Jindřich Nečas

Vliv vnější teploty na napjatost přehrad a jiných betonových masivů

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 3, 186–199

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102528

VLIV VNĚJŠÍ TEPLOTY NA NAPJATOST PŘEHRAD A JINÝCH BETONOVÝCH MASIVŮ

JINDŘICH NEČAS

(Pokračování.)

3. Matematický dodatek

V tomto paragrafu provedeme odvození formule (1), dokážeme o funkci $u(t, x)$, dané touto formulí, že je jediným řešením varianty 1. Dále ukážeme správnost formule (2). Podobně odvodíme formuli (8), dokážeme o ní, že je jediným řešením varianty (2). O správnosti vzorce (9) nás přesvědčí podobný postup jako v případě vzorce (2). Upozorňuji, že vzorec (1) je možno odvoditi i jiným způsobem a že je na př. obsažen v [10].

Methoda, jaké je užito při odvození formulí (1), (2), (8), (9), spočívá na užití Laplaceovy transformace. Pro jednoduchost v dalším klademe $a = 1$.

Definice 1. *Nechť funkce $v(t)$ je integrabilní v každém konečném intervalu z $\langle 0, \infty)$. (To znamená $\int_a^b |v(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$, kde $0 \leq a \leq b < \infty$.) Potom Laplaceovou transformací $V(p)$ funkce $v(t)$ nazýváme integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} v(t) \,\mathrm{d}t = \lim_{A \to \infty} \int_0^A \mathrm{e}^{-pt} \,.\, v(t) \,\mathrm{d}t$. p je komplexní číslo. $v(t)$ nazýváme originálem.*

Věta 1. *Nechť $v(t)$ je originálem $V(p)$. Nechť konverguje integrál $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-pt} v(t) \,\mathrm{d}t$ pro nějaké p_0. Potom konverguje i pro taková p, pro něž $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, p_0$. Funkce $V(p)$ je v polorovině $\mathrm{Re}\, p > \mathrm{Re}\, p_0$ holomorfní funkcí. (Jestliže $\int_0^\infty |v(t)| \,\mathrm{d}t < \infty$, potom $\lim_{|p| \to \infty} |V(p)| \to 0$, kde $\mathrm{Re}\, p_0 + \varepsilon \leq \mathrm{Re}\, p$, $0 < \varepsilon$.)*

Důkaz je obsažen na př. v [13].

Definice 2. *Buď M množina takových funkcí $u(t, x)$, že*

1. *existuje dvojice funkcí $p(x)$, $o(t)$ splňující podmínky varianty* 1. *tak, že $u(t, x)$ řeší variantu* 1. *za této okrajové a počáteční podmínky,*

2. *$u(t, x)$ je stejnoměrně omezená pro $x \geq 0$, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ pro $x > \varepsilon > 0$, ε libovolné.*

Množina M kromě 0 obsahuje netriviální prvky, na př. funkci (2).

Nechť $x > 0$ a $\mathrm{Re}\,p > 0$. Potom platí pro $u(t, x)$ z M:

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{\partial t}(t, x)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t = -u(0, x) + pU(p, x) =$$

$$= -p(x) + pU(p, x), \quad \int_0^\infty \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-pt}\, \mathrm{d}t = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

a proto dostáváme:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(p, x) - pU(p, x) + p(x) = 0\,, \tag{20}$$

$$\lim_{x \to \infty} U(p, x) = O(p)\,, \tag{21}$$

$$\lim_{x \to \infty} U(p, x) = 0\,. \tag{22}$$

Obecné řešení rovnice (20) je:

$$A(p)\, e^{\sqrt{p}\,.\,x} + B(p)\, e^{-\sqrt{p}x} + \frac{e^{\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_x^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}\,.\,s}\, \mathrm{d}s + \frac{e^{-\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_0^x p(s)\, e^{\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s\,. \tag{23}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_x^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s = 0\,,$$

neboť platí:

$$\left| \frac{e^{\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_x^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s \right| \leq \frac{e^{\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}x}}{2\sqrt{r}} \int_x^\infty \operatorname*{Max}_{x \leq s < \infty} |p(s)|\, e^{-\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}\,.\,s}\, \mathrm{d}s\,.$$

$\operatorname*{Max}_{x \leq s < \infty} |p(s)| \to 0$, jestliže $x \to \infty$ (klademe $p = re^{i\varphi}$).

$$\lim_{x \to \infty} \frac{e^{-\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_0^x p(s)\, e^{\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s = 0\,,$$

neboť platí:

$$\frac{e^{-\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_0^x p(s)\, e^{\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^x p(x - s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^A p(x - s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s + \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_A^x p(x - s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s\,,$$

kde $A > 0$. Je-li A dosti velké a $x \geq A$, potom

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_A^x p(x-s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

kde $\varepsilon > 0$ libovolné,

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^A p(x-s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pro dostatečně velké x, protože $\lim\limits_{x\to\infty} p(x) = 0$. Nechť nyní $U(p, x)$ je dáno rovnicí (23). Potom z podmínky (22) plyne $A(p) = 0$. Z podmínky (21) plyne

$$B(p) + \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s = O(p),$$

tedy

$$B(p) = O(p) - \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s\,. \tag{24}$$

K nalezení originálu výrazu (23), klademe-li tu $A(p) = 0$ a $B(p)$ z (24), použijeme dvou známých vět z theorie Laplaceovy transformace.

Věta 2. (Věta o konvoluci.) *Jestliže integrály* $F_1(p) = \int_0^\infty f_1(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *a* $F_2(p) = \int_0^\infty f_2(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konvergují absolutně pro* $\mathrm{Re}\, p > \sigma$, *potom* $F(p) = F_1(p) \,.\, F_2(p)$ *je Laplaceovým obrazem funkce* $f(t) = \int_0^t f_1(t-\xi)\, f_2(\xi)\, \mathrm{d}\xi$ *a integrál* $F(p) = \int_0^\infty f(t)\, \mathrm{e}^{-pt}\, \mathrm{d}t$ *konverguje pro* $\mathrm{Re}\, p > \sigma$ *absolutně.*

Důkaz najde čtenář v [13].

Věta 3. (Efrosova zobecněná věta o konvoluci.) *Nechť* $L(f(s)) = F(p)$ *a* $L(g(\xi, s)) = \omega(p)\, \mathrm{e}^{-\xi\psi(p)}$ *pro skoro všecka* $\xi \in \langle 0, \infty)$, *kde* $\omega(p)$ a $\psi(p)$ *jsou funkce nabývající komplexních hodnot proměnné* p. *Nechť konverguje ve smyslu Lebesgueově integrál* $\int_0^\infty \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\sigma s} g(\xi, s)\, f(\xi)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}s$ *pro reálné* σ. *Potom platí:*

$L(\int_0^\infty g(\xi, s)\, f(\xi)\, \mathrm{d}\xi) = \omega(p)\, F(\psi(p))$ *pro* $\mathrm{Re}\, p \geq \sigma$.

Důkaz viz [14].

Originál k $O(p)\, e^{-\sqrt{p}x}$ najdeme podle věty 2. Dostaneme:

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\, o(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Originál

$$\frac{e^{-\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_0^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s$$

zjistíme podle věty 3, položíme-li $\omega(p) = \dfrac{e^{-\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}}$, $\psi(p) = \sqrt{p}$, $F(p) = P(p)$.

Protože $L(\omega(p)\, e^{-\xi\sqrt{p}}) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi s}}\, e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4s}}$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|p(s)|}{\sqrt{s}}\, e^{-\sigma s}\, e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4s}}\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}\xi < \infty$$

pro $\sigma > 0$, tu

$$L\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi s}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+\xi)^2}{4s}}\, p(\xi)\, \mathrm{d}\xi\right) = \frac{e^{-\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_0^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s\,.$$

Při hledání originálu výrazu třetího z (23) dostaneme:

$$\frac{e^{\sqrt{p}x}}{2\sqrt{p}} \int_x^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}s} \mathrm{d}s = \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_x^\infty p(s)\, e^{-\sqrt{p}(s-x)}\, \mathrm{d}s = \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^\infty p(x+s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s\,.$$

Dále již postupujeme analogicky a dostaneme:

$$L\left(\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{\xi^2}{4t}}\, p(x+\xi)\, \mathrm{d}\xi\right) = \frac{1}{2\sqrt{p}} \int_0^\infty p(x+s)\, e^{-\sqrt{p}s}\, \mathrm{d}s\,.$$

Substitucí $x + \xi = u$ dostaneme:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_x^\infty e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}\, p(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

Originál výrazu čtvrtého z (23) dostaneme analogicky ve tvaru:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^x e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}}\, p(u)\, \mathrm{d}u\,.$$

Tím jsme dokázali větu:

Věta 4. *Jestliže $u(t, x)$ je v M, potom se dá vyjádřiti formulí (1).*

Není ovšem pravda, že každá funkce, řešící variantu 1, je obsažena v M. Položíme-li na př. ve vzorci (1) $o(t) = 0$ a $p(x) = n_0(x)$, tu $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, 1) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{t}}\right)$; lehce se přesvědčíme, že uvedená funkce řeší variantu 1. Z toho důvodu musíme o formuli (1) dokázati, že má vlastnosti, požadované ve variantě 1.

Přímým derivováním zjistíme, že je splněna rovnice pro vedení tepla. Zbývají toliko okrajové a počáteční podmínky. Nechť $t \to 0$ a $x \geq x_0 > 0$. Protože funkce $\frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-u)}}}{(t-u)^{\frac{3}{2}}}$ je omezená, je-li $0 \leq u < t$ dostáváme:

$$\lim_{t \to 0} \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-u)}}}{(t-u)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u \to 0 .$$

Druhý integrál v (1) upravme substitucemi: $\frac{u-x}{2\sqrt{t}} = s$ a $\frac{u+x}{2\sqrt{t}} = s$.

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x-u)^2}{4t}} p(u)\,\mathrm{d}u = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s + x)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s + x)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{t}s)\,\mathrm{d}s - \tag{25}$$

$$- \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{(x+u)^2}{4t}} p(u)\,\mathrm{d}u = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s - x)\,\mathrm{d}s . \tag{26}$$

Jestliže $t \to 0$, potom poslední integrál konverguje k nule. Integrály (25) konvergují k

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} p(x)\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s^2} p(x)\,\mathrm{d}s = p(x) .$$

Nechť nyní $x \to 0$ a $t \geq t_0 > 0$. $\frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-u)}}}{(t-u)^{\frac{3}{2}}} \mathrm{d}u$ po substituci $\frac{x}{2\sqrt{t-u}} = s$

dostane tvar:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^\infty e^{-s^2} o\left(t - \frac{x^2}{\sqrt{4s^2}}\right) \mathrm{d}s \tag{27}$$

a konverguje k $o(t)$, když $x \to 0$. Z (25) a (26) je vidět, že ostatní integrály konvergují k nule, když $x \to 0$.

Nechť nyní $x \to 0$ a $t \to 0$. Zvolme si $\varepsilon > 0$. K tomuto ε nalezněme číslo A tak, že erfc $A < \frac{\varepsilon}{10M}$, kde M je horní hranice absolutních hodnot $|o(t)|$ a $|p(x)|$. $u(t, x)$ upravme do tvaru následujícího pomocí výrazů (25), (26), (27):

$$u(t, x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} o\left(t - \frac{x^2}{4s^2}\right) ds + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s + x) ds +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{t}s) ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s - x) ds . \tag{28}$$

Množinu bodů $[t, x]$ rozdělme na dvě: $[t, x] \in M_1$ jestliže $\frac{x}{2\sqrt{t}} \geq A$, $[t, x] \in M_2$ jestliže $\frac{x}{2\sqrt{t}} < A$. Pro body $[t, x] \in M_1$ máme:

$$\left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} o\left(t - \frac{x^2}{4s^2}\right) ds \right| \leq M \operatorname{erfc} A \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s - x) ds \right| \leq 2M \operatorname{erfc} A \leq \frac{\varepsilon}{5}$$

a když $t \to 0$ a $x \to 0$, potom

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s + x) ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} p(0) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{t}s) ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} p(0) ds \right| \leq 2M \,.\, 2 \operatorname{erfc} A +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{10} \leq \frac{2\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{10} .$$

Tedy $|u(t, x) - p(0)| \leq \frac{9}{10}\varepsilon < \varepsilon$.

Jestliže $[t, x] \in M_2$ a $x \to 0$, $t \to 0$, potom

$$\left| \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} o\left(t - \frac{x^2}{4s^2}\right) ds - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} o(0) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{5} ,$$

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} p(2\sqrt{t}s + x) ds - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{\infty} e^{-s^2} p(0) ds \right| \leq \frac{\varepsilon}{10} ,$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\, p(x - 2\sqrt{ts})\,\mathrm{d}s - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\, p(0)\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{\varepsilon}{10},$$

$$\left|\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2} p(2\sqrt{ts} - x)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s} p(0)\,\mathrm{d}s\right| \leq \frac{\varepsilon}{10} + \frac{\varepsilon}{5}.$$

Protože $o(0) = p(0)$, dostáváme:

$$\left|u(t, x) - o(0)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s - p(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s - p(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s + \right.$$

$$\left. + p(0)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{x}{2\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-s^2}\,\mathrm{d}s\right| = |u(t, x) - p(0)| \leq \frac{8}{10}\varepsilon < \varepsilon.$$

Nechť nyní $x \to \infty$ a $t \in \langle 0, B\rangle$, kde $0 \leq B < \infty$. Budeme opět funkci $u(t, x)$ uvažovat napsanou ve tvaru (28). První, jakož i čtvrtý integrál konvergují stejnoměrně k nule. Protože $2\sqrt{ts} + x \geq x$ a $\lim_{x\to\infty} p(x) = 0$, tu při dostatečně velkém x druhý integrál nezávisle na t je libovolně blízký k nule. Třetí integrál se dá psáti:

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2\sqrt{t}}} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{ts})\,\mathrm{d}s = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{A} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{ts})\,\mathrm{d}s + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_A^{\infty} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{ts})\,\mathrm{d}s,$$

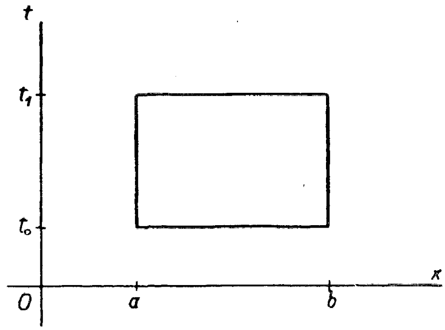
kde $0 < A$. Zvolme $\varepsilon > 0$. Potom jestliže A bude dosti velké, tu v případě $\frac{x}{2\sqrt{t}} \geq A$ bude poslední integrál v absolutní hodnotě $< \frac{\varepsilon}{2}$. Jestliže $x \geq 2A\sqrt{B}$, tu $\frac{x}{2\sqrt{t}} \geq A$. V integrálu $\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{A} e^{-s^2} p(x - 2\sqrt{ts})\,\mathrm{d}s$ je $x - 2\sqrt{ts} \geq x - 2\sqrt{t}A$. Tedy i tento integrál konverguje k nule. Tím jsme dokázali

Větu 5. *Formule* (1) *řeší variantu* 1.

Zbývá ještě dokázati unicitu.

Věta 6. (Věta o maximu a minimu.) *Buďte dány tři spojité funkce $p(x)$, $o_1(t)$, $o_2(t)$. $p(x)$ v konečném intervalu $\langle a, b\rangle$, $o_1(t)$ a $o_2(t)$ v konečném intervalu $\langle t_0, t_1\rangle$. Nechť $p(a) = o_1(t_0)$, $p(b) = o_2(t_0)$. Potom funkce $u(t, x)$, řešící rovnici pro vedení* *tepla, spojitě prodlužitelná na okraj intervalu* $\langle t_0, t_1\rangle \times \langle a, b\rangle$ *a splňující tyto podmínky*: $u(t, a) = o_1(t)$, $u(t, b) = o_2(t)$, $u(0, x) = p(x)$, *nabývá svého maxima buď na základně definičního obdélníku, nebo na boční straně.*

Důkaz viz [14].



Obr. 1. Definiční obdélník.

Dokážeme nyní unicitu v našem případě. Buďte u_1 a u_2 dvě řešení varianty 1. (Pro stejnou okrajovou a počáteční podmínku.) $u = u_1 - u_2$ řeší variantu 1 s okrajovou podmínkou $o(t) = 0$ a $p(x) = 0$. Kdyby $u(t_0, x_0) \neq 0$ pro nějaké $t_0 > 0$, $x_0 > 0$, potom by hodnota $u(t_0, x_0)$ byla dosažena na všech úsečkách $x \geq x_0$, $0 \leq t \leq t_0 + 1$. To ovšem není možné, neboť $\lim\limits_{x\to\infty} u(t, x) = 0$ stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle 0, t_0 + 1\rangle$. Tím jsme dokázali

Větu 7. *Formule* (1) *dává jediné řešení varianty* 1.

Důkaz formule (8) se děje prakticky krok za krokem stejně jako v případě formule (1). Poněkud odlišný bude důkaz jednoznačnosti varianty 2.

Předpokládejme, že existují dvě různá řešení varianty 2, u_1 a u_2. Označme $u = u_1 - u_2$. Potom existuje $T > 0$ tak, že v intervalu $I = 0 \leq t \leq T \times \times\ 0 \leq x < \infty$ je $m = \min\limits_{[t,x]\in I} u(t, x) < \max\limits_{[t,x]\in I} u(t, x) = M$. $M \leq 0$, neboť kdyby $M > 0$, potom by hodnotu M funkce $u(t, x)$ nabývala pro $x = 0$, $0 < t \leq T_1$. Protože $\frac{\alpha}{\lambda} > 0$, je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} M > 0$, což není možné. Odtud plyne, že $m < 0$. Hodnotu m nabývá funkce $u(t, x)$ pro $0 < t < \infty$, $x = 0$. Je $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} m < 0$, což není možné. Dokázali jsme tak

Větu 8. *Formule* (8) *dává jediné řešení varianty* 2.

Poznamenejme, že jestliže $p(x)$ má omezenou spojitou derivaci v $\langle 0, \infty)$ a $p'(0) = \frac{\alpha}{\lambda}(p(0) - o(0))$, potom Newtonova podmínka $\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\alpha}{\lambda}(u(t, 0) - - o(t))$ je splněna pro $t \geq 0$.

Závěrem dokažme asymptotickou formuli (2). Předně z rovnice (22) je patrno, že jestliže $t \to \infty$, potom integrály obsahující $p(x)$ vymizí. Jde tedy o to asymptoticky vyjádřiti integrál

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4(t-u)}}}{(t-u)^{\frac{3}{2}}} \sin \omega u \, du =$$

$$= \frac{x}{2\sqrt{\pi}} \left(\sin \omega t \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4u}}}{u^{\frac{3}{2}}} \cos \omega u \, du - \cos \omega t \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2}{4u}}}{u^{\frac{3}{2}}} \sin \omega u \, du \right). \tag{28}$$

Funkci $v(t, x)$ dostaneme, jestliže v (28) horní mez t nahradíme symbolem ∞. Integrál

$$\frac{x}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{x^2}{4\tau}}}{\tau^{\frac{3}{2}}} e^{i\omega\tau} \, d\tau \tag{29}$$

však snadno vypočteme. Udělejme v něm substituci $\dfrac{x^2}{4\tau} = u^2$. Dostaneme:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 + \frac{i\alpha}{u^2}} du \,, \quad \text{kde} \quad \alpha = \frac{\omega x^2}{4}.$$

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-u^2 + \frac{i\alpha}{u^2}} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-s + \frac{i\alpha}{s}} \frac{ds}{\sqrt{s}}.$$

Ve slovníku operátorového počtu najdeme vzorce: $\dfrac{1}{\sqrt{\pi s}} e^{i\frac{1}{2s}}$ je originál výrazu $\dfrac{e^{\sqrt{p}(i-1)}}{\sqrt{p}}$. Důkaz tohoto vzorce čtenář najde ve zmíněné knize Lavrentěva a Šabata. Po jednoduchých transformacích (nebo užitím gramatiky operátorového počtu) dostaneme: $\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{s}}}{\sqrt{\pi s}}$ je originálem výrazu: $\dfrac{e^{\sqrt{2\alpha}\,.\,\sqrt{p}\,.(i-1)}}{\sqrt{p}}$. Obrazem originálu $\dfrac{e^{i\frac{\alpha}{s}}}{\sqrt{\pi s}} e^{-s}$ je $\dfrac{e^{\sqrt{2\alpha}\sqrt{p+1}(i-1)}}{\sqrt{p+1}}$. Jestliže $p \to 0$, potom obraz konverguje k integrálu (29). Snadno se přesvědčíme, že dostaneme: $e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}x}\left(\cos \sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\, x + \right.$ $\left. + \, i \sin \sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\, x\right)$. Odtud již lehce plyne výsledek.

LITERATURA

[1] *П. И. Василев:* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Известия Всесоюзного Научно-Исследовательского Института Гидротехники имени Б. Е. Веденеева (ИВНИИГ) — sv. 47, roč. 1952, str. 17—102.

[2] *П. И. Василев:* Приближенный способ учота деформаций ползучести при определении температурных напряжений в бетонных массивных плитах. ИВНИИГ — sv. 47, roč. 1952, str. 120—128.

[3] *С. Г. Гутман:* Определение тепловых напряжений при гармонических колебаниях термпературы. ИВНИИГ — sv. 47, roč. 1952, str. 72—102.

[4] *А. В. Белов:* К определению температурных напряжений в бетонных плитах с учотом экзотермии и теплоизоляции при переменной температуре окружающей среды. sv. 47, roč. 1952.

[5] *B. Hampe:* Temperaturschäden im Beton im besonderen im Massenbeton und Massnahmen zu ihrer Verhüttung.

[6] *K. Hirschfeld:* Die Temperaturverteilung in Beton. (Berlin 1948.)

[7] *Н. Х. Арутюнян:* Некоторые вопросы теории ползучести.

[8] Schweizerische Talsperrenkommission: Messungen, Beobachtungen und Versuche an schweizerischen Talsperren 1919—1945.

[9] Matematické tabulky (Technický průvodce sv. 19).

[10] *Mirosław Krzyżański:* Równania liniowe o pochodnych cząstkowych drugiego rzędu.

[11] *Л. С. Лейбензон:* Курс теории упругости.

[12] *М. А. Лаврентьев-Б. В. Шабат:* Методы теории функций комплексного переменного.

[13] *P. I. Kuzněcov-V. A. Ditkin:* Příručka operátorového počtu.

[14] *I. G. Petrovskij:* Parciální diferenciální rovnice.

Резюме

ВЛИЯНИЕ ВНЕШНЕЙ ТЕМПЕРАТУРЫ НА НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ПЛОТИН И ДРУГИХ БЕТОННЫХ МАССИВОВ

ЙИНДРЖИХ НЕЧАС (Jindřich Nečas)

(Поступило в редакцию 1/XI 1955 г.)

В работе дается метод расчета тепловых напряжений в гравитационных плотинах, возникших вследствие перемен внешней температуры.

Заменив плотину полупространством, нетрудно вывести формулы для распределения температуры в плотине как для установившегося, так и для неустановившегося состояния. Принимаются во внимание различные типы краевых условий. Иллюстрация формул на примерах преследует главную цель: расчет напряженного состояния, возникшего под влиянием нагревания.

В результате получаются формулы, дающие распределение температуры, в следующем виде:

$$u(t, x) = \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} o(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}} - e^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}}\right) p(\tau)\,\mathrm{d}\tau$$

причем $u(t, 0) = o(t)$, $u(0, x) = p(x)$, где $o(t)$ — температура внешней среды ($t \geq 0$ и означает время), $p(x)$ — начальная температура ($x \geq 0$ и означает расстояние от лицевной плоскости плотины), $a = \frac{c\varrho}{\lambda}$.

$$u(t, x) = \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} o(\tau)\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \frac{e^{\frac{x\alpha}{\lambda}}}{a} \int_0^t \mathrm{e}^{\frac{\alpha^2(t-\tau)}{\lambda^2 a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{a}}\right) o(\tau)\,\mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(\mathrm{e}^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}} + \mathrm{e}^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}}\right) p(\tau)\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{\alpha}{\lambda} e^{\frac{\alpha^2 t}{\lambda^2 a}} \int_0^\infty \mathrm{e}^{\frac{\alpha}{\lambda}(x+\tau)} \operatorname{erfc}\left(\frac{(x+\tau)\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} + \frac{\alpha}{\lambda} \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a}}\right) p(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

причем

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, 0) = \frac{\alpha}{\lambda}(u(t, 0) - o(t)).$$

Если $o(t) = \sin \omega t$, то установившееся состояние дано формулами

$$v(t, x) = e^{-\sqrt{\frac{a\omega}{2}}x} \sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{a\omega}{2}}\right)$$

в первом случае, и

$$v(t, x) = \frac{\alpha}{\lambda} e^{-\sqrt{\frac{a\omega}{2}}x} \left(\frac{\sqrt{\frac{a\omega}{2}} + \frac{\alpha}{\lambda}}{\mu} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{a\omega}{2}}x\right) - \frac{\sqrt{\frac{a\omega}{2}}}{\mu} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{a\omega}{2}}x\right)\right)$$

во втором случае.

$$\left(\mu = a\omega + \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\alpha}{\lambda}\sqrt{2a\omega}\right)$$

Тензор напряжений, соответствующий упругой деформации, дан формулами

$$\sigma_x^e = \tau_{yz}^e = \tau_{zx}^e = \tau_{xy}^e = 0\,, \quad \sigma_y^e = \sigma_z^e = -E\gamma u(t, x)\,.$$

Тензор напряжений, вычисленный с учетом ползучести бетона имеет вид

$$\sigma_x(t) = R(t, \tau)\, \sigma_x^e(\tau) + \int_\tau^t R(t, s) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\, \sigma_x^e(s)\, \mathrm{d}s\,,$$

аналогично и для остальных координат тензора. Здесь $R(t, s)$ — релаксационная кривая, равная $\frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2r(t-s)})$. Для $o(t) = \sin\, \omega t$ асимптотический тензор дан в первом случае выражениями $\sigma_x = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0$,

$$\sigma_y = \sigma_z = -\frac{E\gamma}{2} e^{-\Omega x}\left[\left(1 + \frac{\omega^2}{4r^2 + \omega^2}\right) \sin\, (\omega t - \Omega x) + \frac{2r\omega}{4r^2 + \omega^2} \cos\, (\omega t - \Omega x)\right],$$

где $\Omega = \sqrt{\frac{a\omega}{2}}$, E — модуль упругости, и γ — коэффициент теплового расширения.

В математическом добавлении дан строгий вывод формул, касающихся распределения температуры, проведенный по методу преобразования Лапласа.

Résumé

L'INFLUENCE DE LA TEMPÉRATURE EXTÉRIEURE SUR LA TENSION DANS LES BARRAGES ET AUTRES MASSIFS DE BÉTON

JINDŘICH NEČAS

(Reçu le 1er Novembre 1955.)

On donne dans ce travail une méthode de calcul des tensions de chaleur dans les barrages-poids dues aux changements de température extérieure. En substituant un demiespace au barrage, on déduit les formules pour la distribution de la température dans le barrage et cela aussi bien pour l'état stationnaire comme pour l'état nonstationnaire. On tient compte de conditions marginales de différentes espèces. L'illustration de ces formules par des exemples poursuit le but principal qui est de déterminer les tensions dues a l'échauffement. Les formules finales donnant la distribution de la température sont:

$$u(t, x) = \frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}}\, o(\tau)\, \mathrm{d}\tau + \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}} - e^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}}\right) p(\tau)\, \mathrm{d}\tau$$

où $u(t, 0) = o(t)$, $u(0, x) = p(x)$, $o(t)$ étant la température du milieu extérieur ($t \geq 0$ signifie le temps). $p(x)$ est la température initiale ($x \geq 0$ signifie la distance mesurée du bord du barrage), $a = \frac{c\varrho}{\lambda}$.

$$u(t,x) = \frac{\alpha}{\lambda\sqrt{a\pi}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 a}{4(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}}\, o(\tau)\, \mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{\alpha^2}{\lambda^2} \frac{e^{\frac{x\alpha}{\lambda}}}{a} \int_0^t e^{\frac{\alpha^2(t-\tau)}{\lambda^2 a}} \operatorname{erfc}\left(\frac{x\sqrt{a}}{2\sqrt{t-\tau}} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\sqrt{t-\tau}}{\sqrt{a}}\right) o(\tau)\, \mathrm{d}\tau +$$

$$+ \frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty \left(e^{-\frac{(x+\tau)^2 a}{4t}} + e^{-\frac{(x-\tau)^2 a}{4t}}\right) p(\tau)\, \mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{\alpha}{\lambda}\, e^{\frac{\alpha^2 t}{\lambda^2 a}} \int_0^\infty e^{\frac{\alpha}{\lambda}(x+\tau)} \operatorname{erfc}\left(\frac{(x+\tau)\sqrt{a}}{2\sqrt{t}} + \frac{\alpha}{\lambda}\frac{\sqrt{t}}{\sqrt{a}}\right) p(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,,$$

où $\dfrac{\partial u}{\partial x}(t,0) = \dfrac{\alpha}{\lambda}(u(t,0) - o(t))$.

Si $o(t) = \sin \omega t$, alors l'état stationnaire est déterminé par les formules

$$v(t,x) = e^{-\sqrt{\frac{a\omega}{2}}\,x} \sin\left(\omega t - x\sqrt{\frac{a\omega}{2}}\right)$$

dans le premier cas, et par

$$v(t,x) = \frac{\alpha}{\lambda}\, e^{-\sqrt{\frac{a\omega}{2}}\,x} \left(\frac{\sqrt{\frac{a\omega}{2}} + \frac{\alpha}{\lambda}}{\mu} \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{a\omega}{2}}\,x\right) - \frac{\sqrt{\frac{a\omega}{2}}}{\mu} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{a\omega}{2}}\,x\right)\right)$$

dans le second cas $\left(\mu = a\omega + \dfrac{\alpha^2}{\lambda^2} + \dfrac{\alpha}{\lambda}\sqrt{2a\omega}\right)$.

Le tenseur de tension correspondant à la déformation élastique est donné par

$$\sigma_x^e = \tau_{yz}^e = \tau_{zx}^e = \tau_{xy}^e = 0\,, \quad \sigma_y^e = \sigma_z^e = -E\gamma u(t,x)\,.$$

Le tenseur de tension calculé en tenant compte du fluage du béton est

$$\sigma_x(t) = R(t,\tau)\,\sigma_x^e(\tau) + \int_\tau^t R(t,s)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sigma_x^e(s)\,\mathrm{d}s$$

avec des formules analogues valables pour les autres coordonnées du tenseur. Ici $R(t,s)$ est la courbe de relaxation qui est égale à $\frac{1}{2}(1 + e^{-2r(t-s)})$. Pour $o(t) = \sin \omega t$, le tenseur asymptotique est, dans le premier cas, donné par les expressions

$$\sigma_x = \tau_{yz} = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0\,,$$

$$\sigma_y = \sigma_z = -\frac{E\gamma}{2}\, e^{-\Omega x}\left[\left(1 + \frac{\omega^2}{4r^2+\omega^2}\right)\sin(\omega t - \Omega x) + \right.$$

$$\left. + \frac{2r\omega}{4r^2+\omega^2}\cos(\omega t - \Omega x)\right]$$

où $\Omega = \sqrt{\frac{a\omega}{2}}$, E est le module d'élasticité et γ le coefficient de dilatation.

Les formules concernant la distribution de la température sont déduites d'une façon rigoureuse, par la méthode de la transformation de Laplace, dans l'appendice mathématique.