Vratislav Horálek

Operativní charakteristika přejímky jedním výměrem při kontrole několika jakostních vlastností na jednom výrobku

Aplikace matematiky, Vol. 1 (1956), No. 6, 431–444

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102544

OPERATIVNÍ CHARAKTERISTIKA PŘEJÍMKY JEDNÍM VÝBĚREM PŘI KONTROLE NĚKOLIKA JAKOSTNÍCH VLASTNOSTÍ NA JEDNOM VÝROBKU

VRATISLAV HORÁLEK

(Došlo dne 12. ledna 1956.) DT: 330.655

V článku jsou odvozeny rovnice pro výpočet dolní a horní hranice pásma, v němž leží výsledná operativní charakteristika příslušná kontrolnímu postupu, kdy pro každou jakostní vlastnost (skupinu vlastností) je předepsán samostatný přejímací postup. Řešení je podáno pro případ přejímky jedním výběrem za předpokladu, že uvažované vlastnosti (skupiny) jsou vzájemně nezávislé.

Úvod

Dobré výsledky dosažené při zavádění statistických přejímacích způsobů v technických kontrolách některých strojírenských závodů způsobily v poslední době značné rozšíření těchto metod v úseku činnosti nejen technických kontrol, ale i normalisačních útvarů. Důkazem toho je jednak stále rostoucí zájem závodů o tyto nové metody, obzvláště nyní, kdy zvyšování výrobních plánů a rozšiřování kooperace je současně provázeno snahou o zhospodárnění a zkvalitnění práce technických kontrol, a jednak úsilí „Úřadu pro normalisaci" nahradit, pokud možno v nejkratší době, dosavadní přejímací způsoby v čs. normách a technických podmínkách, které neposkytují pevné jakostní záruky, statistickými výběrovými přejímacími způsoby.

Velmi málo pozornosti se dosud věnovalo statistickým přejímacím způsobům výrobků, na nichž je prováděna kontrola více jakostních vlastností. Pokud je autorovi tohoto článku známo, jedinou uveřejněnou prací řešící částečně tento problém je článek LIEBERMANNŮV [1], který však obsahuje pouze důkaz shodnosti operativní charakteristiky kontrolního způsobu, při němž každý výrobek je kontrolován současně vzhledem ke všem jakostním vlastnostem a operativní charakteristiky kontrolního způsobu, při němž pro kontrolu každé vlastnosti je učiněn výběr stejného rozsahu a celková jakost dodávky je posuzována podle celkového počtu vyřazených výrobků po provedených kontrolách všech jakostních vlastností. Důkaz je podán pro přejímku jedním výběrem za předpokladu vzájemné nezávislosti jednotlivých kontrolovaných vlastností případně skupin těchto vlastností.

S hlediska výše kontrolních nákladů je však hospodárnější provádět samostatné přejímací zkoušky pro jednotlivé kontrolované vlastnosti případně skupiny těchto vlastností, neboť při zamítnutí dodávky může být omezena stoprocentní kontrola pouze na vlastnosti, které na základě výsledku kontroly se ukázaly jakostně nevyhovujícími. V praxi většinou volíme pro kontrolu všech k sledovaných jakostních vlastností (skupin) stejný rozsah výběru n a rozdílnost v jakostních požadavcích vyjadřujeme odstupňováním přejímacích čísel c_l ($l = 1, 2, \ldots, k$). Stanovení výsledné operativní charakteristiky příslušné tomuto kontrolnímu způsobu za předpokladu, že jednotlivé kontrolované jakostní vlastnosti (skupiny) jsou vzájemně nezávislé, je obsaženo v tomto článku.

1. Stanovení výsledné operativní charakteristiky

Nechť pro kontrolu každé z k kontrolovaných jakostních vlastností nebo skupin těchto vlastností, které jsou vzájemně nezávislé, je předepsán přejímací postup (n, c_l) — $l = 1, 2, \ldots, k$ —, kde $n > 0$ je velikost výběru a $c_l \geqq 0$ příslušný přípustný počet zmetků ve výběru.

Nechť p $(0 \leqq p \leqq 1)$ je celkový podíl vadných výrobků v dodávce a $q = 1 - p$ je celkový podíl dobrých výrobků v dodávce. Podobně nechť p_l $(0 \leqq p_l \leqq 1)$ — $l = 1, 2, \ldots, k$ — je podíl výrobků vadných vzhledem k l-té kontrolované jakostní vlastnosti v dodávce a $q_l = 1 - p_l$ je podíl výrobků dobrých vzhledem k l-té kontrolované jakostní vlastnosti v dodávce.

Nechť ξ je náhodná proměnná, která nabývá hodnot počtu vadných výrobků ve výběru a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ vzájemně nezávislé náhodné proměnné, při čemž ξ_l ($l = 1, 2, \ldots, k$) nabývá hodnot počtu vadných výrobků vzhledem k l-té kontrolované jakostní vlastnosti ve výběru.

Označme nyní $A(n, j)$ jev, kdy v náhodném výběru n výrobků je právě j vadných, t. j. kdy $\xi = j$, a $\mathsf{P}[A(n, j)]$ pravděpodobnost tohoto jevu. Podobně označme $A_l(n, j)$ — $l = 1, 2, \ldots, k$ — jev, kdy v náhodném výběru n výrobků je právě j vadných vzhledem k l-té kontrolované jakostní vlastnosti, t. j. kdy $\xi_l = j$, a $\mathsf{P}[A_l(n, j)]$ příslušnou pravděpodobnost.

Je tedy $\bigcup_{j=0}^{c} A(n, j)$ jev, kdy v náhodném výběru n výrobků je c nebo méně vadných, t. j. kdy $\xi \leqq c$, a $\mathsf{P}[\bigcup_{j=0}^{c} A(n, j)]$ pravděpodobnost tohoto jevu a analogicky $\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j)$ — $l = 1, 2, \ldots, k$ — je jev, kdy v náhodném výběru n výrobků je c_l nebo méně vadných vzhledem k l-té kontrolované jakostní vlastnosti, t. j. kdy $\xi_l \leq c_l$, a $\mathsf{P}[\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j)]$ příslušná pravděpodobnost.

Vzhledem k tomu bude tedy $A(1, 0)$ jev, kdy náhodně vybraný výrobek je dobrý a $A_l(1, 0)$ — $l = 1, 2, \ldots, k$ — jev, kdy náhodně vybraný výrobek bude dobrý vzhledem k l-té kontrolované jakostní vlastnosti, a $\mathsf{P}[A(1, 0)]$ resp. $\mathsf{P}[A_l(1, 0)]$ pravděpodobnosti těchto jevů.

Zřejmě za předpokladu vzájemné nezávislosti jevů A_l, A_2, ..., A_k bude

$$\mathsf{P}[A(1, 0)] = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}[A_l(1, 0)\,.$$

Poněvadž je

$$\mathsf{P}[A(1, 0)] = q$$

a

$$\mathsf{P}[A_l(1, 0)] = q_l,\, l = 1, 2, \ldots, k\,,$$

platí vzhledem k výše uvedené rovnici pro pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude dobrý,

$$q = \prod_{l=1}^{k} q_l \tag{1}$$

a odtud pro pravděpodobnost, že náhodně vybraný výrobek bude vadný,

$$p = 1 - \prod_{l=1}^{k} (1 - p_l)\,. \tag{2}$$

Abychom mohli získat informaci o celkové záruce jakosti dodávky při použití popsaného kontrolního způsobu, hledejme výslednou operativní charakteristiku, příslušnou přejímacím postupům (n, c_l) — $l = 1, 2, \ldots, k$ —, a označme ji $L^*(p)$.

Vzhledem k zavedenému označení bude $\bigcap_{l=1}^{k} [\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l\,(n,j)]$ jev, kdy $\xi_l \leq c_l$ pro všechna l ($l = 1, 2, \ldots, k$), a pro pravděpodobnost tohoto jevu $\mathsf{P}\{\bigcap_{l=1}^{k} [\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j.)]\}$ bude za předpokladu vzájemné nezávislosti jevů $\bigcup_{j=0}^{c_l} A_1$, $\bigcup_{j=0}^{c_l} A_2, \ldots, \bigcup_{j=0}^{c_k} A_k$ platit, že

$$\mathsf{P}\{\bigcap_{l=1}^{k} [\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j)]\} = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}[\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j)]\,. \tag{3}$$

Pišme nyní

$$\mathsf{P}[\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j)] = \mathsf{P}(\xi_l \leq c_l \mid p_l, n) \tag{4}$$

pro $l = 1, 2, \ldots, k$.

Poněvadž je

$$\mathsf{P}\{\bigcap_{l=1}^{k}[\bigcup_{c=0}^{c_l} A_l(n, j)]\} = L^*(p)\,, \tag{5}$$

můžeme vztah (3) přepsat ve tvaru

$$L^*(p) = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid p_l, n)\,, \tag{6}$$

kde $p, p_1, p_2, \ldots, p_k$ jsou vázány vztahem (2).

Předpokládejme, že rozsah dodávky N je velký ve srovnání s rozsahem výběru n. Pak je

$$\mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid p_l, n) = \sum_{j=0}^{c_l} \binom{n}{j} p_l^j q^{n-j} \tag{7}$$

pro $l = 1, 2, \ldots, k$ a

$$L^*(p) = \prod_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{c_l} \binom{n}{j} p_l^j q_l^{n-j}\,, \tag{8}$$

kde opět podle vztahu (2) je $p = 1 - \prod_{l=1}^{k} (1 - p_l)$.

Poněvadž hodnoty podílů p_l — $l = 1, 2, \ldots, k$ — je nutno považovat za neznámé, je možno výslednou operativní charakteristiku stanovit — za předpokladu vzájemné nezávislosti jednotlivých kontrolovaných jakostních vlastností — pouze pásmem, jehož horní hranici tvoří operativní charakteristika $L_H^*(p)$ a dolní hranici operativní charakteristika $L_D^*(p)$.

Stanovení operativní charakteristiky $L_H^*(p)$. Uvažujme náhodnou proměnnou ξ a k vzájemně nezávislých náhodných proměnných $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$, které jsou definovány na začátku odst. 1.

Poněvadž celkový počet vadných výrobků ve výběru je nejvýše roven součtu vadných výrobků vzhledem k jednotlivým kontrolovaným jakostním vlastnostem, jsou uvedené náhodné proměnné vázány vztahem

$$\xi \leqq \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k\,,$$

kde znaménko rovnosti platí pouze tehdy, když každý vadný výrobek vyřazený kontrolou bude vadný pouze vzhledem k jedné kontrolované jakostní vlastnosti.

Jak již bylo uvedeno, aby dodávka byla jakostně vyhovující, musí platit $\xi_l \leqq c_l$ pro všechna l ($l = 1, 2, \ldots, k$). Zřejmě pak krajní případ, který se může při nejhorším vyskytnout a který zahrnuje ještě přípustný počet vadných výrobků ve výběru, aby dodávka byla přijata, je případ

$$\xi = c_s\,,$$

značíme-li $\sum_{l=1}^{k} c_l = c_s$.

Pro horní hranici $L_H^*(p)$ pásma, v němž leží výsledná operativní charakteristika $L^*(p)$, bude zřejmě platit podle pravidla o pravděpodobnostech implikujících se jevů

$$L_H^*(p) = \mathsf{P}[\bigcup_{j=0}^{c_s} A(n, j)] \geq \mathsf{P}\{\bigcap_{l=1}^{k} [\bigcup_{j=0}^{c_l} A_l(n, j)]\} . \tag{9}$$

Píšeme-li

$$\mathsf{P}[\bigcup_{j=0}^{c_s} A(n, j)] = \mathsf{P}(\xi \leq c_s \mid p, n) ,$$

můžeme za předpokladů uvedených na začátku odst. 1. vztah (9) přepsat ve tvaru

$$L_H^*(p) = \mathsf{P}(\xi \leq c_s \mid p, n) = \sum_{j=0}^{c_s} \binom{n}{j} p^j q^{n-j} \geq L^*(p) . \tag{10}$$

Poněvadž $L_H^*(p)$ nezávisí na jednotlivých hodnotách c_l, ale jen na jejich součtu c_s, jehož velikost určují pochopitelně pouze hodnoty $c_l > 0$, je $L_H^*(p)$ pro $k - k'$ jakostních vlastností, pro jejichž kontrolu jsou předepsány přejímací postupy (n, c_l) — $c_l > 0$, $l = 1, 2, \ldots, k - k'$ — totožná s $L_H^*(p)$ pro k jakostních vlastností, pro jejichž kontrolu jsou předepsány přejímací postupy (n, c_l) takové, že je $c_l > 0$ pro $l = 1, 2, \ldots, k - k'$ a $c_{k-k'+1} = c_{k-k'+2} = \ldots = c_k = 0$.

Stanovení operativní chrakteristiky $L_D^*(p)$. Podle vztahu (6) pro výslednou operativní charakteristiku $L^*(p)$ platí

$$L^*(p) = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leq c_l \mid p_l, n) , \tag{6}$$

kde podle vztahu (2)

$$p = 1 - \prod_{l=1}^{k} (1 - p_l) .$$

Označíme-li nyní zkráceně

$$\prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leq c_l \mid p_l, n) = f(p_1, p_2, \ldots, p_k) = u , \tag{11}$$

potom dolní hranice $L_D^*(p)$ pásma, v němž bude ležet výsledná operativní charakteristika $L^*(p)$, při neznámých hodnotách podílů $p_1, p_2, \ldots, p_k$

$$L_D^*(p) = \min [f(p_1, p_2, \ldots, p_k)] , \tag{12}$$

kde proměnné $p_1, p_2, \ldots, p_k$, podle nichž se minimum ve vztahu (12) určuje, jsou vázány vedlejší podmínkou (2), kterou napíšeme ve tvaru

$$\varphi(p_1, p_2, \ldots, p_k) = 1 - \prod_{l=1}^{k} (1 - p_l) - p = 0 . \tag{13}$$

Kromě toho musí být ovšem splněny nerovnosti $0 \leqq p_l \leqq 1 - l = 1, 2, \ldots, k$.

Pro usnadnění dalších početních operací proveďme v rovnici (11) a (13) substituci $p = 1 - q$ a $p_l = 1 - q_l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$. Tím dostáváme

$$L_p^*(q) = \min\,[f(q_1, q_2, \ldots, q_k)] \tag{14}$$

a

$$\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k) = q - \prod_{l=1}^{k} q_l = 0\,. \tag{15}$$

Abychom nyní stanovili extrémní hodnotu funkce $u = f(q_1, q_2, \ldots, q_k)$, jejíž proměnné splňují rovnici $\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k) = 0$, připojíme k dané funkci f pomocí parametru λ funkci φ a derivujeme funkci takto vzniklou

$$z = f(q_1, q_2, \ldots, q_k) + \lambda\,.\,\varphi(q_1, q_2, \ldots, q_k) \tag{16}$$

podle proměnných $q_1, q_2, \ldots, q_k$ a položíme tyto derivace rovny nule. Z rovnic takto získaných a z rovnice podmínkové vypočteme hodnoty λ, ${}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k$, pro které daná funkce $u_0 = f({}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k)$ nabývá extrémní hodnoty.

Zřejmě za předpokladů uvedených na začátku odst. 1. bude

$$z = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid q_l, n) + \lambda\,.\,(q - q_1\,.\,q_2 \cdots q_k) =$$
$$= \prod_{l=1}^{k} \sum_{j=0}^{c_l} \binom{n}{j} p_l^j q_l^{n-j} + \lambda(q - q_1\,.\,q_2 \cdots q_k)\,.$$

Poněvadž podle inversního theorému pro charakteristické funkce platí

$$\mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid q_l, n) = \sum_{j=0}^{c_l} \binom{n}{j} p_l^j q_l^{n-j} = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{c_l} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_l e^{it} + q_l)^n\,\mathrm{d}t \tag{17}$$

$(l = 1, 2, \ldots, k)$, bude

$$z = \prod_{l=1}^{k} \left[\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{c_l} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_l e^{it} + q_l)^n\,\mathrm{d}t\right] + \lambda(q - q_1\,.\,q_2 \cdots q_k)$$

a

$$\frac{\partial z}{\partial q_h} = \left[n\,.\,\frac{1}{2\pi}\,.\sum_{j=0}^{c_h} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_h e^{it} + q_h)^{n-1}\,(1 - e^{it})\,\mathrm{d}t\right].$$
$$.\left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{k} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{c_l} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_l e^{it} + q_l)^n\,\mathrm{d}t\right] - \lambda q_1\,.\,q_2 \ldots q_{h-1}\,.\,q_{h+1} \cdots q_k =$$
$$= \left[n\,.\,\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{c_h} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_h e^{it} + q_h)^{n-1}\,\mathrm{d}t - n\,.\,\frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{c_h 1} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_h e^{it} + q_h)^{n-1}\,\mathrm{d}t\right].$$
$$.\left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{k} \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{c_l} \int_0^{2\pi} e^{-itj}\,(p_l e^{it} + q_l)^n\,\mathrm{d}t\right] - \lambda \prod_{\substack{l=1\\ l\neq h}}^{k} q_l = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, k)\,. \tag{18}$$

Vzhledem k rovnicím (17) můžeme rovnice (18) dále upravit takto:

$$\frac{\partial z}{\partial q_h} = n \cdot [\mathsf{P}(\xi_h \leqq c_h \mid q_h, n-1) - \mathsf{P}(\xi_h \leqq c_h - 1 \mid q_h, n-1)] \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{l=1\\l \neq h}}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid q_l, n) - \lambda \prod_{\substack{l=1\\l \neq h}}^{k} q_l = n \cdot [\mathsf{P}(\xi_h = c_h \mid q_h, n-1)] \cdot$$

$$\cdot \prod_{\substack{l=1\\l \neq h}}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid q_l, n) - \lambda \prod_{\substack{l=1\\l \neq h}}^{k} q_l = 0 \qquad (h = 1, 2, \ldots, k) .$$

Zabývejme se nyní řešením této soustavy rovnic. Rozšiřme nejprve každou rovnici $\frac{\partial z}{\partial q_h} = 0$ činitelem q_h $(h = 1, 2, \ldots, k)$. Zřejmě vzhledem k podmínkové rovnici (15) bude

$$n \cdot q_h[\mathsf{P}(\xi_h = c_h \mid q_h, n-1)] \cdot \prod_{\substack{l=1\\l \neq h}}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid q_l, n) = \lambda q \qquad (h = 1, 2, \ldots, k) .$$

Odtud pak přímo vyplývá (při rovnosti pravých stran rovnic), že pro $g, h = 1, 2, \ldots, k;\ g \neq h$ je

$$\begin{aligned} q_h \cdot \mathsf{P}(\xi_h = c_h \mid q_h, n-1) \cdot \mathsf{P}(\xi_g \leqq c_g \mid q_g, n) = \\ = q_g\ \mathsf{P}(\xi_g = c_g \mid q_g, n-1) \cdot \mathsf{P}(\xi_h \leqq c_h \mid q_h, n) . \end{aligned} \tag{19}$$

Označíme-li nyní

$$B_h(n, c_h) = \frac{\mathsf{P}(\xi_h \leqq c_h \mid q_h, n)}{\mathsf{P}(\xi_h = c_h \mid q_h, n-1)}, \text{[1]} \tag{20}$$

můžeme konečně soustavu rovnic (19) vyjádřit ve tvaru

$$\frac{q_g}{B_g(n, c_g)} = \frac{q_h}{B_h(n, c_h)} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, k; g \neq h) . \tag{21}$$

Hodnoty ${}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k$ vyhovující této soustavě rovnic stanovíme nejsnáze grafickou metodou.[2]).

---

[1]) K výpočtu potřebných výrazů ve vztahu (20) pro $n \leqq 50$ můžeme použít tabulek hodnot neúplné beta funkce [2], pro $n > 50$ a $p \leqq 0{,}10$ tabulek hodnot Poissonovy exponenciely [3] a pro n velké tabulek normálního rozdělení [4].

[2]) Na osu úseček vynášíme hodnoty q_h $(0 \leqq q_h \leqq 1)$ a na osu pořadnic hodnoty $\frac{q_h}{B_h(n, c_h)}$. Tím dostáváme parametrický systém čar pro různé hodnoty c_h. Hodnoty ${}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k$, vyhovující soustavě rovnic (21) odečteme na stupnici q_h v průsečících příslušných křivek c_h s různě zvolenou hodnotou $\frac{q_h}{B_h(n, c_h)}$ (pro $n = 100$ a $c_h = 0, 1, 2, \ldots, 10$ viz graf na obr. 2) a hodnotu q stanovíme dodatečně z rovnice (1), do níž za q_l dosadíme hodnoty ${}_0q_l$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ takto z grafu odečtené.

Vzhledem ke vztahu (10) je zřejmé, že funkce $u = f(q_1, q_2, \ldots, q_k)$ má pro $q_1 = {}_0q_1, q_2 = {}_0q_2, \ldots, q_k = {}_0q_k$ hodnotu minimální.

Pro dolní hranici $L_D^*(p)$ pásma, v němž leží výsledná operativní charakteristika $L^*(p)$, pak platí

$$L_D^*({}_0p) = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid {}_0p_l, n) , \tag{22}$$

kde

$$\begin{aligned} {}_0p_l &= 1 - {}_0q_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) , \\ {}_0p &= 1 - {}_0q , \\ {}_0q &= \prod_{l=1}^{k} {}_0q_l , \end{aligned}$$

při čemž ${}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k$ vyhovují soustavě rovnic (21).

Ze vztahu (22) vyplývá, že v případě

a) když všechna $c_l > 0$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$, je

$$L_D^*({}_0p) = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid {}_0p_l, n) , \tag{23}$$

kde

$${}_0p_l = 1 - {}_0q_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, k) ,$$

$${}_0p = 1 - {}_0q , \tag{23a}$$

$${}_0q = \prod_{l=1}^{k} {}_0q_l \tag{23b}$$

a ${}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k$ vyhovují soustavě rovnic (21);

b) když $c_l \geqq 0$ $(l = 1, 2, \ldots, k)$ a $c_1 = c_2 = \ldots = c_k$, je

$$L_D^*(p) = [\mathsf{P}(\xi_1 \leqq c_1 \mid p_1, n)]^k , \tag{24}$$

kde

$$p = 1 - q_1^k ;$$

c) když $c_l > 0$ pro $l = 1, 2, \ldots, k - k'$ a $c_{k-k'+1} = \ldots = c_k = 0$, pak je

$$L_D^*({}_0p) = \prod_{l=1}^{k-k'} \mathsf{P}(\xi_l \leqq c_l \mid {}_0p_l, n) , \tag{25}$$

kde

$$\begin{aligned} {}_0p_l &= 1 - {}_0q_l \qquad (l = 1, 2, \ldots, k - k') , \\ {}_0p &= 1 - \prod_{l=1}^{k-k'} {}_0q_l , \end{aligned}$$

při čemž ${}_0q_l$ $(l = 1, 2, \ldots, k - k')$ a ${}_0q_{l'}$ $(l' = k - k' + 1, \ldots, k)$ vyhovují soustavě rovnic (21). Lze dokázat, že všechna ${}_0q_{l'} = 1$ a tedy $\mathsf{P}(\xi_{l'} = 0 \mid {}_0p_{l'} = 0, n) = 1$. Je tedy $L_D^*(p)$ pro $k - k'$ jakostních vlastností, pro jejichž kontrolu jsou předepsány přejímací postupy $(n, c_l) - l = 1, 2, \ldots, k - k'$ a $c_l > 0$ — totožná s $L_D^*(p)$ pro k jakostních vlastností, pro jejichž kontrolu jsou předepsány přejímací postupy (n, c_l) — $l = 1, 2, \ldots, k - k'$ a $c_l > 0$ a přejímací postupy $(n, c_{l'})$ — $l' = k - k' + 1, k - k' + 2, \ldots, k$ a $c_{l'} = 0$.

2. Numerický příklad výpočtu $L_H^*(p)$ a $L_D^*(p)$

Uvažujme tento případ: nechť $k = 3$; $n = 100$; $c_1 = 2$, $c_2 = 3$ a $c_3 = 5$. Použijeme-li vztahu (10) platí v našem případě pro horní hranici pásma

$$L_H^*(p) = \sum_{j=0}^{10} \binom{100}{j} p^j q^{100-j} .$$

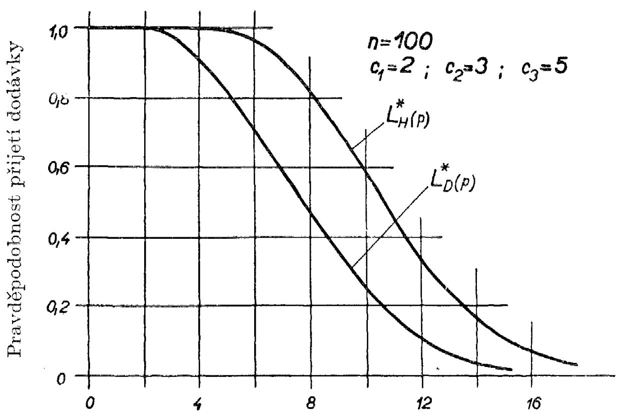
Pro usnadnění výpočtu aproximujme binomické rozdělení Poissonovou exponentielou. Tak dostáváme

$$L_H^*(p) = \sum_{j=0}^{10} \frac{(np)^j \cdot e^{-np}}{j!} .$$

Body operativní charakteristiky $L_H^*(p)$ stanovené pomocí Molinových tabulek [3] jsou uvedeny v tabulce 1. Průběh operativní charakteristiky $L_H^*(p)$ je znázorněn na obr. 1.

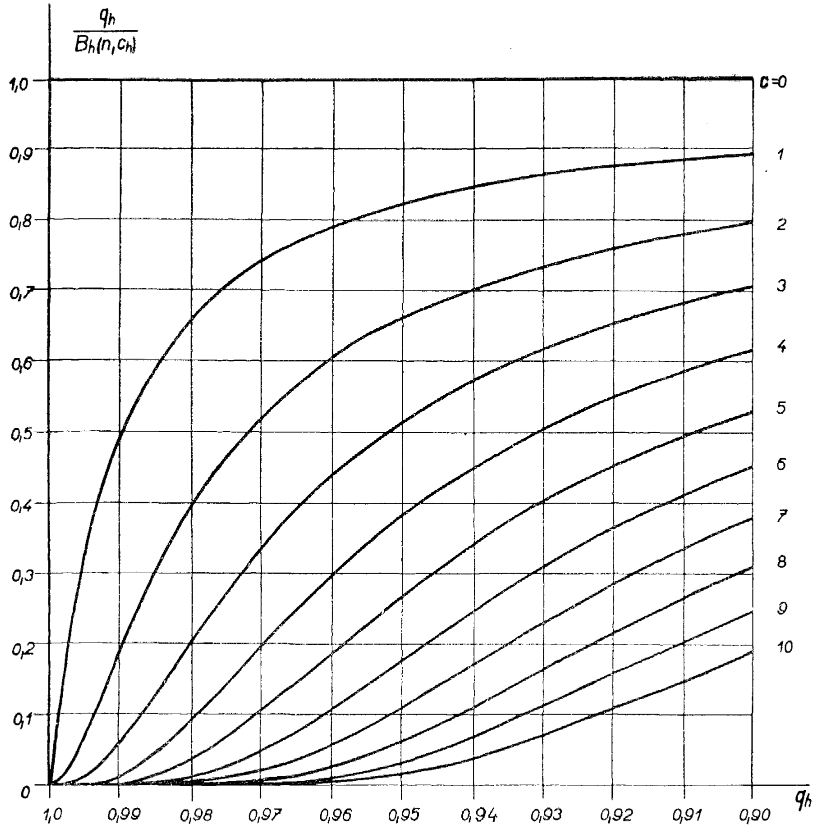
Tabulka 1.

p	$L_H^*(p)$	p	$L_H^*(p)$
0,02	0,999992	0,12	0,347229
0,04	0,997160	0,14	0,175681
0,06	0,957379	0,16	0,077396
0,08	0,815886	0,18	0,030366
0,10	0,583040	0,20	0,010812



Obr. 1.

K určení průběhu dolní hranice pásma $L_D^*(p)$ použijeme vztahu (23). Nejprve stanovíme hodnoty ${}_0q_l$ $(l = 1, 2, 3)$ vyhovující soustavě rovnic (21). Pro řešení dané soustavy rovnic použijeme grafické metody. Sestrojení grafu (viz obr. 2) je popsáno v poznámce [2]). Pokládejme poměr $\dfrac{q}{B_h(n, c_h)}$ postupně roven 0,05;



Obr. 2.

Tabulka 2.

$\frac{q_h}{B_h(n, c_h)}$	${}_0q_1$	${}_0q_2$	${}_0q_3$	${}_0q$	${}_0p$
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
0,05	0,9960	0,9910	0,9775	0,9648	0,0352
0,10	0,9970	0,9870	0,9705	0,9521	0,0479
0,15	0,9920	0,9835	0,9650	0,9415	0,0585
0,20	0,9900	0,9800	0,9585	0,9299	0,0701
0,30	0,9855	0,9730	0,9455	0,9064	0,0936
0,40	0,9800	0,9640	0,9305	0,8791	0,1209
0,50	0,9715	0,9520	0,9090	0,8407	0,1593

0,1; 0,15; 0,20; 0,30; 0,40; a 0,50. Odpovídající hodnoty ${}_0q_l$ ($l = 1, 2, 3$) vyhovující soustavě rovnic (21) jsou uvedeny v tabulce 2 ve sloupci (2) až (4). Hodnoty ${}_0q$ a ${}_0p$ ve sloupci (5) a (6) téže tabulky byly stanoveny pomocí vztahů (23a) a (23b).

Dosadíme-li nyní tyto hodnoty do rovnice (23), obdržíme na př. pro hodnotu ${}_0p = 0{,}0352$

$$L_D^*(0{,}0352) = \mathsf{P}(\xi_1 \leqq 2 \mid 0{,}004;\ 100)\ .\ \mathsf{P}(\xi_2 \leqq 3 \mid 0{,}009;\ 100)\ .$$
$$.\ \mathsf{P}(\xi_3 \leqq 5 \mid 0{,}0225;\ 100)\ .$$

Použijeme-li k numerickému vyjádření součinitelů na pravé straně této rovnice opět tabulek Poissonovy exponenticly [3], dostáváme (při lineární interpolaci)

$$L_D^*(0{,}0352) = 0{,}992073\ .\ 0{,}986541\ .\ 0{,}972557 = 0{,}951861\ .$$

Další body operativní charakteristiky $L_D^*(p)$ určené podobným způsobem jsou uvedeny v tabulce 3. Průběh $L_D^*(p)$ je znázorněn na obr. 1.

Tabulka 3.

p	$L_D^*(p)$	p	$L_D^*(p)$
0,0479	0,860895	0,0936	0,313308
0,0585	0,746685	0,1209	0,107095
0,0701	0,600071	0,1593	0,014780

Poznámka: Ke stejnému průběhu $L_H^*(p)$ a $L_D^*(p)$ bychom dospěli i v případě, kdybychom zvyšovali hodnotu k a pro kontrolu vlastností $k = 4, 5, \ldots$ bychom předepsali přejímací postupy $n = 100$ a $c_4 = c_5 = \ldots = 0$.

3. Výpočet tabulek

Sledováním vlivu některých parametrů na šíři pásma, omezeného operativní charakteristikou $L_H^*(p)$ a $L_D^*(p)$, lze dokázat některé důležité věty, které umožňují výpočet pomocných tabulek k tabulkám výběrových přejímacích čísel Dodge-Romigovým [5] a tím rozšíření použití těchto tabulek na oblast přejímky výrobků jedním výběrem při kontrole několika jakostních vlastností. Pomocné tabulky a některé průmyslové aplikace tohoto druhu přejímky budou uvedeny v samostatném článku.

LITERATURA

[1] *Liebermann;* Multistation Inspection Schemes, JASA 1952.

[2] *Pearson;* Tables of the Incomplete Beta-Function, 1934.

[3] *Molina;* Poisson's Exponential Binomial Limit, 1947.

[4] *Janko;* Tabulky k numerickým metodám početním a matematické statistice, 1931.

[5] *Dodge-Romig;* Sampling Inspection Tables — Single and Double Sampling, 1944.

Резюме

ОПЕРАЦИОННАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОДНОВЫБРОЧНОГО КОНТРОЛЯ В СЛУЧАЕ ОДНОВРЕМЕННОГО КОНТРОЛЯ НЕСКОЛЬКИХ КАЧЕСТВЕННЫХ ПРИЗНАКОВ НА ОДНОМ ОБРАЗЦЕ

ВРАТИСЛАВ ГОРАЛЕК (Vratislav Horálek)

(Поступило в редакцию 12/I 1956 г.)

Пусть для контроля каждого их k контролированных взаимно независимых качественных признаков (или групп этих признаков) установлена приемочная схема (n, c_l) (для $l = 1, 2, \ldots, k$), где n обозначает объем выборки и $c_l \geqq 0$ — приемочное число (лимит) дефектных образцов в выборке.

Пусть, далее, p $(0 \leqq p \leqq 1)$ — содержание брака в партии и $q_l = 1 - p_l$ — содержание удовлетворительных образцов там же. Аналогично, пусть p_l $(0 \leqq p_l \leqq 1$ для $l = 1, 2, \ldots, k)$ — доля брака по l-тому контролированному признаку образцов в партии и $q_l = 1 - p_l$ — содержание удовлетворительных по этому признаку образцов в партии.

Пусть ξ — случайная переменная, значение которой дает число дефектных образцов в выборке, и $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ — взаимно независимые случайные переменные, значения которых дают числа дефектных образцов соответственно, по первом, втором, …, k-том признаке образцов в выборке.

Т. к. значения величин p_l (для $l = 1, 2, \ldots, k$) надо считать неизвестными, то искомая, операционная характеристика $L^*(p)$ может быть определена лишь нижним и верхним пределами $L^*_D(p)$ и $L^*_H(p)$. Следовательно,

$$L^*_D(p) \leqq L^*(p) \leqq L^*_H(p) .$$

Для $L^*_H(p)$ и $L^*_D(p)$ были получены следующие соотношения:

$$L^*_H(p) = \mathsf{P}\{\xi \leqq c_s \mid p, n\} ,$$

где

$$c_s = \prod_{l=1}^{k} c_l ,$$

и

$$L^*_D(p) = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}\{\xi_l \leqq c_l \mid {}_0p_l, n\} ,$$

где

$$\begin{aligned} {}_0p_l &= 1 - {}_0q_l \quad (\text{для } l = 1, 2, \ldots, k) , \\ {}_0p &= 1 - {}_0q , \\ {}_0q &= \prod_{l=1}^{k} {}_0q_l , \end{aligned}$$

причем числа ${}_0q_1, \ldots, {}_0q_k$ удовлетворяют системе равенств

$$q_g \frac{\mathsf{P}\{\xi_g = c_g | \, p_g, n-1\}}{\mathsf{P}\{\xi_g \leqq c_g | \, p_g, n\}} = q_h \frac{\mathsf{P}\{\xi_h = c_h | \, p_h, n-1\}}{\mathsf{P}\{\xi_h \leqq c_h | \, p_h, n\}} ,$$

для $$g, h = 1, 2, \ldots, k \quad \text{и} \quad g \neq h .$$

Summary

OPERATING — CHARACTERISTIC CURVE FOR SAMPLING INSPECTION, WHERE EACH PRODUCT IS CHECKED FOR SEVERAL INDEPENDENT QUALITY CHARACTERISTICS

VRATISLAV HORÁLEK

(Received January 12, 1956.)

We consider the case of sampling inspection, where each product is checked for k independent quality characteristics. Assume that the sampling scheme (n, c_l) — $l = 1, 2, \ldots, k$ — is given for each characteristic, where $n > 0$ is the sample size and $c_l \geqq 0$ is the corresponding acceptance number.

Let p $(0 \leqq p \leqq 1)$ be the total fraction of defective products in the inspection lot and $q = 1 - p$ the total fraction of non-defectives. Let p_l $(0 \leqq p_l \leqq 1)$ — — $l = 1, 2, \ldots, k$ — be the fraction of products in the inspection lot, which are defective with respect to the l-th quality characteristic and $q_l = 1 - p_l$ the fraction of products in the inspection lot, which are nondefective with respect to the l-th quality characteristic.

Let ξ be a random variable, which takes on the values of the sample number of defectives and $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ be independent random variables, ξ_l $(l = 1, 2, \ldots, \ldots, k)$ taking on the values of the sample number of defectives with respect to the l-th quality characteristic.

Since the fractions p_l — $l = 1, 2, \ldots, k$ — must be considered as unknow, the resulting operating-characteristic curve $L^*(p)$ may be determined only by a bounded zone, the upper bound of which we denote by $L^*_H(p)$ and the lower bound by $L^*_D(p)$.

Consequently we have

$$L^*_D(p) \leqq L^*(p) \leqq L^*_H(p) .$$

For $L^*_H(p)$ and $L^*_D(p)$, the following relations are derived:

$$L^*_H(p) = \mathsf{P}(\xi \leqq c_s | \, p, n) ,$$

where $c_s = \sum_{l=1}^{k} c_l$;

$$L^*_D(p) = \prod_{l=1}^{k} \mathsf{P}(\xi_e \leqq c_l | \, {}_0p_l, n) ,$$

where

$$\begin{aligned} {}_0p_l &= 1 - {}_0q_l \,, \qquad l = 1, 2, \ldots, k \\ {}_0p &= 1 - {}_0q \,, \\ {}_0q &= \prod_{l=1}^{k} {}_0q_l \,, \end{aligned}$$

and the values ${}_0q_1, {}_0q_2, \ldots, {}_0q_k$ satisfy the system of equations

$$q_g \frac{\mathsf{P}(\xi_g = c_g \mid p_g, n-1)}{\mathsf{P}(\xi_g \leq c_g \mid p_g, n)} = q_h \frac{\mathsf{P}(\xi_h = c_h \mid p_h, n-1)}{\mathsf{P}(\xi_h \leq c_h \mid p_h, n)}$$

for $g, h = 1, 2, \ldots, k$ and $g \neq h$.