Aplikace matematiky

Daniel Mayer; Jindřich Nečas

Sčítání nekonečných řad pomocí integrálních transformací

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 3, 165–185

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102527

ČLÁNKY

SČÍTÁNÍ NEKONEČNÝCH ŘAD POMOCÍ INTEGRÁLNÍCH TRANSFORMACÍ

DANIEL MAYER, JINDŘICH NEČAS

(Došlo dne 20. prosince 1955.) DT: 517.522 : 517.63

V této práci je užito Laplaceovy a Mellinovy transformace na sčítání nekonečných řad. Je uvedena řada příkladů.

S nekonečnými konvergentními řadami se často setkáváme v úlohách z theoretické mechaniky, zejména v problémech z theorie pevnosti a pružnosti, v úlohách o vedení tepla, v elektrotechnice i v jiných oborech. Častým zdrojem nekonečných řad bývají integrály nebo diferenciální rovnice, které nedovedeme řešit jinak než nekonečnými řadami. V mnohých případech bude výhodné nahradit řadu jejím součtem v uzavřeném tvaru, nebo alespoň, zejména u řad pomalu konvergujících, transformovati je na jiné, ekvivalentní, rychle konvergující řady. Klasická matematická analysa podává celou řadu method pro sčítání nekonečných řad a pro jejich transformování na řady rychleji konvergující. Bibliografie je zde velmi obsáhlá a omezíme se jen na odkaz na knihu K. Knoppa [1], který popisuje některé elementární methody a na článek G. G. Macfarlanea [2], jenž si všímá vztahu mezi konvergentní řadou a Mellinovou transformací.

V tomto článku popíšeme operátorovou methodu sčítání konvergentních řad a vymezíme podmínky pro její platnost. S hlediska fysikálních a technických aplikací je tato methoda, ve srovnání s jinými známými způsoby sčítání řad, výhodná jednak tím, že platí pro velmi širokou oblast typů nekonečných řad a dále tím, že neklade nároky na hlubší znalosti z theorie nekonečných řad. Máme-li k disposici operátorový slovník příslušné transformace a sbírku vyřešených integrálů, můžeme bezprostředně získat výsledek.

V oddílech 1 a 2 ukážeme na příkladech užití operátorového počtu (přesněji integrálních transformací) na sčítání nekonečných řad. Potřebné matematické věty uvedeme již v těchto oddílech a jejich důkazy ponecháme převážně do oddílu 3.

1. Užití Laplaceovy a Fourierovy transformace

Definice 1. *Nechť $f(t)$ jest funkce definovaná v intervalu $\langle 0, \infty)$, v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$ jest absolutně integrabilní, t. j. $\int_a^b |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$, kde $0 \leqq a < b < \infty$. Potom funkce $F(p) = \lim_{A \to \infty} \int_0^A e^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, \mathrm{d}t$ jest Laplaceovou transformací (obrazem) funkce $f(t)$, kterou nazýváme originálem; p jest komplexní číslo. Budeme psát $L\{f(t)\} = F(p)$.*

Jestliže $\int_0^\infty |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$ a $p = ai$, kde a je reálné, i je imaginární jednotka, potom $F(ai)$ je jednostranná Fourierova transformace.

Pro informaci uvedeme

Větu 1. *Nechť pro originál $f(t)$ integrál $\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$ konverguje pro nějaké p_0. Potom konverguje pro všechna p taková, že $\operatorname{Re} p > \operatorname{Re} p_0$ a $F(p)$ jest v této polorovině holomorfní funkcí.*

Důkaz viz [3].

Nyní přikročíme k objasnění hlavních myšlenek, na nichž je založena popisovaná methoda. Pro větší názornost budeme míti na zřeteli číselný příklad.

Příklad 1.

Sečteme známou relativně konvergentní řadu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{1}$$

Budeme hledat takový obraz $F(p)$, aby $F(n) = \frac{1}{n}$. To jest ovšem jednoduché, neboť víme, že $\int_0^\infty 1 \,.\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{p}$. Na řadu se můžeme dívat jako na součet hodnot funkce $F(p)$ pro $p = 1, 2, 3, \dots$ násobených příslušným znaménkem. Snažme se vyjádřit řadu (1) jako součet obrazů v jednom bodě $p = 1$. Zřejmě platí $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \,.\, F(1 + (n-1))$ a tedy příslušné obrazy jsou $(-1)^{n+1} F(p + (n-1))$. Součet konečně mnoha obrazů jest zase obraz. Jak to vypadá se součtem nekonečně mnoha obrazů vyplývá z věty 2. Předpokládejme, že $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F(p + (n-1)) = G(p)$, kde $G(p)$ je obraz funkce $g(t)$. Potom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^\infty g(t)\, e^{-t}\, \mathrm{d}t\,. \tag{2}$$

$L\{(-1)^{n-1} e^{-(n-1)t}\} = (-1)^{n-1} F(p + (n-1))$ a tedy součtu obrazů odpovídá součet originálů $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(n-1)t}$. Jestliže tento součet umíme lehce stanoviti, potom se otázka součtu řady (1) převádí na výpočet integrálu (2). To jest hlavní idea, kterou se budeme řídit: součet transformát převedeme na součet originálů, který vyjádříme v uzavřeném tvaru, nebo naopak, součet originálů převedeme na součet transformát, který vyjádříme v uzavřeném tvaru. S tímto postupem se podrobněji seznámíme v oddíle 2.

V našem případě je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} e^{-(n-1)t} = \frac{}{1 + e^{-t}}$$

a tedy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^{t}}\, \mathrm{d}t = \lg 2$$

(použili jsme substituce $x = e^t$).

Věta 2. *Nechť jsou $f_n(t)$ originály takové, že $F_n(p)$ jsou definovány pro* Re $p > \sigma$. *Nechť platí: $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|\, \mathrm{d}t = 0$, je-li $m \geqq n$, kde $0 \leqq a \leqq b < \infty$. Posloupnost funkcí $f_n(t)$ je t. zv. v průměru Cauchyovská na každém konečném intervalu z $< 0, \infty)$. Potom existuje jediná $f(t)$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ ve smyslu výše uvedeném, t. j. pro každý interval $\langle a, b\rangle$, $0 \leqq a \leqq b < \infty$, jest $\lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b |f_n(t) - f(t)|\, \mathrm{d}t = 0$*[1]*) a platí: $F(p)$ jest definována pro* Re $p > \sigma$ *a $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(p) = F(p)$ tehdy a jenom tehdy, jestliže platí pro* Re $p > \sigma$:

1) *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0* a *$A_0 > 0$ tak, že pro $\infty > B \geqq A \geqq A_0$ jest $\left|\int_A^B (f_{n_0}(t) - f(t))\, e^{-\mathrm{Re}\, pt}\, \mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.*

2) *Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $A > 0$ a N tak, že pro $n \geqq N$ je $\left|\int_A^{\infty} f_n(t)\, e^{-pt} \,.\, \mathrm{d}t\right| < \varepsilon$.*

Důkaz ponecháme do oddílu 3.

Při aplikacích popisované methody se namnoze ukazuje, že předpoklady 1) a 2) ve větě 2 lze nahraditi silnějším požadavkem, který jest pouze postačující, nikoliv však nutný. Tuto podmínku, jež vyplývá jako přímý důsledek věty 2, formuluje

---

[1]) Pod pojmem „jediná" zde rozumíme to, že každá jiná funkce s touže vlastností se liší od $f(t)$ pouze na množině míry nula.

Věta 3. *Jestliže integrály* $\int\limits_0^\infty f_n(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt$ *pro* $\operatorname{Re} p > \sigma$ *konvergují vzhledem k* n *stejnoměrně, potom jsou splněny podmínky* 1) *a* 2) *věty 2.*

Vskutku, ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $A_0 > 0$ tak, že $B \geqq A \geqq A_0 \Rightarrow |\int\limits_A^B f_n(t)\,.$ $.\, e^{\sigma_1}\, dt| < \varepsilon$ pro všechna n. Odtud plyne podmínka 2), neboť je-li $\operatorname{Re} p > \sigma_1 > \sigma$ a položíme-li $F_n(t) = \int\limits_t^\infty f_n(t)\, e^{-\sigma_1 t}\, dt$ potom $\int\limits_{A_0}^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt = \int\limits_{A_0}^\infty f_n(t)\,.$ $.\, e^{-\sigma_1 t + (\sigma_1 - p)t}\, dt = -\, F_n(t)\, e^{+(\sigma_1 - p)t}]_{A_0}^\infty + (\sigma_1 - p) \int\limits_{A_0}^\infty F_n(t)\, e^{(\sigma_1 - p)t}\, dt$. První člen na pravé straně rovnice je v absolutní hodnotě $< \varepsilon$ a druhý menší než $\dfrac{|\sigma_1 - p|}{\operatorname{Re}\,(p - \sigma_1)}\, \varepsilon$.

Jestliže $B < \infty$, potom dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} |\int\limits_A^B f_n(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt| = |\int\limits_A^B f(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt|\,.$$

Odtud dostáváme podmínku 1.

Vraťme se k 1. příkladu a přesvědčme se, zda jsou splněny podmínky některé z posledních dvou vět.

$$f_n(t) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\, e^{-(j-1)t} = \frac{1 - (-1)^n\, e^{-nt}}{1 + e^{-t}} = \frac{e^t - (-1)^n\, e^{(1-n)t}}{1 + e^t}\,.$$

Předpoklady ve větě 3 jsou zřejmě splněny, klademe-li $\sigma = 0$.

$$f(t) = \frac{e^t}{1 + e^t}\,.$$

Pro $\sigma_0 > 0$ jest

$$\left| \int\limits_A^\infty e^{-\sigma_0 t}\, \frac{e^t - (-1)^n\, e^{+(1-n)t}}{1 + e^t}\, dt \right| \leqq \frac{1}{\sigma_0}\, e^{-\sigma_0 A}\,.$$

Upozorňujeme, že řady v příkladu 2 a 3 se dají sečísti velmi jednoduše, uvážíme-li, že

$$\frac{1}{j^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{j - a} - \frac{1}{j + a}\right].$$

Příklad 3 má však vzhledem k větě 4 instruktivní charakter.

Příklad 2.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{64} + \ldots = \sum_{j=1}^\infty \frac{1}{4j^2 - 1}\,. \tag{3}$$

Platí

$$L\,\{\tfrac{1}{2} \sinh \tfrac{1}{2}t\} = \frac{1}{4p^2 - 1}$$

pro $\operatorname{Re} p > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4(1 + (j-1))^2 - 1}.$$

Řadě (3) tak odpovídá řada obrazů

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4(p + (j-1))^2 - 1}.$$

Z gramatiky operátorového počtu dostáváme

$$\frac{1}{4(p + (j-1)^2 - 1} = L\,\{\tfrac{1}{2}\sinh \tfrac{1}{2}t \,.\, e^{-(j-1)t}\}.$$

a tak řadě obrazů odpovídá řada originálů $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2} \sinh \frac{1}{2}t \,.\, e^{-(j-1)t}$. Lehce se přesvědčíme, že klademe-li $\sigma = \frac{1}{2}$, jsou splněny předpoklady věty 3. Jako výsledek pak dostáváme

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 - 1} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \sinh \frac{1}{2}\, t \,.\, \frac{e^{-t}}{1 - e^{-t}}\, dt =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\sinh \tau}{e^{2\tau} - 1} = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-\tau}\, d\tau = \frac{1}{2}.$$

Příklad 3.

$$\operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \operatorname{arctg} \frac{2}{9} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{j^2}. \tag{4}$$

Ve slovníku operátorového počtu nalezneme, že mezi originálem a obrazem platí korespondence

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}\right\} = \operatorname{arctg} \frac{1}{p}.$$

Dále platí

$$\operatorname{arctg} \frac{2}{p^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{p-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{p+1}$$

a odtud dostáváme pro $\operatorname{Re} p > 1$

$$L\left\{\frac{\sin t}{t}(e^t - e^{-t})\right\} = L\left\{2\,\frac{\sin t}{t} \sinh t\right\} = \operatorname{arctg} \frac{2}{p^2}.$$

Řadě obrazů

$$\sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{2}{(p + j - 1)^2}$$

odpovídá řada originálů

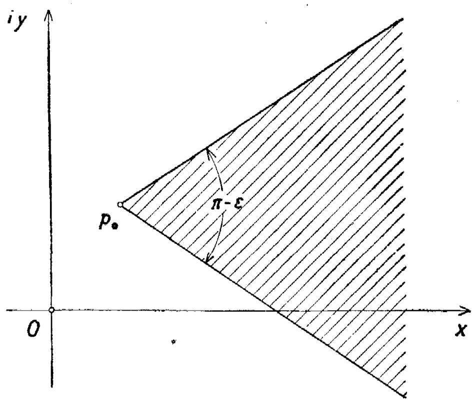
$$2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \sinh t \,.\, e^{-(j-1)t}.$$

Opět snadno zjistíme, že klademe-li $\sigma = 1$, jsou předpoklady věty 3. splněny. Jestliže vynecháme první obraz a k tomu příslušný originál, pak $\sigma = 0$. Dostáváme tak

$$\int_0^\infty \left(2 \sum_{j=2}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \sinh t \,.\, e^{-(j-1)t}\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t + \lim_{\substack{p\to 1\\ p\in K}} 2 \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} \sinh t\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \left(2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\sin t}{t} \sinh t \,.\, e^{-(j-1)t}\right) e^{-t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^\infty \frac{1 + e^{-t}}{t} \sin t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} 1 = \frac{3}{4}\pi\,.$$



Obr. 1.

Limitní přechod plyne z následující věty, známé z theorie Laplaceovy transformace (její důkaz je obsažen v [3]).

Věta 4. *Budiž $f(t)$ originálem a nechť $\int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ konverguje pro nějaké p_0. Potom integrál stejnoměrně konverguje pro všechna p, která leží v oblasti tvořené nekonečným klínem K, jehož vrchol o vrcholovém úhlu $\pi - \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, leží v p_0 a symetrála klínu je rovnoběžná s osou reálnou.* (obr. 1)

V našem případě $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ konverguje pro $p = 0$ a dosud plyne možnost limitního příchodu za integračním znaménkem.

Příklad 4.

$$\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{9 + a^2} + \frac{1}{25 + a^2} + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 + a^2}\,.$$

Protože platí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 + a^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 + a^2} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 + a^2},$$

můžeme rozložit uvažovanou sumaci na dvě nekonečné řady

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 + a^2} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 + a^2} - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{4j^2 + a^2}.$$

Pro první součet máme

$$\frac{1}{p^2 + a^2} = L\left\{\frac{1}{a} \sin at\right\},$$

a tedy

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + j - 1)^2 + a^2} = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \frac{\sin at}{e^t - 1}\, \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2a} \operatorname{cotgh} a\pi - \frac{1}{2a^2}.$$

(Snadno se přesvědčíme, že jsou splněny předpoklady věty 3, klademe-li $\sigma = 0$.)

Podobně vypočítáme druhý součet a docházíme tak k výsledku

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)^2 + a^2} = \frac{\pi}{4a} \operatorname{tgh} \frac{a\pi}{2}.$$

Příklad 5.

Stanovíme součet Fourierovy řady:

$$-\frac{1}{1 - a^2} \cos \tau + \frac{1}{4 - a^2} \cos 2\tau - \frac{1}{9 - a^2} \cos 3\tau + \ldots =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2 - a^2} \cos j\tau = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(1 + (j-1))^2 - a^2} \cos j\tau = \Phi(\tau), \quad \text{kde } 0 < a < 1.$$

Platí

$$L\left\{\frac{1}{a} \sinh at\right\} = \frac{1}{p^2 - a^2},$$

a tedy řada obrazů má v našem případě tvar

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos j\tau \frac{1}{(p + j - 1)^2 - a^2}$$

a jí odpovídá řada originálů

$$\frac{1}{a} \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos j\tau \,.\, \sinh at \,.\, e^{-(j-1)t}.$$

Dostáváme:

$$\Phi(\tau) = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \sinh at \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j \cos j\tau \,.\, e^{-jt}\, \mathrm{d}t =$$

$$= -\frac{1}{2a} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \frac{e^{at} - e^{-at}}{1 + e^{t - i\tau}}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2a^2}\left(1 - \frac{a\pi}{\sin a\pi} \cos a\tau\right). \tag{5}$$

Rovnice (5) platí však pro každé $a \neq k$, kde k je celé číslo, jak plyne z analytické prodlužitelnosti funkcí

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j^2 - a^2} \cos j\tau$$

a

$$\frac{1}{2a^2} \left(1 - \frac{a\pi}{\sin a\pi} \cos a\tau\right),$$

proměnné a.

Fourierova transformace jest zvláštní případ Laplaceovy transformace. Lze ji použít v tom případě, platí-li předpoklady z věty 5.

Věta 5. *Nechť $f_n(t)$ jsou originály takové, že $\int_0^\infty |f_n(t)|\, dt < \infty$. Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty |f_n(t) - f_m(t)|\, dt = 0$, $n \leqq m$. Potom existuje jediná*[2] *$f(t)$ taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ v tom smyslu, že $\lim\limits_{n\to\infty} \int_0^\infty |f_n(t) - f(t)|\, dt = 0$. Dále platí $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(is) = F(is)$, kde s je reálné.*

Platnost věty 5 jest zřejmá: předně z úplnosti prostoru $L(0, \infty)$ plyne existence požadované funkce f (jediné až na množinu míry nula). Dále platí:

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(is) - F(is)| = \lim_{n\to\infty} \left|\int_0^\infty (f_n(t) - f(t)\, e^{ist}\, dt\right| \leqq \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty | f_n(t) - f(t)|\, dt = 0\,.$$

Fourierovu transformaci by bylo možno použít třeba v příkladu 5.

2. Užití Mellinovy transformace

Definice 2. *Nechť $f(t)$ jest funkce definovaná v intervalu $\langle 0, \infty)$. Nechť $f(t)$ je absolutně integrabilní v každém konečném intervalu $0 \leqq a \leqq b < \infty$. Potom $F(p) = \lim\limits_{\substack{A\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \int_\varepsilon^A t^{p-1} f(t)\, dt$ se nazývá Mellinovou transformací (obrazem) funkce $f(t)$ (originálu); p je komplexní číslo.*

Pro naše účely je důležitá

Věta 6. *Jestliže definiční obor $F(p)$ obsahuje dva body p_0 a p_1 tak, že $\operatorname{Re} p_0 < \operatorname{Re} p_1$, potom jest tvaru pásu $x_0 < \operatorname{Re} p < x_1$ a funkce $F(p)$ jest v tomto pásu holomorfní. Je-li $x_1 > 0$, potom pro všechny body spojitosti t kde $0 < t < \infty$ funkce $f(t)$ platí: $f(t) = \dfrac{d}{dt} \lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} F(p)\, \frac{t^{-p+1}}{1 - p}\, dp$, kde $0 < \gamma < 1$, $x_0 < \gamma < x_1$. Jestliže*

[2]) Pod pojmem „jediná" zde rozumíme to, že každá jiná funkce s touže vlastností se liší od $f(t)$ pouze na množině míry nula.

$\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1} |f(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$, *potom v tom bodě, kde $f(t)$ jest spojitá a v jehož okolí má omezenou variaci, platí* $f(t) = \lim\limits_{\omega\to\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\alpha-i\omega}^{\alpha+i\omega} F(p)\, t^{-p} \,\mathrm{d}p.$

Důkaz méně známých bodů této věty ponecháváme do oddílu 3.

Analogicky k větě 2, jež platí pro Laplaceovu transformaci, lze pro Mellinovu transformaci formulovat následující větu.

Věta 7. *Buďtež $f_n(t)$ originály takové, že $F_n(p)$ jsou definovány v pásu $x_0 < \operatorname{Re} p < x_1$. Nechť platí* 0) $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f_n(t) - f_m(t)| \,\mathrm{d}t = 0$, *je-li $n \leqq m$ kde $0 \leqq a \leqq b < \infty$. Potom existuje* $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ (*t. znam.* $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b |f(t) - f_n(t)| \,\mathrm{d}t = 0$ *pro* $0 \leqq a \leqq b < \infty$).

$F(p)$ je definována v pásu $x_0 < \operatorname{Re} p < x_1$ a $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(p) = F(p)$ tehdy a jenom tehdy, když platí pro $x_0 < \operatorname{Re} p < x_1$:

1) *ke každému $\varepsilon > 0$ existují m_0, n_0, a_0, A_0 tak, že pro $0 < a \leqq b \leqq a_0$, $\infty > B \geqq A \geqq A_0$ platí nerovnosti*

$$\int\limits_a^b |(f_{m_0}(t) - f(t))\, t^{\operatorname{Re} p - 1} \,\mathrm{d}t| < \varepsilon$$

a

$$|\int\limits_A^B (f_{n_0}(t) - f(t))\, t^{\operatorname{Re} p - 1} \,\mathrm{d}t| < \varepsilon$$

2) *ke každému $\varepsilon > 0$ existuje a, A, N tak, že*

$$|\int\limits_0^a f_n(t)\, t^{p-1} \,\mathrm{d}t| < \varepsilon\,, \quad |\int\limits_A^\infty f_n(t)\, t^{p-1} \,\mathrm{d}t| < \varepsilon$$

pro

$$n \geqq N\,.$$

Věta 8. *Jestliže $\int\limits_0^1 f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1} \,\mathrm{d}t$ konvergují stejnoměrně vzhledem k n a integrály $\int\limits_1^\infty f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1} \,\mathrm{d}t$ konvergují stejnoměrně vzhledem k n, $x_0 < \operatorname{Re} p < x_1$, potom jsou splněny předpoklady* 1) a 2) *věty 7.*

Dříve než uvedeme další příklad zaveďme do našich úvah tyto funkce:

Definice 3. *Pro $0 < a \leqq 1$ jest* $\zeta(p, a) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \dfrac{1}{(j+a)^p}$, *kde* $\operatorname{Re} p > 1$. (7)

Pro $a = 1$ dostaneme $\zeta(p, 1) = \zeta(p)$, kde $\zeta(p)$ jest známá Riemannova funkce.

Vlastnosti funkce $\zeta(p, a)$, jež budeme dále potřebovat, jsou shrnuty ve

Věta 9. *Funkce $\zeta(p, a)$ jest pro* $\operatorname{Re} p > 1$ *dána absolutně konvergentní řadou* (7). *Pro* $\operatorname{Re} p > 1$ *je holomorfní funkcí. Lze ji analyticky prodloužiti na celou rovinu tak, že platí:*

1) *Jediná singularita v konečnu jest pól 1. řádu v bodě $p = 1$ a residuum $\zeta(p, a)$ v tomto bodě je rovno* 1.

2) *Je-li $\varepsilon > 0$, potom v polorovině* $\operatorname{Re} p \geqq 1 + \varepsilon$ *jest $\zeta(p, a)$ omezená. Je-li* $1 \leqq \operatorname{Re} p \leqq 1 + \varepsilon$, *potom existuje konstanta m tak, že pro p, pro něž* $|p - 1| \geqq \eta > 0$ *je:* $|\zeta(p, a)| \leqq m(a) \lg |p|$. *Jestliže* $\frac{1}{2} \leqq \operatorname{Re} p \leqq 1$, $|p - 1| \geqq \eta > 0$, *potom* $|\zeta(p, a)| \leqq m(a)\,|p|$.

3) $\zeta(p) = 2^p \pi^{p-1} \sin \frac{\pi p}{2}\, \Gamma(1 - p)\, \zeta(1 - p)$.

4) $$\zeta(p, a) - \zeta(p, 1 - a) = 2^{1+p} \pi^{p-1} \Gamma(1 - p) \cos \frac{\pi p}{2} \,.\, [\zeta(1 - p, a) - \zeta(1 - p, 1 - a)]\,.$$

5) $$\zeta(0) = -\frac{1}{2}\,, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}\,, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}\,, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}\,, \ldots$$

$$\zeta(-2n) = 0\,, \quad n = 1, 2, \ldots, \zeta(1 - 2n) = \frac{(-1)^n}{2n} B_n\,,$$

kde B_n jsou Bernoulliho čísla.

6) $\zeta(2n) = \dfrac{2^{2n-1}\pi^{2n}}{(2n)!} B_n\,.$ 7) $\displaystyle\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{(2j + 1)^p} = 2^{-2p}\left[\zeta\left(p, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(p, \frac{3}{4}\right)\right]\,.$

8) $$\zeta(p, a) = \zeta(p) + \frac{1 - a}{1!} p\zeta(p + 1) + \frac{(1 - a)^2}{2!} p(p + 1)\, \zeta(p + 2) + \ldots + \frac{(1 - a)^n}{n!} p(p + 1) \ldots (p + n - 1)\, \zeta(p + n) + \ldots$$

Důkaz věty 9 vybočuje z rámce této práce a bude dokázán autory ve zvláštním pojednání.

Příklad 6.

Hledejme součet řady

$$I_1(x) - \frac{1}{3} I_1(3x) + \frac{1}{5} I_1(5x) - \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j - 1} I_1((2j - 1)\, x)\,, \tag{6}$$

kde

$$0 < x < \frac{\pi}{2}\,, \quad I_1(x) \text{ je Besselova funkce 1. druhu.}$$

Z tabulek Mellinovy transformace (viz na př. [2]) nalezneme korespondenci

$$M\{I_1(t)\} = 2^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - \frac{p}{2}\right)}, \text{ kde } \quad -1 < \operatorname{Re} p < \frac{3}{2}\,.$$

Užitím relace $M\{f(at)\} = a^{-p}F(p)$ dostaneme tuto řadu obrazů:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} (2j-1)^{-p} x^{-p} 2^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)} =$$

$$= 2^{p-1}x^{-p} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{p+1}} .$$

Platí:

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{p+1}} = 2^{-2p-2} \left[\zeta\left(p+1, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(p+1, \frac{3}{4}\right)\right],$$

a tedy řadě (6) přísluší obraz

$$2^{-p-3}x^{-p} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)} \left[\zeta\left(p+1, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(p+1, \frac{3}{4}\right)\right].$$

Z asymptotického vyjádření pro

$I_1(t) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi t}} \sin\left(t - \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{r(t)}{t\sqrt{t}}$, kde $|r(t)| \leq M < \infty$, dostáváme $x_1 = \dfrac{3}{2}$.

Dále $x_0 = -1$ protože $I_1(t) = t\,I(t)$, kde $I(t)$ je holomorfní funkce v okolí počátku. Z asymptotického rozvoje je též patrno, že řada (6) absolutně konverguje. V dalším se omezíme při vyšetřování příkladu 6 na pás $0 < \operatorname{Re} p < \frac{3}{2}$. Je patrno, že v tomto případě konverguje řada obrazů. Zkoumejme nyní podmínky věty 8.

$$\int_0^b |f(t) - f_n(t)|\, dt = \int_0^b \left| \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} I_1((2j-1)\,t) \right| dt \leq$$

$$\leq \sum_{j=n+1}^{\infty} \frac{1}{x(2j-1)^2} \int_0^{(2j-1)xb} A(u)\, du , \quad \text{kde} \quad A(u) = |I_1(u)| .$$

Užitím asymptotického vzorce snadno nahlédneme, že

$$\left| \frac{1}{\sqrt{2j-1}} \int_0^{(2j-1)xb} A(u)\, du \right| \leq M(b) .$$

Odtud plyne podmínka 0) věty 7. Platí:

$$\lim_{a\to 0} \int_a^b f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1}\, dt = \int_0^b f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1}\, dt , \quad b < \infty$$

stejnoměrně vzhledem k n, protože

$$\int_0^b f_n(t)\, t^{\mathrm{Re}\, p-1}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{x^{\mathrm{Re}\, p}} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{(2j-1)^{1+\mathrm{Re}\, p}} \int_0^{(2j-1)xb} u^{\mathrm{Re}\, p-1}\, I_1(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

Zvolíme-li b dostatečně malé, pak nezávisle na n $|\int_0^b f_n(t)\, t^{\mathrm{Re}\, p-1}| < \varepsilon$.

Podobně platí: $\lim\limits_{B\to\infty} \int_A^B f_n(t)\, t^{\mathrm{Re}\, p-1}\, \mathrm{d}t \doteq \int_A^\infty f_n(t)\, t^{\mathrm{Re}\, p-1}\, \mathrm{d}t$, $0 < A < \infty$, stejnoměrně vzhledem k n. To snadno nahlédneme užitím asymptotického odhadu $I_1(t)$ a integrací per partes: v podstatě jde o konvergenci integrálu

$$\int_A^\infty \frac{\sin\left((2j-1)\,.\,t - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sqrt{t}}\, \mathrm{d}t\,,$$

což jest dobře známá skutečnost.

Všimněme si ještě, že pro $0 < \mathrm{Re}\, p < \frac{1}{2}$ jest $\int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\, p-1}\, |f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. Výsledkem těchto úvah jest toto: řadě originálů

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{2j-1}\, I_1((2j-1)\,.\,t)$$

přísluší konvergentní řada obrazů k funkci (pro $0 < \mathrm{Re}\, p < \frac{3}{2}$)

$$F(p) = 2^{-p-3}x^{-p}\, \frac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{3}{2} - \dfrac{p}{2}\right)} \left[\zeta\left(p+1, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(p+1, \frac{3}{4}\right)\right],$$

která je v tomto pásu obrazem původní řady. Pro $0 < \mathrm{Re}\, p < \frac{1}{2}$ jest $\int_0^\infty t^{\mathrm{Re}\, p-1}$ . . $|f(t)|\, \mathrm{d}t < \infty$. a proto podle věty 6 platí pro $0 < \alpha < \frac{1}{2}$

$$f(t) = \lim_{\omega\to\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\omega}^{\alpha-i\omega} F(p)\, t^{-p}\, \mathrm{d}p$$

(že $f(t)$ má konečnou variaci plyne z tohoto: $I_1'(t) = \frac{1}{t}\, I_1(t) - I_2(t))$; $I_2(t)$ se v nekonečnu chová zcela analogicky jako $I_1(t)$, totiž

$$I_2(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin\left(t - \pi + \frac{1}{4}\right) + \frac{r^*(t)}{t\sqrt{t}}\,,$$

kde $|r^*(t)| < M$).

Nás zajímá $f(1)$ a jde tedy o výpočet integrálu

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}2^{-p-3}x^{-p}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)}\left[\zeta\left(p+1,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(p+1,\frac{3}{4}\right)\right]\mathrm{d}p\,.$$

Pro výpočet integrálu použijeme residuové věty (v podstatě provádíme realisaci operátoru pomocí residuové věty). Nejdříve zjistíme, že $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\,.$ $.\int\limits_{c_n}F(p)\,\mathrm{d}p=0$, kde c_n jsou části kružnice o poloměru n a se středem v počátku ležící nalevo od přímky $\operatorname{Re}p=\gamma$. Vskutku, podle bodu 2 věty 9, na té části kružnice, kde

$$0\leqq\operatorname{Re}p\leqq\gamma\quad\text{jest}\quad|F(p)|\leqq K|p|^{\operatorname{Re}p-1}$$

a podobně pro

$$-\tfrac{1}{2}\leqq\operatorname{Re}p\leqq0\quad\text{jest}\quad|F(p)|\leqq K|p|^{\operatorname{Re}p}\,.\ ^{3})$$

Přihlédnutím k bodu 4 téže věty dostáváme pro $a=\frac{1}{4}$:

$$2^{-p-3}x^{-p}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)}\left[\zeta\left(p+1,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(p+1,\frac{3}{4}\right)\right]=$$

$$=2^{-1}x^{-p}\pi^{p}\Gamma(-p)\sin\frac{\pi p}{2}\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)}\left[\zeta\left(-p,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(-p,\frac{3}{4}\right)\right].\qquad(8)$$

Protože

$$\Gamma(-p)\frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)}\cos\frac{\pi p}{2}\,.\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}=\pi\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}\frac{\Gamma(-p)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}-\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}=$$

$$=\pi\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}\frac{\Gamma(-\frac{1}{2}p)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}\pi^{-\frac{1}{2}}2^{-1-p}\,,$$

dostáváme odtud konečně rovnici (8) ve tvaru

$$\ldots=2^{-2-p}\pi^{p+\frac{1}{2}}x^{-p}\operatorname{tg}\frac{\pi p}{2}\frac{\Gamma\left(-\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{p}{2}\right)}\left[\zeta\left(-p,\frac{1}{4}\right)-\zeta\left(-p,\frac{3}{4}\right)\right].$$

---

³) Odhad funkce $\Gamma(p)$ provedeme užitím Stirlingova asymptotického vzorce pro $\Gamma(p)$, který platí stejnoměrně pro všechna p tak, že $|\arg p|<\pi-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Stirlingův asymptotický výraz zní: $\Gamma(p)=\sqrt{2\pi}\,\mathrm{e}^{-p}p^{p-\frac{1}{2}}$.

Jestliže bod p bude na naší kružnici o poloměru $n \geqq 1$ a $-1 \leqq \operatorname{Re} p \leqq -\frac{1}{2}$, potom podle bodu 2 věty 9 je $|F(p)| < K|p|^{-\frac{1}{2}}$ a jestliže $-\frac{3}{2} \leqq \operatorname{Re} p \leqq -1$, jest $|F(p)| \leqq \dfrac{K \lg |p|}{|p|^{\frac{3}{2}}}$. Posléze bude-li $\operatorname{Re} p \leqq -\frac{3}{2}$, potom dostaneme $|F(p)| \leqq$ $\leqq K|p|^{-\frac{3}{2}} \left(\dfrac{\pi}{2x}\right)^{\operatorname{Re} p}$ a odtud je viděti, že pro $0 < x \leqq \frac{1}{2}\pi$ jest $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{C_n} F(p)\,\mathrm{d}p =$ $= 0$.

Podle residuové věty se náš integrál rovná součtu residuí funkce $F(p)$ v polorovině $\operatorname{Re} p < \gamma$. Tato residua jsou v bodech $p = -2k - 1$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ Odtud již snadným výpočtem dostáváme: pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^{j-1}}{2j-1} I_1((2j-1)\,x) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{k!(k+1)!}\left[\zeta\left(-2k, \frac{1}{4}\right) - \zeta\left(-2k, \frac{3}{4}\right)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2x)^{2k+1}}{k!(k+1)!\,(2k+1)} B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right),$$

kde $B_{2k+1}(a)$ jsou Bernoulliho polynomy (které můžeme vypočítat na příklad podle bodu 8 věty 9).

Tato řada konverguje rychleji než geometrická řada o kvocientu $\dfrac{2x}{\pi}$, o čemž se snadno přesvědčíme, vyjádříme-li $[\zeta(-2k, \frac{1}{4}) - \zeta(-2k, \frac{3}{4})]$ pomocí výrazu $[\zeta(1 + 2k, \frac{1}{4}) - \zeta(1 + 2k, \frac{3}{4})]$. Výsledná řada tak konverguje mnohem rychleji než řada původní.

Příklad 7.

Stanovme součet řady

$$\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \frac{1}{9}\cos 3x + \ldots = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jx}{j^2},$$

kde $0 < x < 2\pi$. Této řadě bude odpovídat řada originálů

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jx\,t}{j^2},$$

které odpovídá řada obrazů

$$\sqrt{\pi}\, 2^{p-1} x^{-p} \frac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2}\right)} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2 + p},$$

která konverguje pro $\operatorname{Re} p > -1$ k funkci

$$F(p) = \sqrt{\pi}\, 2^{p-1} x^{-p} \frac{\Gamma\left(\dfrac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{p}{2}\right)} \zeta(2 + p).$$

Jest totiž

$$M(\cos t) = \sqrt{\pi}\, 2^{p-1} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)}, \quad 0 < \operatorname{Re} p < 1 .$$

Zkoumejme nyní podmínky věty 7. Podmínka 0 jest zřejmě splněna. Vzhledem k omezenosti funkce $f_n(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\cos jxt}{j^2}$ nezávisle na n je konvergence integrálu $\int_0^b f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1}\, dt$ v nule stejnoměrná, t. j. nezávislá na n. Stejnoměrnou konvergenci integrálů $\int_A^\infty f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1}\, dt$ zjistíme snadno z výrazu

$$\int_A^\infty f_n(t)\, t^{\operatorname{Re} p - 1}\, dt = \sum_{j=1}^{n} \frac{x^{-\operatorname{Re} p}}{j^{2 + \operatorname{Re} p}} \int_{jxA}^\infty \cos u \,.\, u^{\operatorname{Re} p - 1}\, du ,$$

který jest libovolně malý, bude-li A dostatečně velké. Podmínkám je tudíž vyhověno. Podle věty 6 je

$$f(t) = \frac{d}{dt} \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \sqrt{\pi}\, 2^{p-1} x^{-p} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2}\right)} \zeta(2 + p) \frac{t^{1-p}}{1 - p}\, dp ,$$

kde $0 < \gamma < 1$.

Zcela analogicky jako jsme to učinili v příkladě 6 zjistíme, že je-li $-\frac{3}{2} \leqq \operatorname{Re} p \leqq \gamma$, potom $|F(p)| \leqq K|p|^{\operatorname{Re} p - 1}$. Pro $\operatorname{Re} p \leqq -\frac{3}{2}$ užijeme funkcionální rovnice pro funkci $\zeta(s)$ uvedené ve větě 9. Dostaneme

$$\text{pro } -2 \leqq \operatorname{Re} p \leqq -\frac{3}{2}: \ |F(p)| \leqq K|p|^{-2} ,$$

$$\text{pro } -\frac{5}{2} \leqq \operatorname{Re} p \leqq -2: \ |F(p)| \leqq K|p|^{-3} \lg |p| ,$$

$$\text{pro } \operatorname{Re} p \leqq -\frac{5}{2}: \ |F(p)| \leqq K|p|^{-3} \left(\frac{2\pi}{x}\right)^{\operatorname{Re} p} ,$$

a tedy pro $0 < x < 2\pi$ můžeme vypočítat integrál residuovou větou. Jediné singularity $F(p)$ pro $\operatorname{Re} p \leqq \gamma$ (v konečnu) jsou póly prvního řádu v bodě $0, -1, -2$. Dostaneme tak

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos jx}{j^2} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\pi^2}{6} t - \frac{\pi}{4} x t^2 + \frac{x^2}{12} t^3\right)\right]_{t=1} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2} x + \frac{x^2}{4} .$$

Vzhledem ke spojitosti levé i pravé strany jest tato rovnost platná pro $0 \leqq x \leqq \leqq 2\pi$.

3. Některé theoretické otázky souvisící s předchozími oddíly

Tuto část věnujeme důkazům vět vyslovených v předchozích oddílech.

Důkaz věty 2.

Podmínka 1) jest nutná. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 takové, že $\left|\int_0^\infty f(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt} \,.\, dt - \int_0^\infty f_{n_0}(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Odtud plyne, že existuje A_0 takové, že pro $A \geqq \geqq A_0$ jest $\left|\int_0^A f(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt - \int_0^A f_{n_0}(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Tedy pro $B \geqq A \geqq A_0$ jest $\left|\int_A^B f(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt - \int_A^B f_{n_0}(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt} dt\right| < \varepsilon$.

Podmínka 2) jest nutná. Zvolme $\varepsilon > 0$. Existuje $A > 0$ tak, že $\left|\int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| < < \frac{1}{3}\varepsilon$. Nechť N je takové celé číslo, že pro $n \geqq N$ platí $\left|\int_0^A (f_n(t) - f(t))\, e^{-pt}\, dt\right| < < \frac{1}{3}\varepsilon$ a $\left|\int_0^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt - \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Potom pro $n \geqq N$ je $\left|\int_A^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt\right| = = \left|\int_0^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt - \int_0^A f_n(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt - \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt + \int_A^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| \leqq \leqq \left|\int_0^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt - \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| + \left|\int_0^A f_n(t)\, e^{-pt}\, dt - \int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| + \left|\int_A^\infty f(t)\, e^{-pt} dt\right| < < \varepsilon$.

Podmínky 1) a 2) jsou postačující. Zvolme $\varepsilon > 0$. Podle 1) existuje takové n_0 a A_0, že pro $A_0 \leqq A \leqq B$ je $\left|\int_A^B (f_{n_0}(t) - f(t))\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$. A_0 můžeme zvolit tak, že pro $A_0 \leqq A \leqq B$ je $\left|\int_A^B f_{n_0}(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt\right| < \frac{1}{2}\varepsilon$ a tudíž pro $A_0 \leqq A \leqq B$ je $\left|\int_A^B f(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt\right| < \varepsilon$. To tedy znamená, že existuje $\lim\limits_{A \to \infty} \int_0^A f(t)\, e^{-\operatorname{Re} pt}\, dt$ pro $\sigma < p = \operatorname{Re} p$.

Zvolme $\varepsilon > 0$. Nechť $\operatorname{Re} p > \sigma$. K tomuto $\varepsilon > 0$ existuje $A > 0$ a N tak, že $\left|\int_A^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| < \frac{1}{3}\varepsilon$ a pro $n \geqq N$ je $\left|\int_A^\infty f_n(t)\, e^{-pt}\, dt\right| < \frac{1}{3}\varepsilon$. N zvolme tak velké, že pro $n \geqq N$ je $\left|\int_0^A f_n(t)\, e^{-pt}\, dt - \int_0^A f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Pro $n \geqq N$ jest $\left|\int_0^\infty f_n(t)\, e^{-pt} \,.\, dt - \int_0^\infty f(t)\, e^{-pt}\, dt\right| < \varepsilon$. Tím je důkaz proveden.

Důkaz věty 6 až na tvrzení, že v bodech spojitosti t pro $0 < t < \infty$ funkce $f(t)$ platí $f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \lim\limits_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} F(p) \frac{t^{1-p}}{1-p} \mathrm{d}p$, kde $0 < \gamma < x_1$ a $\gamma < 1$ nalezne čtenář v [4].

Dokážeme toto tvrzení.

Vyjdeme ze známé skutečnosti (viz [3]), že jestliže $G(p) = \int\limits_0^\infty e^{-pt} g(t)\,\mathrm{d}t$ pro p tak, že $\operatorname{Re} p > \sigma$, potom je-li $\gamma > 0$, $\gamma > \sigma$, tu v bodech spojitosti $g(t)$ pro $0 \leqq t$ je $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \lim\limits_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{G(p)}{p} e^{pt}\,\mathrm{d}p = g(t)$, kde pro $t = 0$ rozumíme derivaci zprava. Je-li $t \leqq 0$, potom vyšetřovaný integrál jest $\equiv 0$.

Na integrál $\int\limits_0^\infty f(t)\, t^{p-1}\,\mathrm{d}t$ použijeme transformaci proměnných $e^{-x} = t$

$$\int\limits_0^\infty f(t)\, t^{p-1}\,\mathrm{d}t = -\int\limits_{\infty}^{-\infty} f(e^{-x})\, e^{-xp+x-x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(e^{-x})\, e^{-xp}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int\limits_0^\infty f(e^{-x})\, e^{-xp}\,\mathrm{d}x + \int\limits_0^\infty f(e^{u})\, e^{up}\,\mathrm{d}u\,.$$

Položme $f(e^{-x}) = \varphi(x)$, $f(e^x) = \psi(x)$ pro $0 \leqq x < \infty$ a dále

$$\varphi(x)\, e^{-x} = h(x) \qquad L\{h(x)\} = H(p)\,, \quad L\{k(x)\} = K(p)$$

$$\psi(x)\, e^{x} = k(x) \qquad L\{\varphi(x)\} = \Phi(p)\,, \quad L\{\psi(x)\} = \Psi(p)\,.$$

Podle poznámky výše učiněné je (ve všech bodech spojitosti pro $x \geqq 0$)

$$h(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{H(p)}{p} e^{px}\,\mathrm{d}p = \quad \text{kde} \quad \gamma > 0\,, \quad \gamma > x_0$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma + 1 - i\omega}^{\gamma + 1 + i\omega} \frac{\Phi(p)}{p-1} e^{(p-1)x}\,\mathrm{d}p =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{\Phi(p)}{p-1} e^{(p-1)x}\,\mathrm{d}p + \Phi(1) \right) \text{ je-li } \gamma < 1.$$

Položme $e^{-x} = t$. Pak máme

$$f(t)\, t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{\Phi(p)}{p-1} t^{1-p}\,\mathrm{d}p \right) t$$

a odtud dostáváme

$$f(t) = +\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\lim_{\omega \to \infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} \frac{\Phi(p)}{1-p} t^{1-p}\,\mathrm{d}p \right)$$

pro $0 < t \leqq 1$ (pro $t = 1$ uvažujeme derivaci zleva) a

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}\frac{\Phi(p)}{1-p}\,t^{1-p}\,\mathrm{d}p\right)$$ pro $1 \leqq t$ (pro $t = 1$ uvažujeme derivaci zprava).

Podobně dostáváme

$$k(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-i\omega}^{\gamma_1+i\omega}\frac{K(p)}{p}\,e^{px}\,\mathrm{d}p\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1-i\omega}^{\gamma_1+i\omega}\frac{\Psi(p-1)}{p}\,e^{px}\,\mathrm{d}p\right) =$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\gamma_1-i\omega}^{1-\gamma_1+i\omega}\frac{\Psi(-p)}{1-p}\,e^{(1-p)x}\,\mathrm{d}p\right).$$

Položíme-li $e^x = t$, dostaneme

$$f(t)\,t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{1-\gamma_1-i\omega}^{1-\gamma_1+i\omega}\frac{\Psi(-p)}{1-p}\,t^{1-p}\,\mathrm{d}p\right).\,t\,.$$

a tedy $f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ldots)$ pro $t \geqq 1$,

$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ldots)$ pro $t \leqq 1$.

Jest $0 < \gamma_1$, $1 - x_1 < \gamma_1$, tedy $1 - \gamma_1 < x_1$. Jestliže zvolíme $0 < \gamma < 1$ a $x_0 < \gamma < x_1$, potom $\gamma_1 = 1 - \gamma$ vyhovuje požadavkům pro γ_1 a je tudíž vzhledem k rovnosti

$$F(p) = \Phi(p) + \Psi(-p)$$

pro $0 < t < \infty$ ve všech bodech spojitosti $f(t)$:

$$f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}F(p)\,\frac{t^{1-p}}{1-p}\,\mathrm{d}p\,.$$

Důkaz věty 7 vyplyne z důkazu věty 2, transformujeme-li příslušné integrály podobně jako v důkazu věty 6.

LITERATURA

[1] *K. Knopp:* Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen. Springer, Berlin, 1925.

[2] *G. G. Macfarlane:* The Application of Mellin Transforms. Phil. Mag., 40 (1948), str. 188.

[3] *V. A. Ditkin - P. I. Kuzněcov:* Příručka operátorového počtu.

[4] *G. Doetsch:* Handbuch der Laplace-Transformation.

Резюме

СЛОЖЕНИЕ БЕСКОНЕЧНЫХ РЯДОВ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

ДАНИЕЛ МАЙЕР, ЙИНДРЖИХ НЕЧАС (Daniel Mayer, Jindřich Nečas)

(Поступило в редакцию 20/XII 1955 г.)

В статье описывается операторный метод сложения бесконечных сходящихся рядов. Простота и очень широкая область применения являются существенными выгодами этого метода.

Основная идея, на которой основан описываемый метод, видна при его применении на следующем примере, в котором слагается относительно сходящийся ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{1}$$

Находим такое изображение $F(p)$ в смысле преобразования Лапласа, чтобы $F(n) = \frac{1}{n}$. Это не трудно, так как известно, что $\int\limits_0^\infty 1 \,.\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}$. Ряд нужно понимать как сумму величин функций $F(p)$ для $p = 1, 2, \ldots$, с соответствующим знаком. Изобразим ряд (1) как сумму изображений в одной точке $p = 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F(1 + (n-1));$$

тогда соответствующее изображение будет $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} F(p + (n-1)) = G(p)$, где $G(p)$ есть изображение функций $g(t)$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int\limits_0^\infty g(t)\; e^{-t}\; dt\,, \tag{2}$$

$$L\{(-1)^{n-1}\; e^{-(n-1)t}\} = (-1)^{n-1} F(p + (n-1))$$

и сумме изображений отвечает сумма оригиналов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\; e^{-(n-1)t}\,.$$

Тогда задача суммирования ряда в данном случае сводится к нахождению интеграла (2). В настоящем случае имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-(n-1)t} = \frac{1}{1 + e^{-t}}\,,$$

и тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1+e^{t}}\, dt = \lg 2\,.$$

Условия для применения этого метода суммирования бесконечных рядов содержит теорема 2; в большинстве случаев можно обойтись более строгим условием, которое является достаточным, но не необходимым, о котором говорится в теореме 3: для $\mathrm{Re}\, p > \sigma$ сходятся интегралы $\int_0^{\infty} f_n(t)\, e^{-\mathrm{Re}\, pt}\, dt$ равномерно.

Помимо преобразования Лапласа можно аналогичным способом использовать преобразование Фурье.

Дальнейшая часть работы посвящена вопросам использования обратного преобразования Меллина.

Метод иллюстрируется рядом практических примеров.

Zusammenfassung

DAS ADDIEREN UNENDLICHER REIHEN UNTER BENÜTZUNG VON INTEGRALTRANSFORMATIONEN

DANIEL MAYER, JINDŘICH NEČAS

(Eingegangen am 20. Dezember 1955.)

Im Artikel ist die Operatorenmethode der Addition von unendlichen konvergenten Reihen beschrieben. Einfachheit und ein breites Applikationsgebiet sind wesentliche Vorteile dieser Methode.

Die Hauptidee, an welcher die beschriebene Methode beruht, ist aus dem folgenden Beispiele ersichtlich, in dem wir die relativ konvergente Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}. \tag{1}$$

addieren. Im Sinne der Laplace'schen Transformation suchen wir ein solches Bild $F(p)$, damit $F(n) = \frac{1}{n}$. Nachdem uns bekannt ist, dass $\int_0^{\infty} 1\, .\, e^{-pt}\, dt = \frac{1}{p}$, ist dies nicht beschwerlich. Die Reihe kann als Summe von Werten der Funktion $F(p)$ für $p = 1, 2, \ldots$, mit zugehörigen Abzeichen angesehen werden. Drücken wir die Reihe (1) als Summe der Bilder in einem Punkte $p = 1$ aus:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} F(1 + (n-1))\,.$$

Das zugehörige Bild ist also $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} F(p + (n - 1)) = G(p)$, wo $G(p)$ das Bild der Funktion $g(t)$ ist. Dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{\infty} g(t)\, e^{-t}\, dt\,, \tag{2}$$

$$L\,\{(-1)^{n-1}\, e^{-(n-1)t}\} = (-1)^{n-1} F(p + (n - 1))\,,$$

sodass der Summe der Bilder die Summe der Originale

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, e^{-(n-1)t}$$

entspricht. Im gegebenen Falle wird also die Addition der Reihe in die Berechnung des Integrals (2) überführt:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\, e^{-(n-1)t} = \frac{1}{1 + e^{-t}}\,,$$

und also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}\, dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + e^{t}}\, dt = \lg 2\,.$$

Die Applikation dieser Methode der Addition von unendlichen Reihen ist durch den Satz 2 bedingt. Vorwiegend reicht die folgende kräftigere, im Satz 3 behandelte Bedingung aus, die zwar ausreichend, jedoch nicht notwendig ist: für $\operatorname{Re} p > \sigma$ konvergieren die Integrale $\int\limits_0^{\infty} f_n(t)\, e^{-\operatorname{Re} p\, t}\, dt$ gleichmässig.

Ausser der Laplace'schen Transformation kann analogisch die Fourier'sche Transformation benutzt werden.

Im übrigen Teile des Artikels wird die Frage der Verwendung der Mellin'schen inversen Transformation behandelt.

Diese Methode wird durch eine Reihe von Beispielen illustriert.