentielement de la négligeabilité de l'ensemble des points irréguliers. A la fin, les „solutions abstraites" du problème de Dirichlet sont étudiées, on les appelle opérateurs de Keldych. Il n'est pas difficile de démontrer, que l'espace harmonique $(X, \mathscr{H})$ satisfait à l'axiome (C) de polarité si, et seulement si, les „solutions obtenues par la méthode de Perron" sont les seules „solutions abstraites" pour tout ouvert relativement compact de X.

Notons, enfin, que la „solution généralisée" est souvent „affine" au sens Effros-Kazdan, alors on peut s'en servir pour la démonstration de simplicialité de certains ouverts de X.

Notation. Dans ce qui suit, on supposera qu'on s'est donné l'espace harmonique fort $(X, \mathscr{H})$ sur un espace métrisable localement compact X au sens de l'axiomatique de Bauer [3]. Nous rappelons les notations suivantes:

$\mathscr{C}(A)$ est l'ensemble des fonctions continues sur A,

$\mathscr{H}(U)$ est l'espace vectoriel des fonctions harmoniques sur U,

$\mathscr{H}_U^*$ (resp. $\mathscr{S}_U$) est le cône des fonctions hyperharmoniques (resp. surharmoniques) sur U,

$\mathscr{N}_X$ est l'ensemble des fonctions à peu près hyperharmoniques („nahezu hyperharmonische Funktionen"),

$\mathscr{P}$ est le cône des potentiels sur X,

$\mathscr{K}(X)$ est l'espace vectoriel des fonctions continues à support compact,

$$\mathscr{P}^c = \mathscr{P} \cap \mathscr{C}(X), \quad \mathscr{D} = (\mathscr{P}^c - \mathscr{P}^c) \cap \mathscr{K}(X),$$

$\overline{U}, U^0, U^*$ est la fermeture, l'intérieur et la frontière de U,

$f \wedge U$ signifie la restriction de f sur U.

Si $\mathscr{F}$ est un ensemble de fonctions, on désigne par $_+\mathscr{F}$ l'ensemble $\{f \in \mathscr{F}; f \geqq 0\}$. Soit $\mathscr{M}^+(Y)$ (resp. $\mathscr{M}_K^+(Y)$) l'ensemble des mesures de Radon positives (resp. mesures à support compact) sur Y. On note $\mathscr{L}(\mu)$ l'ensemble des fonctions μ-intégrables. Soit $\hat{f}$ la régularisée inférieure d'une fonction f, R_f^E la réduite et $\hat{R}_f^E$ la balayée de f sur E. Enfin, soit μ^E la balayée de mesure $\mu \in \mathscr{M}_K^+(X)$ sur E.

Si $U \subset X$ est un ouvert relativement compact, si f est une fonction borélienne, et si $x \in \overline{U}$, on définit $H_f^U(x) = \varepsilon_x^{CU}(f)$, où ε_x est la mesure de Dirac au point x et CU signifie le complément de U dans X. On sait que

$$H_f^U = \inf\{v \in \mathscr{H}_U^*; \liminf_{y \to x, y \in U} v(y) \geqq f(x), > -\infty \text{ pour tout } x \in U^*\}$$

sur U, et que pour toute fonction $u \in {_+\mathscr{H}_X^*}$, $u^* = u \wedge U^*$ on a $H_{u^*}^U = \hat{R}_u^{CU}$ sur $\overline{U}$.

On dit que $E \subset U^*$ est *négligeable* pour U, si E est de ε_x^{CU}-mesure nulle quel que soit $x \in U$. On désigne par U_{reg}^* l'ensemble des points réguliers de U et par U_{ir}^* l'ensemble des points irréguliers.

1. BALAYÉE PRINCIPALE

Notre démonstration du lemme suivant est en fait celle de Bauer [3], Satz 3.4.1.

1.1. Lemme. *Soit $\varphi : \mathscr{P}^c \to {_+\mathscr{N}_X}$ une application linéaire et croissante et soit $\varphi(p) \leqq p$ pour tout $p \in \mathscr{P}^c$. Alors, pour toute mesure $\mu \in \mathscr{M}_K^+(X)$ avec $\varphi(\mathscr{P}^c \cap \mathscr{K}(X)) \subset \mathscr{L}(\mu)$, il existe une mesure unique $^\varphi\mu \in \mathscr{M}^+(X)$ telle que $^\varphi\mu(p) = \mu(\varphi(p))$ pour tout $p \in \mathscr{P}^c$.*

Démonstration. En prenant ${}^{\varphi}\mu(f) = \mu(\varphi(p)) - \mu(\varphi(q))$ pour $f = p - q \in \in \mathscr{D}({}^{\varphi}\mu(f)$ est indépendant du choix de $p, q)$, on vérifie facilement que $f \mapsto {}^{\varphi}\mu(f)$ est une forme linéaire et positive sur $\mathscr{D}$ et on peut la prolonger uniquement sur $\mathscr{K}(X)$ en mesure de Radon ${}^{\varphi}\mu$ (Bourbaki [5], III.1.8, Prop. 9).

Soit maintenant $p \in \mathscr{P}^c$. Si $\mathscr{W}$ est une base d'ensembles réguliers, et si $\mathfrak{G}_p = \{p_{V_1,\ldots,V_n}, V_1, \ldots, V_n \in \mathscr{W}\}$ (voir [3], 3.4.1), on a $\inf \mathfrak{G}_p = 0$ et $p - q \in \mathfrak{G}_p$ pour tout $q \in \mathfrak{G}_p$. Alors

$$\inf\{\mu(\varphi(q));\ q \in \mathfrak{G}_p\} \leqq \inf\{\mu(q);\ q \in \mathfrak{G}_p\} = \inf\{{}^{\varphi}\mu(q);\ q \in \mathfrak{G}_p\} = 0\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} {}^{\varphi}\mu(p) &= {}^{\varphi}\mu(p) + \inf_q \mu(\varphi(q)) = \inf_q ({}^{\varphi}\mu(p) + \mu(\varphi(q)) = \\ &= \inf_q (\mu(\varphi(p)) + {}^{\varphi}\mu(q)) = \mu(\varphi(p)) + \inf_q {}^{\varphi}\mu(q) = \mu(\varphi(p))\,. \end{aligned}$$

1.2. Corollaire. *Soit φ comme dans le lemme 1.1. Si l'on prend $\hat{\varphi}(p) = \widehat{\varphi(p)}$ pour $p \in \mathscr{P}^c$, on déduit que $\hat{\varphi} : \mathscr{P}^c \to \mathscr{P}$ est aussi une forme linéaire et croissante et on peut définir ${}^{\varphi}\hat{\mu}$ comme ${}^{\hat{\varphi}}\mu$ pour $\hat{\mu} \in \mathscr{M}_K^+(X)$.*

1.3. Remarque. Il serait possible de formuler un lemme semblable pour les mesures dites admissibles ([12]), mais nous n'en aurons pas besoin.

Dans la suite, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ désigne des ordinaux, nous conserverons ω pour le premier ordinal dénombrable et Ω_1 pour le premier ordinal nondénombrable.

1.4. Définition. Soit $E \subset X$, $p \in \mathscr{P}$. Par induction transfinie nous définissons la réduite et la balayée d'ordre α $(\alpha < \Omega_1)$ de p sur E:

(1) $R(1, E, p) = R_p^E$, $\hat{R}(1, E, p) = \hat{R}_p^E$,

(2) soit $\alpha < \Omega_1$ et soient $R(\beta, E, p)$, $\hat{R}(\beta, E, p)$ déjà définies pour toutes $\beta < \alpha$ et $R(\beta, E, p) \geqq R(\gamma, E, p)$,

$$\hat{R}(\beta, E, p) \geqq \hat{R}(\gamma, E, p) \quad \text{si} \quad \beta \leqq \gamma < \alpha\,,$$

(i) si α est isolé, $\alpha = \beta + 1$, nous prenons $R(\alpha, E, p) = R^E_{\hat{R}(\beta,E,p)}$, $\hat{R}(\alpha, E, p) = \hat{R}^E_{\hat{R}(\beta,E,p)}$,

(ii) si α est limite, nous prenons

$$R(\alpha, E, p) = \inf_{\beta<\alpha} R(\beta, E, p) = \inf_{\beta<\alpha} \hat{R}(\beta, E, p)\,, \quad \hat{R}(\alpha, E, p) = \widehat{R(\alpha, E, p)}\,.$$

Enfin posons

$$R_p^E = R(E, p) = R(\Omega_1, E, p) \overset{\text{df}}{=} \inf_{\alpha<\Omega_1} \hat{R}(\alpha, E, p) = \inf_{\alpha<\Omega_1} R(\alpha, E, p)\,,$$

$$\hat{R}_p^E = \hat{R}(E, p) = \hat{R}(\Omega_1, E, p) \overset{\text{df}}{=} \widehat{R(E, p)}\,.$$

Nous appellerons $\hat{R}_p^E$ *balayée principale* de p. Brièvement, nous écriverons aussi $R(\alpha, p)$, $\hat{R}(\alpha, p)$ au lieu de $R(\alpha, E, p)$, $\hat{R}(\alpha, E, p)$.

1.5. Lemme. *Soit $p \in \mathscr{P}$, $E \subset X$, $\alpha \leqq \Omega_1$. Alors*

(i) $\hat{R}(\alpha, E, p) \leqq R(\alpha, E, p) \leqq p$,

(ii) $R(\alpha, E, p) \in {}_+\mathscr{N}_X$, $\hat{R}(\alpha, E, p) \in \mathscr{P}$,

(iii) *les applications* $p \mapsto R(\alpha, E, p)$, $p \mapsto \hat{R}(\alpha, E, p)$ *sont linéaires et croissantes,*

(iv) *si* $p \in \mathscr{P}^c$, *on a* $\hat{R}(\alpha, E, p) = R(\alpha, E, p) = p$ *sur* E^0,

(v) $R(\alpha, E, p) = \hat{R}(\alpha, E, p)$ *sur* $C\bar{E}$ *est une fonction harmonique,*

(vi) $\hat{R}^E_{\hat{\boldsymbol{R}}_p{}^E} = R^E_{\hat{\boldsymbol{R}}_p{}^E} = \hat{\boldsymbol{R}}^E_p = \boldsymbol{R}^E_p$.

Démonstration. Les assertions (i)–(v) sont évidentes. (vi): D'après un lemme de Choquet (Brelot [8], p. 6), il existe $\alpha_1 \leqq \alpha_2 \leqq \ldots < \Omega_1$ tells que $\hat{\boldsymbol{R}}(E, p) = \inf_i \hat{R}(\alpha_i, E, p)$. Donc $\hat{\boldsymbol{R}}(E, p) = R(\alpha, E, p) = \hat{R}(\alpha, E, p)$, où $\alpha = \sup \alpha_i$ et $\hat{\boldsymbol{R}}(E, p) \geqq \hat{R}^E_{\hat{\boldsymbol{R}}_p{}^E} = \hat{R}^E_{\hat{R}(\alpha,E,p)} = \hat{R}(\alpha + 1, E, p) \geqq \boldsymbol{R}(E, p) \geqq \hat{\boldsymbol{R}}(E, p)$.

1.6. Lemme. *Soit $\omega \leqq \alpha \leqq \Omega_1$, $E \subset X$, $p \in \mathscr{P}$. Alors*

$$\hat{R}(\alpha, E, \hat{R}^E_p) = \hat{R}(\alpha, E, p)\,, \quad R(\alpha, E, \hat{R}^E_p) = R(\alpha, E, p)\,.$$

Démonstration. 1. Soit $\alpha = \omega$. On a

$$\hat{R}(\omega, \hat{R}^E_p) = \widehat{\inf_n \hat{R}(n, \hat{R}^E_p)} = \widehat{\inf_n \hat{R}(n + 1, p)} = \hat{R}(\omega, p)\,,$$

$$R(\omega, \hat{R}^E_p) = R(\omega, p) \quad \text{de même manière}\,.$$

2. Soit $\omega < \alpha < \Omega_1$ et supposons que l'assertion soit vraie pour tout $\omega \leqq \beta < \alpha$.

(i) Si $\alpha = \beta + 1$ est isolé, on a

$$\hat{R}(\alpha, \hat{R}^E_p) = \hat{R}(1, \hat{R}(\beta, \hat{R}^E_p)) = \hat{R}(1, \hat{R}(\beta, p)) = \hat{R}(\alpha, p)\,,$$

et il en est de même avec $R(\alpha, \hat{R}^E_p)$.

(ii) Si α est limite, alors

$$\hat{R}(\alpha, \hat{R}^E_p) = \widehat{\inf_{\beta<\alpha} \hat{R}(\beta, \hat{R}^E_p)} = \widehat{\inf_{\beta<\alpha} \hat{R}(\beta, p)} = \hat{R}(E, p)\,,$$

même $R(\alpha, \hat{R}^E_p) = R(\alpha, p)$.

3. Si $\alpha = \Omega_1$, il existe $\beta < \Omega_1$ tel que $\hat{\boldsymbol{R}}(E, \hat{R}^E_p) = \boldsymbol{R}(E, \hat{R}^E_p) = \hat{R}(\beta, \hat{R}^E_p)$, donc

$$\hat{\boldsymbol{R}}(E, p) = \boldsymbol{R}(E, p) \geqq \boldsymbol{R}(E, \hat{R}^E_p) = \hat{\boldsymbol{R}}(E, \hat{R}^E_p) = \hat{R}(\beta, p) \geqq \boldsymbol{R}(E, p) = \hat{\boldsymbol{R}}(E, p)\,.$$

1.7. Définition. On se donne $E \subset X$, $\pi \in \mathscr{M}_K^+(X)$, $\alpha \leqq \Omega_1$. Soit $\varphi_\alpha : p \mapsto R(\alpha, E, p)$ pour tout $p \in \mathscr{P}^c$. Au sens de 1.1 et 1.2 nous posons

$$\pi_\alpha = {}^{\varphi_\alpha}\pi\,, \quad \hat{\pi}_\alpha = {}^{\varphi_\alpha}\hat{\pi}\,, \quad \Pi = \pi_{\Omega_1}\,, \quad \hat{\Pi} = \hat{\pi}_{\Omega_1}\,,$$

et nous appelons les mesures π_α, $\hat{\pi}_\alpha$ réduite et balayée d'ordre α et la mesure $\hat{\Pi}$ *balayée principale de* π.

1.8. Lemme. *Soit* $\pi \in \mathscr{M}_K^+(X)$, $E \subset X$.

(i) *Si* $\mu = \pi^E \in \mathscr{M}_K^+(X)$, *alors* $\hat{\pi}_{n+1} = \hat{\mu}_n = (\hat{\pi}_n)^E$ *pour tout n naturel,* $\hat{\pi}_{\alpha+1} = \hat{\mu}_\alpha$ *pour tout ordinal* $\alpha < \Omega_1$, $\hat{\Pi} = \hat{\mu}_{\Omega_1}$.

(ii) *Si* $\{\pi_\beta\}_{\beta<\alpha}$ *est une suite transfinie,* $\sup \beta = \alpha \leqq \Omega_1$, *alors* $\lim \pi_\beta = \lim \hat{\pi}_\beta = \pi_\alpha$ *faiblement dans* $\mathscr{M}^+(X)$.

Démonstration. (i) Soit $p \in \mathscr{P}^c$, $\alpha < \Omega_1$. On a $\hat{\pi}_{\alpha+1}(p) = \pi(R(\alpha + 1, E, p)) = \pi(\hat{R}^E_{\hat{R}(\alpha,E,p)}) = \pi^E(\hat{R}(\alpha, E, p)) = \hat{\mu}_\alpha(p)$, et si n est en plus naturel, alors

$$\hat{\pi}_{n+1}(p) = \pi(\hat{R}(n + 1, E, p)) = \pi(\hat{R}(n, E, \hat{R}^E_p)) = (\hat{\mu}_n)^E\,(p)\,.$$

Même démonstration pour $\alpha = \Omega_1$.

(ii) Pour tout $p \in \mathscr{P}^c$ on a, $\lim \pi_\beta(p) = \lim \hat{\pi}_\beta(p) = \pi_\alpha(p)$, d'où d'après [5], III.1.10, Prop. 18 s'ensuit la propriété désirée.

1.9. Proposition. *On se donne* $E \subset X$, $\alpha \leqq \Omega_1$, $\pi \in \mathscr{M}_K^+(X)$.

(i) *Les mesures* π_α, $\hat{\pi}_\alpha$ *sont portées par* $\bar{E}$.

(ii) *Si* π *est portée par* E^*, *alors* π_α, $\hat{\pi}_\alpha$ *sont portées par* E^*.

Démonstration. (i) Soit $f \in {}_+\mathscr{K}(X)$, $\operatorname{supt} f \subset C\bar{E}$. On choisit un ouvert U tel que $U \supset \operatorname{supt} f$, $U \cap C\bar{E} = \emptyset$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $p - q \in \mathscr{D}$ tel que $\operatorname{supt}(p - q) \subset U$, $|f - (p - q)| < \varepsilon$ ([12], lemme 1.1). Alors, $p = q$ sur $\bar{E}$, d'où $\pi_\alpha(p - q) = \hat{\pi}_\alpha(p - q) = 0$ et en conséquence $\pi_\alpha f = \hat{\pi}_\alpha f = 0$.

(ii) H. Bauer a démontré ce lemme ci (voir [3], démonstration de Satz 3.4.3): *Soit* $p, q \in \mathscr{P}^c$, $Q = \{x \in X;\, p(x) \neq q(x)\}$, $\bar{Q}$ *compact,* $\bar{Q} \subset E^0$. *Alors, on a* $R_p^E = R_q^E$ *sur* CQ. Dans sa démonstration, il n'utilise pas la supposition de continuité de p, q; en fait, le lemme reste valable pour tout $p, q \in \mathscr{P}$. On en peut facilement obtenir le lemme suivant: Soit $p, q \in \mathscr{P}^c$, $Q = \{x \in X;\ p(x) \neq q(x)\}$, $\bar{Q}$ compact, $\bar{Q} \subset E^0$. Alors, pour tout $\alpha \leqq \Omega_1$ on a

$$R(\alpha, E, p) = R(\alpha, E, q) \quad \text{et} \quad \hat{R}(\alpha, E, p) = \hat{R}(\alpha, E, q)$$

sur $C\bar{Q}$. D'où la propritété annoncée dans (ii).

2. LES SOLUTIONS GÉNÉRALISÉES DU PROBLÈME DE DIRICHLET

2.1. Définition. Soit $U \subset X$ un ouvert relativement compact. Nous prenons $E = CU$, $\pi = \varepsilon_x$ pour $x \in \bar{U}$ et d'après le paragraphe précédent nous posons

$$L_x^\alpha = (\varepsilon_x)_\alpha\,, \quad \hat{L}_x^\alpha = \widehat{(\varepsilon_x)_\alpha}\,(\alpha \leqq \Omega_1)\,, \quad L_x = L_x^{\Omega_1}\,, \quad \hat{L}_x = \hat{L}_x^{\Omega_1}\,.$$

Si f est une fonction continue sur U^*, soit enfin

$$L^\alpha f : x \mapsto L_x^\alpha(f)\,, \quad \hat{L}^\alpha f : x \mapsto \hat{L}_x^\alpha(f) \quad \text{pour} \quad x \in \bar{U}\,,$$
$$Lf = L^{\Omega_1} f\,, \quad \hat{L}f = \hat{L}^{\Omega_1} f\,.$$

On dira que $\hat{L}^\alpha f$ est une solution généralisée du problème de Dirichlet d'ordre α pour f, et que $\hat{L}f$ et la *solution généralisée principale* pour f. Notons que la fonction $\hat{L}^\alpha f$ est définie partout sur $\bar{U}$ et que $\hat{L}^1 f = H_f^U$ sur $\bar{U}$.

2.2. Lemme. (i) *Les opérateurs $\hat{L}^\alpha$ $(\alpha \leqq \Omega_1)$ sont linéaires et croissants.*

(ii) *On a $|\hat{L}^\alpha f| \leqq \hat{L}^\alpha |f|$ sur $\bar{U}$ pour tout $f \in \mathscr{C}(U^*)$.*

(iii) *Si $p \in \mathscr{P}^c$, $f = p \wedge U^*$, alors $\hat{L}^\alpha f \leqq p$ sur $\bar{U}$.*

(iv) *Si f_n sont des fonctions continues sur U^*, $f_n \to f$ uniformément sur U^*, alors $\hat{L}^\alpha f_n \to \hat{L}^\alpha f$ uniformément sur $\bar{U}$.*

Exactement même conclusion pour L^α.

Démonstration. Les assertions (i), (ii), (iii) sont vérifiées facilement.

(iv): Soit $p \in \mathscr{P}^c$, $p \geqq 1$ sur $\bar{U}$ et soit $x \in \bar{U}$. Si on désigne $K = \sup_{\bar{U}} p$, $\mathfrak{S}_n = \sup_{U^*} |f_n - f|$, $p^* = p \wedge U^*$, on obtient

$$|\hat{L}^\alpha f_n(x) - \hat{L}^\alpha f(x)| = |\hat{L}^\alpha(f_n - f)(x)| \leqq \hat{L}^\alpha |f_n - f|\,(x) \leqq \mathfrak{S}_n \hat{L}^\alpha p^*(x) \leqq K\mathfrak{S}_n\,.$$

2.3. Proposition. *Les fonctions $\hat{L}^\alpha f$, $\hat{L}f$ sont finement continues et de première classe de Baire sur $\bar{U}$ pour tout α et pour toute fonction f continue sur U^*.*

Démonstration. Avant tout, soit $f = p \wedge U^*$, où $p \in \mathscr{P}^c$. Ensuite $\hat{L}^\alpha f = \hat{R}(\alpha, CU, p)$ sur $\bar{U}$, d'où il résulte que la fonction $\hat{L}^\alpha f$ est finement continue et de première classe de Baire. Si maintenant f est continue sur U^*, on peut trouver $p_n, q_n \in \mathscr{P}^c$ tels que $p_n - q_n \to f$ uniformément sur U^*. Si l'on pose $f_n = p_n - q_n \wedge U^*$, on a d'après 2.2 $\hat{L}^\alpha f_n \to \hat{L}^\alpha f$ uniformément sur $\bar{U}$, alors la fonction $\hat{L}^\alpha f$ est finement continue et de première classe de Baire.

2.4. Proposition. *Pour toute fonction f continue sur U^*, la fonction $\hat{L}^\alpha f$ est harmonique sur U.*

Démonstration. Si f est une restriction sur U^* d'un potentiel p continu, on a $\hat{L}^\alpha f = \hat{R}(\alpha.\ CU, p)$ sur U et l'on peut utiliser le lemme 1.5.(v). Si f est arbitraire, on trouve une suite $\{p_n - q_n;\ p_n, q_n \in \mathscr{P}^c\}$ telle que $p_n - q_n \to f$ uniformément sur U^*. D'après 2.2.(iv) on a $\hat{L}^\alpha(p_n - q_n \wedge U^*) \to \hat{L}^\alpha f$ uniformément, donc la fonction $\hat{L}^\alpha f$ est harmonique sur U.

2.5. Proposition. *Soit f une fonction continue sur U^* et soit $\alpha < \Omega_1$. Si $F = \hat{L}^\alpha f \wedge U^*$, on a $\hat{L}^{\alpha+1} f = H_F^U$ sur $\bar{U}$.*

Démonstration. Observons que la fonction F est de première classe de Baire sur U^*, spécialement, elle est résolutive. Si $f \in \mathscr{C}(U^*)$, $f = p \wedge U^*$ où $p \in \mathscr{P}^c$, on a $P = \hat{R}(\alpha, CU, p) \in \mathscr{P}$ et par définition $\hat{L}^\alpha f = P$ sur $\bar{U}$. Alors $P \wedge U^* = F$ et sur $\bar{U}$

$$H_F^U = \hat{R}_P^{CU} = \hat{R}_{\hat{R}(\alpha, CU, p)}^{CU} = \hat{R}(\alpha + 1, CU, p) = \hat{L}^{\alpha+1} f .$$

Pour tout $x \in \bar{U}$, les applications $f \mapsto H_F^U(x)$, $f \mapsto \hat{L}^{\alpha+1} f(x)$ sont des mesures de Radon sur U^* qui s'identifient sur les restrictions des fonctions de $\mathscr{P}^c$. Alors il en résulte que $H_F^U = \hat{L}^{\alpha+1} f$ sur $\bar{U}$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(U^*)$.

2.6. Théorème. *Pour $f \in \mathscr{C}(U^*)$ soit de nouveau $F = \hat{L} f \wedge U^*$. Alors, on a $\hat{L} f = H_F^U$ sur $\bar{U}$.*

Démonstration. Même comme dans 2.5. Il faut se rendre compte de l'égalité $\hat{R}_{\hat{R}(CU, p)}^{CU} = \hat{R}(CU, p)$.

2.7. Théorème. *Pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(U^*)$ soit $f^* = H_f^U \wedge U^*$. Alors, les assertions suivantes sont équivalentes:*

(i) *$H_f^U = H_{f^*}^U$ sur U pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(U^*)$,*
(ii) *$\hat{R}_{\hat{R}_p^{CU}}^{CU} = \hat{R}_p^{CU}$ pour tout potentiel p continu,*
(iii) *$(\varepsilon_x^{CU})^{CU} = \varepsilon_x^{CU}$ pour tout point $x \in U$,*
(iv) *l'ensemble U_{ir}^* est négligeable.*

Démonstration. D'après la propostion 2.5 on a $H_{f^*}^U = \hat{L}^2 f$, alors (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) facilement. Soit $(\varepsilon_x^{CU})^{CU} = \varepsilon_x^{CU}$ pour un certain point $x \in U$. On peut trouver un potentiel $q \in \mathscr{P}^c$ tel que $U_{ir}^* = \{y \in U^*;\ \hat{R}_q^{CU}(y) < q(y)\}$ (voir [3], Korollar 4.3.3), alors

$$\varepsilon_x^{CU}(q) = (\varepsilon_x^{CU})^{CU}(q) = \varepsilon_x^{CU}(\hat{R}_q^{CU}) ,$$

d'où $q = \hat{R}_q^{CU}$ ε_x^{CU}-presque partout. Réciproquement, si U_{ir}^* est négligeable et si $p \in \mathscr{P}^c$, tenant compte de ce que $\{y \in U^*;\ \hat{R}_p^{CU}(y) < p(y)\} \subset U_{ir}^*$, on a $\hat{R}_p^{CU} = p$ ε_x^{CU}-presque partout pour tout $x \in U$, donc

$$\varepsilon_x^{CU}(p) = \varepsilon_p^{CU}(\hat{R}_p^{CU}) = (\varepsilon_x^{CU})^{CU}(p) .$$

2.8. Proposition. *Soit s fonction continue sur $\bar{U}$ et surharmonique sur U, soit $s^* = s \wedge U^*$. Alors $\hat{L}^\alpha s^* \leqq s$ sur $\bar{U}$.*

Démonstration. (a) Soit $\alpha = 1$. Evidemment, $H_{s^*}^U \leqq s$ sur U. Si $z \in U^*$, il existe une suite $\{x_n\} \subset U$ telle que $x_n \to z$ et $\varepsilon_{x_n}^{CU} \to \varepsilon_z^{CU}$ faiblement ([16], Satz 5). Alors, $H_{s^*}^U(z) = \lim H_{s^*}^U(x_n) \leqq \lim s(x_n) = s(z)$.

(b) Soit $\alpha = \beta + 1$ et supposons que $\hat{L}^\beta s^* \leqq s$ sur $\overline{U}$. Si $t = \hat{L}^\beta s^* \wedge U^*$, on a d'après 2.5 $\hat{L}^\alpha s^* = H_t^U \leqq H_{s^*}^U \leqq s$.

(c) Soit maintenant α limite, $\alpha = \sup_{\beta < \alpha} \beta$, et supposons que $\hat{L}^\beta s^* \leqq s$ sur $\overline{U}$ pour tout $\beta < \alpha$. D'après 1.8.(ii) on sait que $\hat{L}^\beta s^* \to L^\alpha s^*$. D'où $L^\alpha s^* \leqq s$ sur $\overline{U}$, alors on a $\hat{L}^\alpha s^* = L^\alpha s^* \leqq s$ sur U. Il existe une suite $\{p_n - q_n\} \subset \mathscr{D}$ telle que $p_n - q_n \to s^*$ uniformément sur U^*. D'après le lemme 2.2

$$L^\alpha(p_n - q_n) \to L^\alpha s^* \leqq s\,, \quad \hat{L}^\alpha(p_n - q_n) \to \hat{L}^\alpha s^* \quad \text{uniformément sur } \overline{U}\,.$$

Soit $z \in U^*$. En choisissant $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver n_0 tel que

$$R(\alpha, CU, p_n) - R(\alpha, CU, q_n) < L^\alpha s^* + \varepsilon \leqq s + \varepsilon$$

sur $\overline{U}$ pour tout $n \geqq n_0$. Si nous rendons compte de l'égalité

$$\liminf_{x \to z} R(\alpha, CU, p)(x) = \liminf_{x \to z,\, x \in U} R(\alpha, CU, p)(x) = \hat{R}(\alpha, CU, p)(z)$$

pour tout $p \in \mathscr{P}^c$, nous déduisons que $\hat{R}(\alpha, CU, p_n)(z) - \hat{R}(\alpha, CU, q_n)(z) \leqq s(z) + \varepsilon$, alors $\hat{L}^\alpha s^*(z) \leqq s(z)$.

(d) La démonstration pour $\alpha = \Omega_1$ peut se faire comme d'habitude.

2.9. Corollaire. *Si f est une fonction continue sur $\overline{U}$ et harmonique sur U, $f^* = f \wedge U^*$, on a $\hat{L}^\alpha f^* = f$ sur $\overline{U}$.*

2.10. Remarque. On conclut des résultats précédents que $\{\hat{L}_x^\alpha;\, x \in \overline{U}\}$ sont des „dilatations“ au sens [13], p. 100. En effet, pour toute fonction f continue sur U^*, les fonctions $\hat{L}^\alpha f$ sont de première classe de Baire et pour toute fonction s continue sur $\overline{U}$ et surharmonique sur U, on a $\hat{L}^\alpha s \leqq s$. Il y a beaucoup de cas où la „dilatation“ $\{\hat{L}_x;\, x \in \overline{U}\}$ est „affine“, alors on peut s'en servir pour démonstration de la „simplicialité“ de U (voir [13], theorem 2.5).

3. ENSEMBLES DE KELDYCH

3.1. Définition. Soit $U \subset X$ un ouvert relativement compact. On appelle *opérateur de Keldych* l'application $A : \mathscr{C}(U^*) \to \mathscr{H}(U)$ linéaire et croissante et telle que $A(f \wedge U^*) = f$ sur U, si f est une fonction continue sur $\overline{U}$ et harmonique sur U. Evidemment, la fonction Af est bornée sur U pour toute fonction f continue sur U^*.

On dira que U est un *ensemble de Keldych* si, et seulement si, pour tout opérateur de Keldych A, et pour toute fonction f continue sur U^*, on a $Af = H_f^U$ sur U. Autrement dit, si la solution du problème de Dirichlet, que l'on obtient par la méthode de Perron, est le seul opérateur de Keldych.

3.2. Examples. (A) Tout opérateur $\hat{L}^\alpha$ ($\alpha \leqq \Omega_1$) est un opérateur de Keldych. Pour ces opérateurs on peut prolonger $\hat{L}^\alpha f$ finement continûment sur $\overline{U}$ et l'on aura de plus: $\hat{L}f = H_F^U$, si $F = \hat{L}f \wedge U^*$. Signalons, que les $\hat{L}^\alpha$ ne sont pas du tout tous les opérateurs de Keldych.

(B) Si $(X, \mathscr{H})$ est un espace harmonique engendré par les solutions de l'équation de Laplace dans R^n (Standard-Beispiel 1 de [3], p. 18), on sait que tout ouvert borné dans R^n est un ensemble de Keldych (voir [15]).

(C) Soit $(X, \mathscr{H})$ l'espace harmonique de Brelot de base dénombrable satisfaisant à l'axiome (D) (voir [7]) dans lequel il existe un potentiel continu positif. Si U est un ouvert relativement compact et si $X \setminus \{x\}$ est un ensemble connexe pour tout $x \in U^*$, alors U est un ensemble de Keldych d'après le théorème de Brelot ([6], p. 284). Rappelons que dans ce cas-là, l'ensemble des points-frontière réguliers de U s'identifie avec la frontière de Choquet.

(D) Soit $(X, \mathscr{H})$ l'espace harmonique engendré par les solutions de l'équation de la chaleur dans R^2 (Standard-Beispiel 2 de [3], p. 20). Soit $U = (0, 1) \times (0, 1) \cup \cup (0, 1) \times (1, 2)$, $V = (0, 1) \times (0, 2)$. Pour $f \in \mathscr{C}(U^*)$ on pose $Af = H_f^V$ (plus exactement: $Af = H_{f^*}^V$, où $f^* = f \wedge V^*$). Si $\varphi \in \mathscr{C}(\overline{U})$ est une fonction harmonique sur U, en utilisant le lemme 4 de [16] on déduit que φ est harmonique sur V. Alors $A\varphi = = H_\varphi^V = \varphi$ sur U, autrement dit, A est un opérateur de Keldych. Mais $Af = H_f^U$ n'a pas lieu pour toute $f \in \mathscr{C}(U^*)$, U n'est pas un ensemble de Keldych. Notons que $A = \hat{L}^2$.

(E) Soit $(X, \mathscr{H})$ comme dans (D). Prenons $V = (0, 1) \times (0, 2)$, $S_n = (0, 1) \times \times \{1 - 1/n\}$, $S_0 = (0, 1) \times \{1\}$, $S_{-1} = (0, 1) \times \{\sqrt{}2\}$, $U = V \setminus \bigcup_{n=-1}^{\infty} S_n$. Soit $Af = = H_f^V$ pour toute $f \in \mathscr{C}(U^*)$. On peut voir facilement que A est un opérateur de Keldych, que $A \neq \hat{L}^\omega$, $A = \hat{L}^{\omega+2}$ et que U *n*'est pas un ensemble de Keldych.

(F) Soit $(X, \mathscr{H})$ l'exemple de l'espace harmonique de C. Constantinescu construit dans [11]. Rappelons que $(X, \mathscr{H})$ est un espace de Brelot compact connexe de base dénombrable ne satisfaisant pas à l'axiome (C) de polarité, avec un point idéal non-polaire $\{a^*\}$. Soit $V \subset X$ un ouvert connexe qui contient a^*, qui a le complément compact et la frontière analytique. On sait que V est un ouvert régulier. Soit $U = = V \setminus \{a^*\}$ et posons $Af = H_f^V$ pour $f \in \mathscr{C}(U^*)$. Si φ est une fonction continue sur $\overline{U}$ et harmonique sur U, par définition φ est harmonique sur V, alors $A\varphi = \varphi$; A est un opérateur de Keldych. Si $f = 0$ sur V^*, $f(a^*) = 1$, on a $Af = 0$, $H_f^U \neq 0$, donc U n'est pas l'ensemble de Keldych.

3.3. Remarque. Désormais, seulement pour raison de la simplicité, supposons remplie la condition suivante

(*) Les constantes sont harmoniques sur X et les harmoniques positives distinguent les points de X.

On pourrait faire toutes les considérations sans cette hypothèse, mais il faudrait changer un peu la définition de l'opérateur de Keldych et demander que $As \leqq s$, pour toute fonction s continue sur $\overline{U}$ et surharmonique sur U.

Fixons un ouvert relativement compact $U \subset X$. Soit $\mathscr{A} = \mathscr{A}(\overline{U})$ l'ensemble des fonctions continues sur $\overline{U}$ et harmoniques sur U et soit $\mathscr{W}(\overline{U}) = \{\min(f_1, \ldots, f_n); f_i \in \mathscr{A}(\overline{U})\}$. Nous dénotons $\mathrm{Ch}_{\mathscr{A}} U = \mathrm{Ch}\, U$ la frontière de Choquet par rapport à $\mathscr{A}$, alors, un point x apparatient à $\mathrm{Ch}\, U$ si, et seulement si, la mesure de Dirac ε_x est la seule mesure μ de Radon sur $\overline{U}$ vérifiant $\mu f = f(x)$ pour toute $f \in \mathscr{A}(\overline{U})$.

3.4. Lemme. *Soit A un opérateur de Keldych. Si nous définissons l'ensemble U_A^* des points A-réguliers par*

$$U_A^* = \{z \in U^*;\ \lim_{\substack{x \to z \\ x \in U}} A f(x) = f(z) \text{ pour toute } f \in \mathscr{C}(U^*)\},$$

on a $\mathrm{Ch}\, U \subset U_A^* \subset U_{\mathrm{reg}}^*$.

Démonstration. On peut démontrer l'inclusion $\mathrm{Ch}\, U \subset U_A^*$ d'une manière habituelle (voir p. ex. [3], Satz 4.4.1 ou [9], théorème X.2). Si $\varphi \in \mathscr{W}(\overline{U})$, $\varphi = \inf(f_1, \ldots, f_n)$, où f_i sont des fonctions continues sur $\overline{U}$ et harmoniques sur U, $\varphi^* = \varphi \wedge U^*$, on a $A\varphi^* \leqq Af_i = f_i$. donc $A\varphi^* \leqq \varphi$. Choisissons $z \in U_A^*$. L'ensemble $\mathscr{W}(\overline{U}) - \mathscr{W}(\overline{U})$ est dense dans $\mathscr{C}(U^*)$, alors il suffit de vérifier l'égalité $\lim_{x \to z} H_{\varphi^*}^U(x) = \varphi^*(z)$ pour toute φ^* qui est restriction d'une certaine fonction φ de $\mathscr{W}(\overline{U})$. Soit φ une telle fonction. La fonction $A\varphi^*$ est harmonique sur U et $\limsup_{x \to y} A\, \varphi^*(x) \leqq \limsup_{x \to y} \varphi(x) = \varphi(y)$ pour tout $y \in U^*$, donc $A\varphi^* \leqq H_{\varphi^*}^U$. D'où $\varphi^*(z) = \lim_{x \to z} A\, \varphi^*(x) \leqq \liminf_{x \to z} H_{\varphi^*}^U(x) \leqq \limsup_{x \to z} H_{\varphi^*}^U(x) \leqq \limsup_{x \to z} \varphi(x) = \varphi^*(z)$.

3.5. Théorème. *On a* (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii), *si*

(i) $U^* \setminus \mathrm{Ch}\, U$ *est négligeable,*

(ii) U *est ensemble de Keldych,*

(iii) U_{ir}^* *est négligeable.*

Démonstration. (i) $\Rightarrow$ (ii): Soit A un opérateur de Keldych et soit $f \in \mathscr{C}(U^*)$. La fonction $Af - H_f^U$ est harmonique et bornée sur U et $\lim_{x \to z} (A f(x) - H_f^U(x)) = 0$ pour tout $z \in \mathrm{Ch}\, U$ d'après 3.4. Il en résulte (voir [3], Satz 4.4.6) que $Af = H_f^U$ sur U. L'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) s'ensuit du théorème 2.7 et de 3.2. (A).

3.6. Corollaire. *Tout ensemble semi-régulier est un ensemble de Keldych. (L'ensemble U est dit semi-régulier, si l'on peut prolonger H_f^U continûment sur $\overline{U}$ pour toute fonction $f \in \mathscr{C}(U^*)$.)*

Démonstration. D'après [1], Satz 34, Satz 35 on a $\mathrm{Ch}\, U = U^*_{\mathrm{reg}}$ et U^*_{ir} négligeable.

3.7. Remarque. On dit que l'ensemble U est *simplicial*, s'il est possible de prolonger toute fonction continue sur un sous-ensemble compact de la frontière de Choquet en une fonction de $\mathscr{A}(\overline{U})$, avec la même norme. Si S est un espace des fonctionnelles linéaires et positives sur $\mathscr{A}(\overline{U})$ de norme 1 avec la topologie faible, on sait que U est simplicial si, et seulement si, S est un simplex. Les ensemble simpliciaux sont étudiés en détail dans [13].

Si U est simplicial, alors (ii) $\Rightarrow$ (i) dans le théorème 3.5. En effet, pour tout $x \in \overline{U}$ on peut trouver une mesure unique μ_x portée par $\mathrm{Ch}\, U$ avec le barycentre x. Si nous prenons $Af(x) = \mu_x(f)$ pour $f \in \mathscr{C}(U^*)$, on voit facilement que A est un opérateur de Keldych et que $U^*_A = \mathrm{Ch}\, U$. Si U est un ensemble de Keldych, on a $U^*_A = U^*_{\mathrm{reg}}$, alors $U^*_{\mathrm{reg}} = \mathrm{Ch}\, U$. Comme toute μ_x est portée par $\mathrm{Ch}\, U$, on a U^*_{ir} négligeable.

3.8. Lemme. *Si U^*_{ir} est un ensemble polaire, on a $\mathrm{Ch}\, U = U^*_{\mathrm{reg}}$. Donc U est un ensemble de Keldych.*

Démonstration. Soit p potentiel continu. De la même façon comme dans [4], théorème 3 et [13], theorem 3.3, on voit qu'il existe une suite généralisée filtrante $\{s_\alpha\} \subset \mathscr{A}(\overline{U})$ telle que $\sup_\alpha s_\alpha = \hat{R}_p^{CU}$ sur $\overline{U}$. D'où il résulte que $\mathrm{Ch}\, U = U^*_{\mathrm{reg}}$ d'après [16], Satz 7.

3.9. Corollaire. *Soit $(X, \mathscr{H})$ l'espace harmonique fort de Bauer dans lequeles constantes sont harmoniques et les fonctions harmoniques positives distinguent les points de X. Alors, $(X, \mathscr{H})$ satisfait à l'axiome (C) de polarité si, et seulement si, tout ouvert relativement compact est un ensemble de Keldych.*

Démonstration. Cela s'ensuit de 3.8, 3.5 et de [2], théorème 6.

Added in proof. J. Bliedtner et W. Hansen ont récemment démontré que tout ouvert est simplicial. On peut en déduire que le balayée principale est „affine" et que les assertions (i) – (iii) du théorème 3.5 sont équivalentes.

Bibliographie

[1] *H. Bauer,* Axiomatische Behandlung des Dirichletschen Problems für elliptische und parabolische Differentialgleichungen, Math. Ann. *146* (1962), 1–59.

[2] *H. Bauer,* Propriétés finies des fonctions hyperharmoniques dans une théorie axiomatique du potentiel, Ann. Inst. Fourier *15* (1965), 137–154.

[3] *H. Bauer,* Harmonische Räume und ihre Potentialtheorie, Lecture Notes in Mathematics, vol. 22, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1966.
[4] *N. Boboc, A. Cornea,* Espaces harmoniques. Axiome D et théorème de convergence, Rev. Roum. Math. Pures Appl. *13* (1968), 933—947.
[5] *N. Bourbaki,* Eléments de mathématique, Intégration, Livre VI, 2ème edition, Herman, Paris, 1965.
[6] *M. Brelot,* Sur un théorème de prolongement fonctionnel de Keldych concernant le problème de Dirichlet, J. Analyse Math. *8* (1960/61), 273—288.
[7] *M. Brelot,* Axiomatique des fonctions harmoniques, Université de Montréal, 1966.
[8] *M. Brelot,* Eléments de la théorie classique du potentiel, C.D.U. Paris, 4e édition, 1969.
[9] *M. Brelot,* On topologies and boundaries in potential theory, Lecture Notes in Mathematics, vol. 175, Springer-Verlag, Berlin—New York, 1971.
[10] *G. Choquet,* Lecture on Analysis, W. A. Benjamin, New York, 1969.
[11] *C. Constantinescu,* An example of harmonic space, Rev. Roum. Math. Pures Appl. *10* (1965), 267—270.
[12] *C. Constantinescu,* Some properties of the balayage of measures on a harmonic space, Ann. Inst. Fourier *17* (1967), 273—293.
[13] *E. G. Effros, J. L. Kazdan,* Applications of Choquet simplexes to elliptic and parabolic boundary value problems, J. Diff. Equations *8* (1970), 95—134.
[14] *R. M. Hervé,* Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier *12* (1962), 415—571.
[15] *M. V. Keldych,* On the solvability and stability of the Dirichlet problem (en russe), Usp. Mat. Nauk SSSR *8* (1941), 171—231.
[16] *J. Köhn, M. Sieveking,* Reguläre und extremale Randpunkte in der Potentialtheorie, Rev. Roum. Math. Pures Appl. *12* (1967), 1489—1502.
[17] *A. F. Monna,* Note sur le problème de Dirichlet, Nieuw Arch. Wiskunde *19* (1971), 58—64.

Adresse de l'auteur: 186 00 Praha 8, Sokolovská 83, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta UK).