Czechoslovak Mathematical Journal

Josef Klouda

# Eine Bemerkung über eine Koordinatisierung der Translationsebenen

*Czechoslovak Mathematical Journal*, Vol. 26 (1976), No. 1, 101–107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/101377

Czechoslovak Mathematical Journal, 26 (101) 1976, Praha

# EINE BEMERKUNG ÜBER EINE KOORDINATISIERUNG DER TRANSLATIONSEBENEN

JOSEF KLOUDA, Praha

(Eingegangen am 16. Mai 1974)

Die Untersuchung einer affinen Ebene ist mit der Untersuchung eines Ternärkörpers verbunden, wobei seine Eigenschaften einesteils durch die Eigenschaften der Ebene, andersteils durch die Weise der Koordinatisierung bestimmt sind. In [2] wird die Koordinatisierung von allgemeinem Standpunkt betrachtet. In [4] ist eine Kennzeichnung der Ternärkörper mit Null gegeben, die zu einer Translationsebene gehören. Das Hauptziel dieser Arbeit ist eine Beschreibung des Ternärkörpers mit Linksnullelement (genauer: man fordert nicht die Gültigkeit der Identität $t(x, 0, y) = y$, aber man fordert die Gültigkeit der Identität $t(0, x, y) = y$) zu geben, der zu einer Translationsebene gehört.

**Definition 1.** Es sei $S$ eine Menge, $\# S \geqq 2$, $t$ eine ternäre Operation auf $S$. Ein geordnetes Paar $(S, t)$ nennen wir einen *Ternärkörper*, wenn gilt:

(1) $\forall a, b, c \in S\ \exists!\, x \in S\ \ t(a, b, x) = c,$

(2) $\forall a, b, c, d \in S;\ a \neq c\ \exists!\, x \in S\ \ t(x, a, b) = t(x, c, d),$

(3) $\forall a, b, c, d \in S;\ a \neq c\ \exists(x, y) \in S^2\ \ t(a, x, y) = b,\ t(c, x, y) = d.$

Ein Ternärkörper $(S, t)$ mit der Bedingung

(4) $\exists 0 \in S\ \forall x, y \in S\ \ t(0, x, y) = y$

heisst ein *Ternärkörper mit Linksnullelement.*

Bemerkung. a) Ist $(S, t)$ ein Ternärkörper, dann

$$\alpha(S, t) := (S^2, \{\{(x, y) \mid x = c, y \in S\} \mid c \in S\} \cup \cup \{\{(x, y) \mid y = t(x, m, c)\} \mid m, c \in S\}$$

ist eine affine (siehe [3], S. 114–115).

b) Im jeden Ternärkörper $(S, t)$ gilt

$$\forall a, b, c, d \in S\,; \quad a \neq c \quad \exists!\,(x, y) \in S^2 \quad t(a, x, y) = b\,, \quad t(c, x, y) = d$$

c) Ist $(S, t)$ ein Ternärkörper mit Linksnullelement, dann ist das Element 0 aus der Bedingung (4) eindeutig bestimmt. Legen wir vor, dass es noch ein solches Element $0' \neq 0$ gibt. Nach (3) existiert $x \in S$, für welches $t(0, x, 0) = 0$, $t(0', x, 0) = 0'$ gilt. Aber nach (4) ist auch $t(0', x, 0) = 0$, was schon $0' = 0$ ergibt.

d) Man fordert nicht $t(x, 0, y) = y\ \forall x, y \in S$.

**Satz 1.** *Es sei $\alpha$ eine affine Ebene. Dann gibt es ein Ternärkörper $(S, t)$ mit Linksnullelement, so dass die Ebenen $\alpha$, $\alpha(S, t)$ isomorph sind.*

Beweis. (Siehe auch [2]). Es sei $\alpha = (P, L)$, wo $P$ die Punktmenge und $L$ die Geradenmenge ist (Inzidenzrelation ist durch Inklusion gegeben). Es sei $\bar{\alpha} = (\bar{P}, \bar{L}) = (P \cup l_\infty, \bar{L})$ ihre projektive Erweiterung, $l_\infty$ die Menge von uneigentlichen Punkten der Ebene $\bar{\alpha}$. Es sei $S$ eine Menge, so dass $\infty \notin S$ und $\# S$ gleich der Ordnung der Ebene $\alpha$ ist. Für jedes $X \in l_\infty$ bezeichnen wir mit $\tilde{X}$ die Menge aller Geraden der Ebene $\bar{\alpha}$, die durch den Punkt $X$ gehen.

Wählen wir einen Punkt $Y \in l_\infty$. Es sei $x \mapsto [x]$ eine bijektive Abbildung von der Menge $S \cup \{\infty\}$ auf die Menge $\tilde{Y}$, so dass $l_\infty = [\infty]$. Wählen wir für jedes $x \in S$ eine bijektive Abbildung $\pi_x : S \to ([x] - \{Y\})$. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\pi : S^2 \to P$, so dass $(x, y)^\pi = y^{\pi_x}\ \forall x, y \in S$.

Es sei $m \mapsto (m)$ eine bijektive Abbildung von der Menge $S \cup \{\infty\}$ auf die Menge $l_\infty$, wobei $(\infty) = Y$. Weiter sei für jedes $m \in S$ eine bijektive Abbildung $\lambda_m : S \to ((\tilde{m}) - \{l_\infty\})$ gegeben. Dann gibt es eine bijektive Abbildung $\lambda : S^2 \to (\bar{L} - \tilde{Y})$, so dass $(m, c)^\lambda = c^{\lambda_m}\ \forall m, c \in S$. Wenn wir jetzt für jede $x, y, m, c \in S$ $y = t(x, m, c)$ durch $(x, y)^\pi \in (m, c)^\lambda$ definieren, wird $(S, t)$ ein Ternärkörper. Insbesondere für die Abbildungen $\pi, \lambda$ mit der Eigenschaft

$$\exists a \in S \quad \forall m, c \in S \quad (m, c)^\lambda \cap [a] = \{(a, c)^\pi\}$$

bekommen wir einen Ternärkörper mit Linksnullelement $a$. □

Bemerkung. Ist $(S, t)$ ein Ternärkörper und $a, m \in S$, dann ist nach (1) die Abbildung $y \mapsto t(a, m, y)$ bijektive und folglich gibt es zu jedem $m \in S$ eine bijektive Abbildung $\varrho^a_m$, so dass $y = t(a, m, y^{\varrho_m{}^a})\ \forall y \in S$. Definieren wir also eine neue ternäre Operation $t_a$ auf $S$ durch $t_a(x, m, c) := t(x, m, c^{\varrho_m{}^a})\ \forall x, m, c \in S$, dann ist $(S, t_a)$ ein Ternärkörper mit Linksnullelement $a$.

Im folgenden werden wir nur die Ternärkörper mit Linksnullelement untersuchen und wie es gewöhnlich ist, werden wir das Linksnullelement mit 0 bezeichnen.

**Definition 2.** Ein Ternärkörper $(S, t)$ heisst *linear*, falls die folgende Linearitätsbedingung erfüllt ist:

(5) Für jede $a, b, c, d \in S$ hat die Gleichung $t(a, b, x) = t(c, d, x)$ entweder keine Lösung in $x$ oder ist durch jedes $x \in S$ befriedigt.

Es sei $(S, t)$ ein Ternärkörper mit Linksnullelement. Nach (1), (3) und (4) gibt es zu jedem $a \in S - \{0\}$ genau ein $e_a \in S$, so dass $t(a, e_a, 0) = a$. Für $a = 0$ werden wir zusätzlich $e_0 = 0$ definieren.

Nun sind wir im Stande auf $S$ zwei induzierte binäre Operationen $+, \cdot$ einzuführen: $a + b := t(a, e_a, b)$, $a . b := t(a, b, 0)$ $\forall a, b \in S$.

Bemerkung. In jedem Ternärkörper $(S, t)$ mit Linksnullelement gilt:

a) $0 . a = 0$ $\forall a \in S$,

b) $\forall a, b \in S;$ $a \neq 0$ $\exists! \, x \in S$ $a . x = b$,

c) $a + 0 = 0 + a = a$ $\forall a \in S$,

d) $\forall a, b \in S$ $\exists! \, x \in S$ $a + x = b$.

**Satz 2.** *Ein Ternärkörper $(S, t)$ mit Linksnullelement ist genau dann linear, falls*

$$t(a, b, c) = a . b + c \quad \forall a, b, c \in S . \tag{6}$$

Beweis. I. Es sei $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement und $a, b, c \in S$. Dann $t(a, b, 0) = t(ab, e_{ab}, 0) = ab$ und folglich $t(a, b, c) = t(ab, e_{ab}, c) =$ $= ab + c$.

Jetzt brauchen wir

**Hilfssatz.** *Es sei $(S, t)$ ein Ternärkörper mit Linksnullelement, der die Bedingung (6) erfüllt. Dann ist $(S, +)$ eine Loop.*

Beweis. Offenbar besitzt $(S, +)$ folgende zwei Eigenschaften: $a + 0 = 0 + a = a$ $\forall a \in S$; $\forall a, b \in S$ $\exists! \, x \in S$ $a + x = b$. Weiter sei $a, b \in S$; $c \in S - \{0\}$. Dann gibt $m \in S$, so dass $t(c, m, b) = a$, d. h. $cm + b = a$. Wir werden jetzt voraussetzen, dass für ein $x \in S$ $x + b = a$ ist. Dann gibt $m_1 \in S$ mit $t(c, m_1, 0) = x$ und daraus $t(c, m_1, b) = cm_1 + b = x + b = a$, $t(c, m, b) = cm + b = a$. Folglich ist nach (1), (3) und (4) $m = m_1$ und $x = cm = cm_1$. □

II. $(S, t)$ erfülle die Bedingung (6) und für $a, b, c, d, e, f \in S$ gelte $t(a, b, e) =$ $= t(c, d, e)$. Dann ist $ab + e = cd + e$ und nach genau bewiesenem Hilfssatz ist $ab = cd$, also auch $ab + f = cd + f$, d. h. $t(a, b, f) = t(c, d, f)$. □

**Definition 3.** Es sei $(S, t)$ ein Ternärkörper. Die affine Ebene $\alpha(S, t)$ heisst (nach [4], S. 620) *vertikaltransitiv*, wenn es für je zwei Punkte $(x, y), (x, z) \in S^2$ eine Translation $\tau$ gibt, so dass $(x, y)^\tau = (x, z)$. Jede Translation $\tau$ der Ebene $\alpha(S, t)$ mit der Eigenschaft $\exists x \in S$ $\{(x, y) \mid y \in S\}^\tau = \{(x, y) \mid y \in S\}$ heisst *vertikal*.

**Satz 3.** (Siehe auch Satz 1 aus [4], S. 622). *Es sei $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement. Dann ist die affine Ebene $\alpha(S, t)$ genau dann vertikaltransitiv, wenn $(S, +)$ eine Gruppe ist.*

Beweis. I. Ist $(S, +)$ eine Gruppe, dann ergibt für jedes $a \in S$ die Abbildung $(x, y) \mapsto (x, y + a)$ eine vertikale Translation. Wegen $\forall y, z \in S\ \exists a \in S\ y + a = z$, ist $\alpha(S, t)$ vertikaltransitiv.

Weiter brauchen wir einen

**Hilfssatz.** *Ist $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement, $\tau$ eine vertikale Translation, dann gibt es ein $a \in S$, so dass $(x, y)^\tau = (x, y + a)\ \forall x, y \in S$.*

Beweis. Es sei $(0, 0)^\tau = (0, a)$, $y \in S - \{0\}$, $(0, y)^\tau = (0, y')$. Weil $t(y, e_y, 0) = y$, $t(y, e_y, a) = y + a$, ist $(y, y)^\tau = (y, y + a)$. Weiter gibt es ein $m \in S$, so dass $ym = 0$ und hieraus $ym + y = t(y, m, y) = y$, $ym + y' = t(y, m, y') = y'$.

Daraus folgt $(y, y)^\tau = (y, y')$, d. h. $y' = y + a$. Für $y = 0$ ist es offenbar, dass $(0, y)^\tau = (0, y + a)$ ist. Es sei $x \in S - \{0\}$, $y \in S$. Dann gibt es ein $m \in S$, so dass $t(x, m, y) = y$, woraus $xm = 0$, $t(x, m, y + a) = y + a$ und $(x, y)^\tau = (x, y + a)$ folgt. □

II. Es sei $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement, die Ebene $\alpha(S, t)$ sei vertikaltransitiv und $a, b, c$ seien aus $S$. Dann gibt es Translationen $\tau, \sigma$ mit $(0, 0)^\tau = (0, b), (0, 0)^\sigma = (0, c)$. Nach dem Hilfssatz ist $(0, 0)^{\tau\sigma} = (0, b)^\sigma = (0, b + c)$, so dass $(0, a)^{\tau\sigma} = (0, a + (b + c))$. Aber $(0, a)^{\tau\sigma} = (0, a + b)^\sigma = (0, (a + b) + c)$, so dass also $a + (b + c) = (a + b) + c$. □

Bemerkung. Es gibt ein Ternärkörper $(S, t)$ mit Linksnullelement, der zwar nicht linear ist, dessen Ebene $\alpha(S, t)$ aber vertikaltransitiv ist.

**Satz 4.** (Siehe auch Satz 2 in [4], S. 623). *Es sei $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper, der die folgenden Bedingungen erfüllt:*

*die Ebene $\alpha(S, t)$ ist vertikaltransitiv,*

(7) $\forall a, b, y \in S\ \exists x, c \in S$

$$(a \neq 0 \Rightarrow (ax \neq 0\ \&\ ax + bx = cx))\ \&\ (ay = 0 \Rightarrow by = cy),$$

(8) $\forall a, b, y \in S\ \exists x, c \in S$

$$(a \neq b \Rightarrow (ax \neq bx\ \&\ cx + ax = bx))\ \&\ (ay = by \Rightarrow cy = 0).$$

*Dann ist $\alpha(S, t)$ eine Translationsebene genau dann, wenn es gilt:*

(9) $\forall a, b \in S\ \exists c \in S\ \forall x \in S\ ax + bx = cx$,

(10) $\forall a, b \in S\ \exists c \in S\ \forall x \in S\ cx + ax = bx$.

Bemerkung. a) Erfüllt ein linearer Ternärkörper $(S, t)$ mit Linksnullelement die Bedingung $t(x, 0, y) = y \ \forall x, y \in S$, so genügt auch den Bedingungen (7), (8).

b) Es ist offenbar, dass $(9) \Rightarrow (7)$, $(10) \Rightarrow (8)$.

**Hilfssatz.** *Es sei $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement, der (9), (10) erfüllt und die Ebene $\alpha(S, t)$ sei vertikaltransitiv. Dann ist für jedes $a \in S$ die durch $xm + am = x^{\bar{a}}m \ \forall m \in S$ definierte Abbildung $x \mapsto x^{\bar{a}}$ eine Permutation der Menge $S$.*

Beweis. Vor allem muss überprüft werden, dass $x \mapsto x^{\bar{a}}$ eine Abbildung ist. Aus (9) folgt, dass $\forall x \in S \ \exists y \in S \ \forall m \in S \ xm + am = ym$. Weil $x^{\bar{a}}m = ym \ \forall m \in S$, ist nach (2) $x^{\bar{a}} = y$.

Weiter sei $x_1, x_2 \in S$ und $x_1^{\bar{a}} = x_2^{\bar{a}}$. Dann ist $x_1m + am = x_1^{\bar{a}}m = x_2^{\bar{a}}m = x_2m + am$, $x_1m = x_2m \ \forall m \in S$ und nach (2) $x_1 = x_2$. Also ist $\bar{a} : S \to S$ injektiv.

Es sei $y \in S$. Dann gibt es nach (10) ein $x \in S$, so dass $xm + am = ym$. Damit ist $\bar{a} : S \to S$ bijektiv. □

Beweis des Satzes 4. I. Es sei $(S, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement, der die Bedingungen (9), (10) erfüllt, und die Ebene $\alpha(S, t)$ sei vertikaltransitiv. Wir wollen zeigen, dass für jede $a, b \in S$ die durch $(x, y)^\tau := (x^{\bar{a}}, y + b)$ bestimmte Abbildung eine Translation der Ebene $\alpha(S, t)$ ist. Offenbar ist $\tau : S^2 \to S^2$ bijektiv. Weiter ist für jedes $c \in S$ $\{(c, y) \mid y \in S\}^\tau = \{(c^{\bar{a}}, y + b\} \mid y \in S\} = \{(c^{\bar{a}}, y) \mid y \in S\}$. Es sei $m, c \in S$. Wir legen $d := -am + c + b$ fest. Dann bedeutet $xm + c = y$ dasselbe wie $xm + am + d = y + b$ und dasselbe wie $x^{\bar{a}}m + d = y + b$. Dies ist gleichwertig mit $\{(x, y) \mid xm + c = y\}^\tau = \{(x, y) \mid xm + d = y\}$.

Für $a \neq 0$ bekommen wir eine Translation, zu deren Fixgeraden die Gerade $\{(0, y) \mid y \in S\}$ nicht gehört. Damit ist die Gruppe von genau allen Translationen der Ebene $\alpha(S, t)$ abelsch. Es ist leicht nachzuweisen, dass die Gruppe $(S, +)$ zu einer Untergruppe der Gruppe von genau allen Translationen der Ebene $\alpha(S, t)$ isomorph ist. Also ist auch $(S, +)$ abelsch. Es bleibt noch zu zeigen, dass es zu je zwei Punkten $(r, s), (u, v) \in S^2$ der Ebene $\alpha(S, t)$ eine Translation $\tau$ gibt, so dass $(r, s)^\tau = (u, v)$.

Nach (10) gibt es ein $a \in S$, so dass $am + rm = um \ \forall m \in S$. Daraus bekommt man $rm + am = um \ \forall m \in S$. Wählt man noch $b := -s + v$, so gilt für die Translation $\tau$, die durch $(x, y)^\tau = (x^{\bar{a}}, y + b) \ \forall x, y \in S$ bestimmt ist, die Beziehung $(r, s)^\tau = (r^{\bar{a}}, s + b) = (u, v)$.

II. Setzen wir voraus, dass die vertikaltransitive Ebene $\alpha(S, t)$ eine Translationsebene ist. Es sei $a \in S - \{0\}$. Dann existiert genau eine Translation $\tau_a$ der Ebene $\alpha(S, t)$, so dass $(0, 0)^{\tau_a} = (a, 0)$. Es sei $x \in S - \{0\}$, $(x, 0)^{\tau_a} = (x^{\bar{a}}, 0)$. Es gibt genau ein $z \in S$, so dass $xz = 0$. Nach (7) gibt es weiter $m, c \in S$, so dass $xm \neq 0$, $xm + am = cm$, $az = cz$. Wegen $(0, 0), (0, -xm) \in \{(0, y) \mid y \in S\}$ gilt $(0, -xm)^{\tau_a} \in \{(a, y) \mid y \in S\}$. Aber die Verbindungsgeraden der Punkte $(0, 0), (a, 0)$ und $(0, -xm), (a, -xm)$ sind parallel und deswegen $(0, -xm)^{\tau_a} = (a, -xm)$. Aber auch die Verbindungsgeraden der Punkte $(0, 0), (x, 0)$ und $(a, -xm), (c, 0)$ sind parallel. Wegen $m \neq z$ schneiden sich die Verbindungsgeraden der Punkte $(a, 0)$, $(c, 0)$ und $(a, -xm), (c, 0)$ im Punkt $(c, 0)$. Somit $(x, 0)^{\tau_a} = (c, 0) \Rightarrow x^{\bar{a}} = c,\ y = 0$. Wir haben bewiesen, dass es zu jedem $a \in S$ eine Abbildung $\bar{a}$ mit der Eigenschaft $(x, 0)^{\tau_a} = (x^{\bar{a}}, 0)\ \forall x \in S$ gibt. Offenbar ist die Abbilundg $\bar{a} : S \to S$ injektiv. Aus (8) kann man völlig ähnlich herleiten, dass $\bar{a} : S \to S$ surjektiv ist und dass $xm + am = x^{\bar{a}}m\ \forall x, m \in S$ gilt. Hieraus folgt schon (9) und (10). □

Bemerkung. Es gibt ein linearer Ternärkörper $(S, t)$ mit Linksnullelement, der (7), (8) nicht genügt, aber $\alpha(S, t)$ ist eine Translationsebene.

Beispiel. Eine Menge $\mathscr{K}$ von eigentlichen Untergruppen einer Gruppe $(G, +)$ heisst eine Kongruenz der Gruppe $(G, +)$, falls

(i) $\forall x \in G\ \exists U \in \mathscr{K}\ x \in U$,

(ii) $\forall U, V \in \mathscr{K};\ U \neq V\ U \cap V = \{0\}$,
 $(0$ – ein neutrales Element von $(G, +))$,

(iii) $\forall U, V \in \mathscr{K};\ U \neq V U + V = G$.

Man kann zeigen, dass jede Gruppe mit einer Kongruenz abelsch ist.

Es sei $\mathscr{K}$ eine Kongruenz einer Gruppe $G$ und $A \in \mathscr{K}$. Es sei $R$ eine Untergruppe der Gruppe $G$, so dass $A \oplus R = G$ (direkte Summe) und es sei $\# A = \# R$. Weiter sei $\phi : A \to R$ eine bijektive Abbildung mit $\phi(0) = 0$. Zu jeder Gruppe $B \in \mathscr{K} - \{A\}$ gibt es eine Abbildung $X_B : A \to A$ mit $B = \{X_B x + \phi x \mid x \in A\}$ Offenbar gilt für $\mathscr{C} := \{X_B \mid B \in \mathscr{K} - \{A\}\}$ die Beziehung $\# \mathscr{C} = \# A$. Es sei $a \mapsto a'$ eine bijektive Abbildung von der Menge $A$ auf die Menge $\mathscr{C}$. Für jede $a, b, c \in A$ definieren wir $t(a, b, c) := b'(a) + c$.

**Hilfssatz.** *Es sei* $a, b, c \in A$, $\phi a + \phi b = \phi c$. *Dann* $Xa + Xb = Xc$, $X0 = 0$ $\forall X \in \mathscr{C}$.

Beweis. Es sei $\phi a + \phi b = \phi c$, $X_B \in \mathscr{C}$. Dann ist $X_B a + \phi a + X_B b + \phi b \in B$ und es gibt ein $d \in A$, so dass $X_B a + \phi a + X_B b + \phi b = X_B d + \phi d$. Daraus folgt $X_B a + X_B b = X_B d$, $\phi a + \phi b = \phi d = \phi c$, so dass $c = d$ und $X_B a + X_B b = X_B c$.
Wegen $X_B 0 + \phi 0 = X_B 0 \in A \cap B$ ist $X_B 0 = 0$. □

Wir werden beweisen, dass $(A, t)$ ein linearer Ternärkörper mit Linksnullelement ist, der die Bedingungen (9), (10) erfüllt.

(1) Es sei $a, b, c \in A$. Dann gibt es genau ein Element $x \in A$, so dass $b'a + x = c$ (weil $A$ eine Gruppe ist).

(2) Es sei $a, b, c, d \in A$; $a \neq c$. Dann gibt es $x, y \in A$, so dass $c'x + \phi x + a'y + \phi y = b - d$ und folglich $c'x + a'y = b - d$, $\phi x + \phi y = \phi 0 = 0$. Nach Hilfssatz ist $a'x + a'y = a'0 = 0$, so dass $a'y = -a'x$ und weiter schrittweise $c'x - a'x = b - d$, $a'x + b = c'x + d$, $t(x, a, b) = t(x, c, d)$. Gibt es noch ein

Element $z \in A$ mit $t(z, a, b) = t(z, c, d)$, so ist $a'z + b = c'z + d$, d. h. $c'z - a'z = b - d$. Weiter gibt es ein $u \in A$, so dass $\phi z + \phi u = \phi 0 = 0$ und folglich schrittweise $a'z + a'u = a'0 = 0$, $c'z + a'u = b - d$, $c'z + \phi z + a'u + \phi u = b - d$, $c'z + \phi z = c'x + \phi x$, $\phi z = \phi x$, $z = x$.

(3) Es sei $a, b, c, d \in A$; $a \neq c$. Dann gibt es gerade ein $z \in A$ mit $\phi a = \phi c + \phi z$. Wegen $a \neq c$ ist $\phi z \neq 0$ und weiter $b - d + \phi z \in G - A$. Somit gibt es genau ein $x \in A$ mit $x'y + \phi y = b - d + \phi z$ für ein geeignetes $y \in A$. Dann ist schrittweise $\phi y = \phi z$, $y = z$, $x'z = b - d$. Wegen $\phi a = \phi c + \phi z$ ist nach Hilfssatz $x'a = x'c + x'z$, so dass $x'a = x'c + b - d$. Wir setzen $y := b - x'a$. Dann ist $t(a, x, y) = x'a + y = b$, $t(c, x, y) = x'c + y = x'c - x'a + b = d$.

(4) Nach Hilfssatz ist $x'0 = 0$ $\forall x \in A$, so dass $\forall x, y \in A$ $t(0, x, y) = x'0 + y = 0 + y = y$. Offenbar ist $(A, t)$ linear.

(9) Es sei $a, b \in A$. Dann gibt es ein $c \in A$ mit $\phi a + \phi b = \phi c$ und nach Hilfssatz ist $x'a + x'b = x'c$, so dass $ax + bx = cx$ $\forall x \in A$. Schliesslich kann man ähnlicherweise (10) zeigen. Weiter kann man beweisen, dass $(A, t)$ dem Distributivgesetz $(a + b)c = ac + bc$ $\forall a, b, c \in A$ genau dann genügt, falls $\phi$ ein Isomorphismus ist.

## *Literatur*


[1] *Bruck, R. H.* and *Bose, R. C.*: Linear representations of projective planes in projective spaces, Journal of Algebra *4* 1966, 117—172.

[2] *Havel, V.*: A general coordinatization principle for projective planes with comparison of Hall and Hughes frames and with examples of generalized oval frames, Czech. Math. Journal *24 (99)* 1974, 664—673.

[3] *Hughes, D. R.* and *Piper, F. C.*: Projective planes, Springer Verlag New York—Heidelberg—Berlin 1973.

[4] *Klucký, D.* and *Marková, L.*: Ternary rings with zero associated to translation planes, Czech. Math. Journal *23 (98)* 1973, 617—628.



*Anschrift des Verfassers:* 118 00 Praha 1, Malostranské nám. 25, ČSSR (Matematicko-fyzikální fakulta UK).