Bruno Bošek

Odvození nejvýhodnějšího poměru dělících tlaků pro k-stupňovou kompresi

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 1, 47–57

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102552`

ODVOZENÍ NEJVÝHODNĚJŠÍHO POMĚRU DĚLÍCÍCH TLAKŮ PRO k-STUPŇOVOU KOMPRESI

BRUNO BOŠEK

(Došlo dne 9. dubna 1956.) DT: 621.51.01

V odborné literatuře pojednávající o kompresorech se uvádí řešení pro nejvýhodnější dělící tlak dvoustupňové komprese. Pomocí analogie a entropického diagramu se tato úvaha rozšiřuje na vícestupňovou kompresi.

Následující stať se zabývá exaktním řešením tohoto problému.

Polytropická práce kompresoru pro k-stupňovou kompresi je funkce o $(k - 1)$ nezávisle proměnných $P_2, P_3, \dots, P_k$. Při tom jest:

P_1	ssací tlak,
P_{k+1}	výtlačný tlak k-tého stupně,
$P_2, P_3, \dots, P_k$	dělící tlaky jednotlivých stupňů.

Veličiny P_1, P_{k+1} jsou dané konstanty, kdežto $P_2, \dots, P_k$ jsou proměnné. Zřejmě platí pro tyto proměnné definiční obor

$$P_1 < P_2 < P_3 < \dots < P_k < P_{k+1} .$$

Označíme-li tuto práci obecně jako

$$L = L(P_2, P_3, \dots, P_k) ,$$

pak ze známého thermodynamického odvození plyne, že je specielně tvaru

$$L = GRT_1 \frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] + GRT_1 \frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{P_3}{P_2} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] +$$
$$\dots + GRT_1 \frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{P_k}{P_{k-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right] + GRT_1 \frac{n}{n-1} \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_k} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1 \right]. \tag{1}$$

Nutnou podmínkou extrému funkce $f = f(x_1, x_2, \dots, x_{k-1})$ o $(k - 1)$ nezávisle proměnných $x_1, \dots, x_{k-1}$ je

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 ; \; \dots ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_{k-1}} = 0 . \tag{2}$$

Z těchto rovnic vypočteme souřadnice bodu v $(k - 1)$ rozměrném prostoru, ve kterém extrém může, ale nemusí nastat.

Má-li v takto určeném bodě být minimum, musí dále pro tento bod platit podmínky, stanovené v obecném tvaru:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = f_{11} > 0\,,\\
A_2 &= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0\,,\\
A_3 &= \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} > 0\,,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
A_k &> 0\,,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

kde $f_{11}, f_{22}, f_{33}, \ldots, f_{kk}$ jsou $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_K^2}$ a f_{pq} $(p = 1, 2, 3, \ldots, k - 1;$ $q = 1, 2, 3, \ldots, k - 1;$ $p \neq q)$ jsou všechny smíšené derivace $\frac{\partial^2 f}{\partial x_p\, \partial x_q}$ uvažované funkce.

Vypočteme nyní souřadnice bodu uvažované funkce (1) z podmínky (2), při čemž položíme $\frac{n - 1}{n} = m$ a dělíme (neboť $\frac{\partial f}{\partial x_p} = 0$) součinitelem GRT_1:

$$
\frac{\partial L}{\partial P_2} = \frac{1}{m} \cdot m \cdot \frac{P_2^{m-1}}{P_1^m} - \frac{1}{m} \cdot m \cdot \frac{P_3^m}{P_2^{m+1}} = 0 \Rightarrow P_2^{m-1} \cdot P_2^{m+1} = P_1^m \cdot P_3^m\,,
$$

$$
P_2^2 = P_1 \cdot P_3
$$

a úpravou

$$
\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2}\,.
$$

Obdobně i další parciální derivace

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial P_3} &= \frac{P_3^{m-1}}{P_2^m} - \frac{P_4^m}{P_2^{m+1}} = 0 \quad \Rightarrow \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3}\,,\\
&\vdots\\
\frac{\partial L}{\partial P_k} &= 0 \quad \Rightarrow \frac{P_k}{P_{k-1}} = \frac{P_{k+1}}{P_k}\,.
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Současná platnost těchto simultánních rovnic vede na výraz

$$
\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \ldots = \frac{P_{k+1}}{P_k} = \text{konstanta } C\,. \qquad (5)
$$

K určení konstanty C z daných hodnot P_1 a P_{k+1} znásobíme levé strany rovnic mezi sebou:

$$\frac{P_2}{P_1} \cdot \frac{P_3}{P_2} \cdot \frac{P_4}{P_3} \cdots \frac{P_{k+1}}{P_k} = C^k \Rightarrow \tag{6}$$

$$\Rightarrow C = \sqrt[k]{\frac{P_{k+1}}{P_1}}, \text{ kde } \frac{P_{k+1}}{P_1} > 0 \,. \tag{7}$$

Z rovnice (7) vyplývá, že C může nabývat k hodnot, a to:

α) je-li $k = 2r + 1$ $\left(r = 1, 2, 3, \ldots, \frac{k-1}{2}\right)$, pak C má jednu reálnou hodnotu a ostatní jsou komplexní;

β) je-li $k = 2r$ $\left(r = 1, 2, 3, \ldots, \frac{k}{2}\right)$, pak C má dvě reálné hodnoty (jednu kladnou, druhou zápornou), ostatní jsou komplexní.

Komplexní kořeny jsou fysikálně bezvýznamné. Záporná reálná hodnota pro C je nepřípustná, protože platí

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \ldots = \frac{P_k}{P_{k-1}} = C \,,$$

kde $P_1, \ldots, P_k$ jsou hodnoty vesměs > 0.

Existuje tedy jediná reálná hodnota $C > 0$ jakožto řešení soustavy (5).

Platí tedy

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \ldots = \frac{P_{k+1}}{P_k} = \sqrt[k]{\frac{P_{k+1}}{P_1}} \,. \tag{8}$$

Protože pak podle předpokladu je $P_1 < P_2 < \ldots < P_k < P_{k+1}$, je vypočtený lokální extrém absolutním extrémem, jak bude dále uvedeno v závěru této práce.

Abychom dokázali, že odvozený extrém je minimem, musí být splněna podmínka (3), t. j. determinanty tvaru

$$A_1 = f_{11} \,,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} \,,$$

$$\vdots$$

$$A_k = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1k} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_{k1} & f_{k2} & \cdots & f_{kk} \end{vmatrix}$$

musí být vesměs kladné.

Určíme příslušné druhé parciální derivace

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_2^2} = GRT_1 \cdot \left[\frac{m-1}{P_1^m} \cdot P_2^{m-2} + (m+1)\, P_3^m \cdot P_2^{-m-2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_3^2} = GRT_1 \cdot \left[\frac{m-1}{P_2^m} \cdot P_3^{m-2} + (m+1)\, P_4^m \cdot P_3^{-m-2}\right],$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_k^2} = GRT_1 \cdot \left[\frac{m-1}{P_{k-1}} \cdot P_k^{m-2} + (m+1)\, P_{k+1}^m \cdot P_k^{-m-2}\right]. \tag{9}$$

Po dosazení vypočtených souřadnic a úpravě dostáváme

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_2^2} = 2m \cdot GRT_1 \cdot \frac{P_3^{\frac{m}{2}-1}}{P_1^{\frac{m}{2}+1}},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_3^2} = 2m \cdot GRT_1 \cdot \frac{P_4^{\frac{m}{2}-1}}{P_2^{\frac{m}{2}+1}},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_k^2} = 2m \cdot GRT_1 \cdot \frac{P_{k+1}^{\frac{m}{2}-1}}{P_{k-1}^{\frac{m}{2}+1}}. \tag{10}$$

Upravíme tak, že použijeme ze vztahu (5)

$$P_3^{\frac{m}{2}-1} = C^{m-2} \cdot P_1^{\frac{m}{2}-1},$$

neboť

$$\frac{P_3}{P_1} = C^2.$$

Obdobně

$$P_4^{\frac{m}{2}-1} = C^{m-2} \cdot P_2^{\frac{m}{2}-1} = C^{m-2} \cdot (CP_1)^{\frac{m}{2}-1} = C^{\frac{3}{2}m-3} \cdot P_1^{\frac{m}{2}-1},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_2^2} = 2mGRT_1 \cdot C^{m-2} \frac{P_1^{\frac{m}{2}-1}}{P^{\frac{m}{2}+1}} = 2mGRT_1 \cdot C^{m-2} \cdot P_1^{-2},$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_3^2} = 2mGRT_1 \cdot C^{\frac{3}{2}m-3} \frac{P_1^{\frac{m}{2}-1}}{P_2^{\frac{m}{2}-1}} = 2mGRT_1 \cdot \frac{C^{\frac{3}{2}m-1}}{C_1^{\frac{m}{2}+1}} \cdot P_1^{-2} = 2mGRT_1 \cdot C^{m-4} \cdot P_1^{-2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_k^2} = 2mGRT_1 \cdot C^{m-2k} \cdot P_1^{-2}. \tag{11}$$

Položme

$$\frac{2mGRT_1}{P_1^2} = 2B \quad \text{a} \quad \frac{1}{C^{2k-m}} = C_k \,.$$

Pak velikost obecného členu

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_k^2} = C_k \,.\, 2B = \frac{1}{C^{2k-m}} \,.\, 2B \,. \tag{12}$$

Protože

$$C > 1 \,,$$
$$k = 1, 2, 3, 4, \dots \,,$$
$$0 < m < 0{,}3 \,,$$

platí

$$C_1 > C_2 > C_3 \dots > C_k \,.$$

Určíme dále hodnotu smíšených derivací

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_2 \, \partial P_3} = - \, mGRT_1 \frac{P_3^{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}}}{P_1^{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}} \,,$$

$$P_3 = c^2 P_1 \,, \quad P_3^{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}} = C^{m-3} P_1^{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}} \,,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_2 \, \partial P_3} = - \, mGRT_1 C^{m-3} \frac{P_1^{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}}}{P_1^{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}} = - \, mGRT_1 C^{m-3} \,.\, P_1^{-2} \,.$$

Dále platí

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_3 \, \partial P_4} = - \, mGRT_1 \frac{P_4^{\frac{m}{2}-\frac{3}{2}}}{P_2^{\frac{m}{2}+\frac{1}{2}}} = - \, mGRT_1 C^{m-3} \,.\, P_2^{-2} =$$

$$= - \, mGRT_1 C^{m-3} \,.\, C^{-2} \,.\, P_1^{-2} = - \, C^{m-5} \frac{mGRT_1}{P_1^2} \,,$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_{k-1} \, \partial P_k} = - \, C^{m-2k+1} \frac{mGRT_1}{P_1^2} = - \frac{1}{C^{2k-1-m}} B \,.$$

Tedy obecný tvar smíšené derivace je

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_k \, \partial P_{k+1}} = - \frac{1}{C^{2k+1-m}} B \,. \tag{13}$$

Protože hodnoty

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_1 \, \partial P_3} = \frac{\partial^2 L}{\partial P_3 \, \partial P_1} = \frac{\partial^2 L}{\partial P_1 \, \partial P_4} = \frac{\partial^2 L}{\partial P_4 \, \partial P_1} = \dots = 0 \,,$$

obecně

$$\frac{\partial^2 L}{\partial P_p \, \partial P_q} = 0$$

pro každé

$$p = 1, 2, 3, \dots \text{ a } q = 1, 2, 3, \dots \,,$$

pro která platí

$$p \neq q\,, \quad p \neq q \pm 1\,,$$

mají determinanty (3) speciální tvar

$$A_1 = \frac{1}{C^{2-m}} \,.\, 2B\,,$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} \frac{1}{C^{2-m}} \,.\, 2B & -\frac{1}{C^{3-m}} \,.\, B \\ -\frac{1}{C^{3-m}}\, B & \frac{1}{C^{4-m}} \,.\, 2B \end{vmatrix} =$$

$$= B^2 \frac{1}{C^{5-m}} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{C} \\ -1 & \frac{2}{C} \end{vmatrix} = B^2 \frac{1}{C^{6-m}} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix},$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} \frac{1}{C^{2-m}} \,.\, 2B & -\frac{1}{C^{3-m}}\, B & 0 \\ -\frac{1}{C^{3-m}} \,.\, B & \frac{1}{C^{4-m}} \,.\, B & -\frac{1}{C^{5-m}} \,.\, B \\ 0 & -\frac{1}{C^{5-m}} \,.\, B & \frac{1}{C^{6-m}} \,.\, B \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{C^{2-m}} \,.\, B \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{C} & 0 \\ -\frac{1}{C^{3-m}} \,.\, B & \frac{1}{C^{4-m}} \,.\, 2B & -\frac{1}{C^{5-m}} \,.\, B \\ 0 & -\frac{1}{C^{5-m}} \,.\, B & \frac{1}{C^{6-m}} \,.\, 2B \end{vmatrix} =$$

$$= B^3 \frac{1}{C^{9-3m}} \begin{vmatrix} 2 & -\frac{1}{C} & 0 \\ -1 & \frac{2}{C} & -\frac{1}{C^2} \\ 0 & -\frac{1}{C} & \frac{2}{C^2} \end{vmatrix} = B^3 \frac{1}{C^{12-3m}} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Obdobně determinant A^4 po úpravě

$$A_4 = \frac{1}{C^{20-4m}} \,.\, B^4 \,.\, \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

a obecný tvar determinantu A_k obdržíme takto:

Z vodorovných řad vytýkáme mocniny $\frac{1}{C}$ tak, aby vznikl determinant, který ve druhém sloupci má násobky $\frac{1}{C}$, ve třetím sloupci má násobky $\frac{1}{C^2}$, ..., v k-tém sloupci má násobky $\frac{1}{C^{k-1}}$.

Novým vytknutím těchto faktorů ze sloupců vzniká pak výsledný determinant

$$A_k = B^k \cdot \frac{1}{C^{2\binom{k+1}{2}-km}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}}_{D_k} . \qquad (14)$$

Odvozený determinant D_k patří mezi kontinuanty typu

$$D_k = \begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & b & a \end{vmatrix} , \qquad (15)$$

pro které platí rekurentní vzorec

$$D_k = aD_{k-1} - b^2 D_{k-2} . \qquad (16)$$

Hodnotu tohoto determinantu lze přímo vypočíst pomocí vzorce odvozeného postupným zpětným dosazováním do (16):

α) Pro sudý index $k = 2r$ ($r = 0, 1, 2, 3, \ldots$) jest

$$D_{2r} = a^{2r} + (-1)^1 \binom{2r-1}{1} a^{2(r-1)} b^2 + (-1)^2 \binom{2r-2}{2} . a^{2(r-2)} . b^4 + \ldots$$
$$+ \ldots + (-1)^{r-1} \binom{r+1}{r-1} . a^2 . b^{2(r-1)} + (-1)^r \binom{r}{r} b^{2r} , \qquad (17)$$

kde mnohočlen má $r + 1$ členů.

Přitom je zřejmě $D_0 = 1$.

β) Pro lichý index $k = 2r + 1$ ($r = 0, 1, 2, 3, \ldots$) jest

$$D_{2r+1} = a^{2r+1} + (-1)^1 \binom{2r}{1} a^{2r-1} b^2 + (-1)^2 . \binom{2r-1}{2} a^{2r-3} . b^4 + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{r-1} \binom{r+2}{r-1} a^3 . b^{2(r-1)} + (-1)^r \binom{r+1}{r} a^1 b^{2r} , \qquad (18)$$

kde mnohočlen má opět $r + 1$ členů.

Pro naši numerickou kontinuantu D_k, kde $a = 2$, $b = 1$, máme podle vztahu (14) dokázat, že je kladná pro každé k, neboť hodnoty

$$B = \frac{m \cdot GRT_1}{P_1^2} \quad \text{a} \quad \frac{1}{C^{2\binom{k+1}{2}-km}}, \quad \text{kde } C = \sqrt[k]{\frac{P_{k+1}}{P_1}} \quad \text{jsou evidentně kladné.}$$

Pro hodnotu tohoto numerického determinantu D_k úplnou indukcí se odvodí vztah:

$$D_1 = 2\,, \quad D_2 = 3\,, \quad D_3 = 4\,,$$

obecně

$$D_k = K + 1\,, \tag{19}$$

kde K jsou čísla celá kladná, neboť podle rekurentního vzorce

$$D_k = 2 \,.\, [(K - 1) + 1] - [(K - 2) + 1] = K + 1\,. \tag{20}$$

Jest tedy hodnota každého determinantu D_k kladná. *Uvažovaný extrém jest proto minimem.*

Že vypočtené minimum funkce L je skutečně minimem absolutním, lze dokázat buď sporem, nebo přímým výpočtem hraničních extrémů a jejich porovnáním s vypočteným extrémem lokálním.

Použijeme zde druhého způsobu, který je sice delší, ale zato je elementárnější a vede na vztah (23), který má sám o sobě význam.

Do funkce L pro zjednodušení si zaveďme označení

$$h = GRT_1 \quad \text{a} \quad m = \frac{n-1}{n}\,,$$

takže

$$L = \frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^m - 1\right] + \frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_3}{P_2}\right)^m - 1\right] + \ldots + \frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)^m - 1\right]. \tag{21}$$

Fysikální význam má pouze otevřený definiční obor $0 < P_1 < P_2 < \ldots < P_k < P_{k+1}$ pro proměnné $P_2, P_3, \ldots, P_k$. Protože výraz (21) má smysl i na hranici definičního oboru, budeme uvažovat uzavřený obor

$$0 < P_1 \leqq P_2 \leqq \ldots \leqq P_k \leqq P_{k+1}\,.$$

Bylo vypočteno, že L má jediné lokální minimum v bodě o souřadnicích

$$P_2^* = C \,.\, P_1,\ P_3^* = C^2 \,.\, P_1,\ \ldots,\ P_k^* = C^k \,.\, P_1\,,$$

kde

$$C = \left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{1}{k}}. \tag{7}$$

Po dosazení do L plyne po úpravě

$$L_1 = L(P_2^*, P_3^*, \ldots, P_k^*) = k \,.\, \frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{m}{k}} - 1\right]. \tag{22}$$

Nyní vypočteme hodnoty hraničních extrémů, které vzniknou:

1. Ztotožněním 2 sousedních tlaků, to jest

$$P_1 = P_2 \text{ nebo } P_2 = P_3 \text{ nebo } \dots \text{ nebo } P_k = P_{k+1} .$$

2. Ztotožněním 3 po sobě následujících tlaků, to jest

$$P_1 = P_2 = P_3 \text{ nebo } P_2 = P_3 = P_4 \text{ nebo } \dots \text{ nebo } P_{k-1} = P_k = P_{k+1} .$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$k - 3$. Ztotožněním $k - 2$ po sobě jdoucích tlaků, to jest

$$P_1 = P_2 = \dots = P_{k-1} \text{ nebo } P_2 = P_3 = \dots = P_k \text{ nebo } P_3 = P_4 = \dots = P_{k+1} .$$

Ztotožnění $k - 1$ po sobě následujících tlaků neuvažujeme, neboť v tomto případě jde o jednostupňovou kompresi mezi dvěma konstantními tlaky, takže uvažování minima kompresní práce by bylo beze smyslu.

Rovnost kterýchkoliv dvou po sobě následujících tlaků však znamená, že L obsahuje vždy jeden člen tvaru

$$\frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_{i+1}}{P_i}\right)^m - 1\right], \quad \text{kde } P_{i+1} = P_i \text{ pro } i = 1, 2, \dots, k.$$

Tento výraz má zřejmě nulovou hodnotu, takže L se redukuje na funkci o $(k - 2)$ nezávisle proměnných, kterou označíme L_{k-2}. Protože funkce L je spojitá ve všech proměnných, lze z vyšetření minima funkce L_{k-2} usuzovat na hraniční minimum funkce L. Označme lokální minimum funkce L_{k-2} jako L_2.

Po vypočtení souřadnic a úpravě bude

$$L_2 = (k - 1) \cdot \frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{m}{k-1}} - 1\right].$$

Hraniční minimum funkce L_{k-2} zjistíme obdobně vyšetřením lokálního minima funkce, která vznikne ztotožněním kterýchkoliv tří po sobě následujících tlaků, tedy funkce o $(k - 3)$ nezávisle proměnných, kterou označíme L_{k-3} a její lokální minimum L_3. Bude pak

$$L_3 = (k - 2) \cdot \frac{m}{h} \cdot \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{m}{k-2}} - 1\right].$$

Obecně mají tedy hraniční minima hodnoty

$$L_i = (k + 1 - i) \cdot \frac{h}{m} \cdot \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{m}{k+1-i}} - 1\right] \tag{23}$$

pro $i = 2, 3, \dots, k - 2$.

Abychom nyní dokázali, že lokální minimum L_1 je minimem absolutním, stačí dokázat nerovnost

$$L_1 < L_2 < L_3 < \dots < L_{k-2} .$$

K tomu postačí ukázat, že platí

$$q \cdot \left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_k}\right)^{\frac{m}{q}} - 1\right] < (q - 1)\left[\left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{m}{q-1}} - 1\right], \tag{24}$$

kde $q = k, k - 1, \ldots, 2$.

Položíme výraz

$$\left(\frac{P_{k+1}}{P_1}\right)^{\frac{m}{q \cdot (q-1)}} = A\ ,$$

při čemž zřejmě $A \geqq 1$.

Nerovnost (24) má pak tvar

$$q \cdot A^{q-1} < (q - 1) \cdot A^q + 1\ ,$$

$$(q - 1) \cdot A^{q-1} - (q - 1) \cdot A^q < 1 - A^{q-1}\ ,$$

$$(q - 1) \cdot A^{q-1} \cdot (1 - A) < (1 - A) \cdot (1 + A + A^2 + \ldots + A^{q-2})\ .$$

Nerovnost dělíme $(1 - A) < 0$.

Pak platí

$$q - 1 < \frac{1}{A^{q-1}} + \frac{1}{A^{q-2}} + \ldots + \frac{1}{A^2} + \frac{1}{A}\ . \tag{25}$$

Nerovnost tedy pro $A > 1$ zřejmě platí. Pro $A = 1$ nerovnost přechází v rovnost; úvaha však nemá fysikální význam, neboť pro případ $P_{k+1} = P_1$ nenastává komprese a kompresní práce má pak přirozeně nulovou hodnotu.

POUŽITÁ LITERATURA

[1] *Ch. Bouché:* Kolbenverdichter, Berlin, Springer 1937.

[2] *V. Chlumský:* Pístové kompresory, Praha 1952.

[3] *V. Jarník:* Diferenciální počet II, Praha 1956 (str. 504—511).

[4] *L. Kiepert:* Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung, Bd. I, Hannover 1918 (str. 779—81, 849).

Резюме

ПРОИЗВОДСТВО САМЫХ ВЫГОДНЫХ ПАРЦИАЛЬНЫХ ДАВЛЕНИЙ ДЛЯ k-СТУПЕНЧАТОЙ КОМПРЕССИИ

БРУНО БОШЕК (Bruno Bošek)

(Поступило в редакцию 9/IV 1956 г.)

В приведенной работе определяются самые выгодные парциальные давления для k-ступенчатой компрессии. Проблема решается определением

локального экстремума взаимосвязанной функции (1) для компрессной работы k-ступенчатой компрессии. При этом были применены необходимые и достаточные условия для наличия локального минимума функции о $(k-1)$ независимых переменных. Замечательно, что решение ведет к определителям специального вида, так называемым континуантам. Производные отношения (12), (13), (14) и (23) являются новыми.

Zusammenfassung

BESTIMMUNG DES GÜNSTIGSTEN STUFENDRUCKVERHÄLTNISSES DER MEHRSTUFIGEN VERDICHTUNG

BRUNO BOŠEK

(Eingegangen am 9. April 1956.)

Im Aufsatz wird die Bestimmung des günstigsten Stufendruckverhältnisses der k-stufigen Verdichtung behandelt, indem das absolute Minimum der stetigen Funktion (1) untersucht wird. Es sind dabei die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz des lokalen Minimums der Funktion von $(k-1)$ unabhängigen Veränderlichen angewandt. Es scheint bemerkenswert zu sein, dass die Lösung auf spezielle Determinanten (die sog. Kontinuanten) führt. Dabei werden die Formeln (12), (13), (14) und (23) als neu abgeleitet.