

Aplikace matematiky

Milan Apetaur; Ladislav Půst

Grafické metody řešení kmitavých pohybů motorových vozidel s ohledem na nelineární pérování

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 2, 81–104

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102559>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1957

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ČLÁNKY

GRAFICKÉ METHODY ŘEŠENÍ KMITAVÝCH POHYBŮ
MOTOROVÝCH VOZIDEL S OHLEDEM NA NELINEÁRNÍ
PÉROVÁNÍ

MILAN APETAUR, LADISLAV PŮST

(Došlo dne 14. srpna 1956.)

DT:621.113.001.1

V článku jsou studovány aplikace grafických method řešení soustavy nelineárních nehomogenních diferenciálních rovnic druhého řádu na přechodové zjevy kmitavých obvodů. Speciálně se článek zabývá kmitavými pohyby motorových vozidel.

1. Úvod

Theorie kmitavých pohybů motorových vozidel vycházela až dosud ze základních jednoduchých vztahů z nauky o kmitání. Ačkoliv z ní vyplynula celá řada důležitých poznatků, vedla v mnoha otázkách ke zcela mylným závěrům. Aby totiž bylo možno obdržet exaktně řešitelné výrazy, je nutno provést linearisaci charakteristik jednotlivých elementů odpružení vozidla, ať již pružných nebo tlumičích. Ve všech typech dnešních automobilů však tato linearisace není ani zdaleka přípustná.

Zvlášť u běžně používaných hydraulických tlumičů je rozdíl zřejmý. Jednak tím, že pro stlačování a roztahování tlumiče mají tlumičí síly různé velikosti a dále tím, že většinou se maximální tlumičí síly v obou směrech omezují na určité hodnoty. Kromě toho při všeobecné tendenci zavádění nelineárních progresivních zpružin, která je naprosto logickým krokem ve vývoji podvozků, je při linearisaci úlohy jakákoli snaha o získání výsledků mimo zcela obecné vztahy vyloučena.

Při porovnávání hodnot, naměřených na mechanické analogii motorového vozidla v ÚVMV s literárními údaji, se skutečně objevily takové nesrovnalosti, že bylo nutno hledat nové cesty pro theoretické zkoumání.

Jak bude dále uvedeno, je za typickou excitaci na silnici považována jednotlivá nerovnost. Tím tedy odpadla možnost použití některé známé metody

řešení nelineárních diferenciálních rovnic, na př. metody malého parametru, výhodné pro řešení periodických kmitů, a bylo nutno přejít buď na exaktní řešení za pomoci rozkladu charakteristiky na jednotlivé lineární úseky nebo použít některého přibližného způsobu. Na první pohled je patrné, že exaktní řešení je pracné i málo názorné, a proto nevýhodné. Přibližné metody jsou buď grafické nebo numerické. Numerických method používá na př. prof. MARQUARD [1]. I když podstatu jím používané metody je možno dosti dobře zmechanisovat, je vlastní výpočet s poměrně velkým nárokem na přesnost malých numerických rozdílů dosti namáhavý.

V tomto článku je proto uvedena nová grafická metoda, která je založena na způsobu LIÉNARDOVĚ [2] a na z tohoto principu vycházející JACOBSENOVĚ delta-methodě [3], popisované ve třetí kapitole. Grafické řešení je jednoduché a dobře přehledné a časové nároky u něj jsou poměrně malé.

2. Obecné rovnice a specialisace úloh

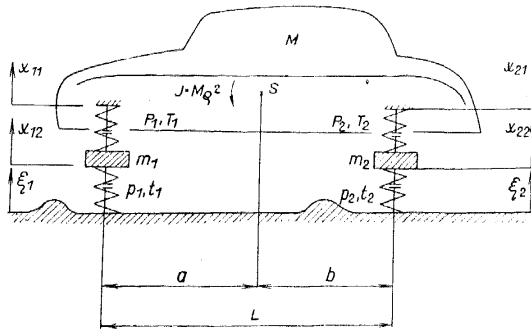
Automobil tvoří za předpokladu naprosto tuhých hmot a nehmotných pružných elementů soustavu s určitým konečným počtem stupňů volnosti. Při úvahách, které se týkají pérování motorových vozidel, nebereme většinou v úvahu hmoty, pružně zavěšené přímo ve vozidle, tedy pružné uložení motoru a převodových orgánů, cestující na sedadlech atd. Za kmitavé hmoty považujeme pouze součásti zavěšení kol a celkovou hmotu podvozku a karoserie vozidla s cestujícími. Podle provedení zavěšení kol se tím celý systém redukuje na minimálně 7 stupňů volnosti pro pevné nápravy vpředu a vzadu (uvažujeme-li pohyb nápravy pouze v jedné rovině). Obecně pak při nezávislých zavěšeních, kde každé kolo má nejméně 2 stupně volnosti, počet patříčně vyšší.

Jak se při podrobnějším zkoumání ukazuje, je i při různých způsobech nezávislého zavěšení u běžně používaných konstrukcí vazba mezi podélnými a příčnými kmity vozidla velmi malá [4] a u pevných náprav vpředu a vzadu dokonce nulová. Vliv jiných pohybů kol než vertikálních je pro účinky pérování naprosto zanedbatelný. Tím je tedy dáno theoretické opodstatnění schematu automobilu, kde se uvažuje jeho kmitání pouze v podélné rovině (obr. 1).

Stav této soustavy je tedy možno charakterisovat čtyřmi souřadnicemi (máme 4 stupně volnosti), a to okamžitou odlehlostí karoserie nad přední nápravou od statické polohy x_{11} a části karoserie nad zadní nápravou x_{21} a dále odlehlostmi neodpérovanych hmot přední x_{12} a zadní nápravy x_{22} od klidové polohy. Moment setrvačnosti karoserie J kolem příčné osy procházející těžištěm S vyjadřujeme normálně pomocí poloměru setrvačnosti ρ , jehož kvadrát je dán poměrem momentu setrvačnosti J a hmoty karoserie M . Neodpérované hmoty přední a zadní nápravy, t. j. hmoty pneumatik a zavěšení kol m_1 a m_2 , stanovíme pomocí redukčních vztahů. Při rozvoru vozu L je poloha těžiště

dána vzdálenostmi a a b od náprav. Nerovnost pod přední nápravou je určena v daném časovém okamžiku odlehlostí ξ_1 , pod zadní nápravou ξ_2 .

V obecném případě je vztah mezi silou a stlačením hlavních zpružin u přední a zadní nápravy dán jako $P_1 = F_1[(x_{11} - x_{12})]$ resp. $P_2 = F_2[(x_{21} - x_{22})]$. Tlumení v tlumičích závislé na rychlosti relativního pohybu karoserie a nápravy vyjadřujeme obdobně jako $T_1 = \Phi_1[(\dot{x}_{11} - \dot{x}_{12}), (x_{11} - x_{12})]$ resp. $T_2 =$



Obr. 1.

$= \Phi_2[(\dot{x}_{21} - \dot{x}_{22}), (x_{21} - x_{22})]$. Pneumatiky můžeme uvažovat stejně, t. j. $p_{1,2} = f_{1,2}[(x_2 - \xi)]$ a $t_{1,2} = \varphi_{1,2}[(\dot{x}_2 - \dot{\xi})]$. Zde ovšem je celá otázka určení vhodných průběhů charakteristik vzhledem k vlastnostem pryže obtížnější.

Základní dynamické rovnice celé soustavy můžeme napsat ve tvaru

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{x}_{11} + M_3 \ddot{x}_{21} + \Phi_1[(\dot{x}_{11} - \dot{x}_{12}), (x_{11} - x_{12})] + F_1[(x_{11} - x_{12})] &= 0, \\ M_2 \ddot{x}_{21} + M_3 \ddot{x}_{11} + \Phi_2[(\dot{x}_{21} - \dot{x}_{22}), (x_{21} - x_{22})] + F_2[(x_{21} - x_{22})] &= 0, \\ m_1 \ddot{x}_{12} - \Phi_1[(\dot{x}_{11} - \dot{x}_{12}), (x_{11} - x_{12})] - F_1[(x_{11} - x_{12})] + \varphi_1[(\dot{x}_{12} - \dot{\xi}_1)] + \\ &+ f_1[(x_{12} - \xi_1)] = 0, \\ m_2 \ddot{x}_{22} - \Phi_2[(\dot{x}_{21} - \dot{x}_{22}), (x_{21} - x_{22})] - F_2[(x_{21} - x_{22})] + \varphi_2[(\dot{x}_{22} - \dot{\xi}_2)] + \\ &+ f_2[(x_{22} - \xi_2)] = 0, \end{aligned} \quad (1)$$

kde

$$M_1 = \frac{(\varrho^2 + b^2) M}{L^2}, \quad M_2 = \frac{(\varrho^2 + a^2) M}{L^2}, \quad M_3 = \frac{(ab - \varrho^2) M}{L^2}.$$

Tyto rovnice lze při zachování určitých podmínek dále zjednodušovat. Je-li totiž $\varrho^2 = ab$, pak je přirozeně $M_3 = 0$ a celá soustava se rozpadá na dva samostatné systémy přední a zadní nápravy, které mají pól otáčení vždy v protilehlé nápravě. Theoreticky ovšem toto platí pouze v případě, že těžiště vozidla leží na spojnici působíště síly s jedné nápravy a osy rotace kolem nápravy druhé, což není splněno ve skutečnosti, ovšem tyto vlivy jsme při sestavování rovnic (1) neuvažovali. Podle měření provedených v ÚVMV je podmínka $\varrho^2 = ab$ u většiny osobních vozů poměrně velmi dobře splněna. Na př. u vozu

Škoda 440 se poměr c^2/ab mění od 1,06 při nezátíženém voze do 0,92 při zatížení, u vozu Morris Minor od 1,06 do 0,91 atd. V těchto případech je tedy rozklad ve dvě na sobě nezávislé soustavy zcela oprávněný a typickým modelem automobilu je systém se dvěma stupni volnosti s pružnou vazbou.

K druhému zjednodušení dospějeme, porovnáme-li odpérovanou a neodpérovanou hmotu a tuhosti hlavních per a pneumatik. U normálních osobních vozů bývá poměr odpérované hmoty k neodpérované, připadající na jedno kolo, mezi 7 až 10, tuhost pneumatiky je zhruba 10krát větší než tuhost hlavní zpružiny. Je z toho tedy vidět, že základní (linearisovaný) parciální kmitočet neodpérované hmoty je přibližně 10krát větší než parciální kmitočet odpérované hmoty. Kromě toho je neodpérovaná hmota poměrně značně utlumená jak na pneumatice (kde přistupují vlivy kinematiky zavěšení kol) tak i tlumičem. Při volných kmitech systému i při kmitech vynucených, při nichž excitace jednotlivá nebo periodická má frekvenci od 0 do zhruba poloviny základního parciálního kmitočtu neodpérované hmoty, proto můžeme tuhost pneumatik a neodpérované hmoty zanedbat. Předpokládáme pak, že neodpérovaná hmota přesně sleduje povrch vozovky. Systém podle obr. 1 pak nabývá rovněž pouze dvou stupňů volnosti, ovšem tentokrát se setrvačnou vazbou. U soustavy rovnic (1) se to projeví tím způsobem, že spodní dvě rovnice odpadnou a v horních je $x_{12} = \xi_1$ a $x_{22} = \xi_2$. Pokud je pak zároveň splněna podmínka $M_3 = 0$, dostáváme systém pouze s jedním stupněm volnosti. Řešení tohoto jednoduchého případu je známo z literatury a to jak pro vlastní kmity, tak i pro případ vynucených kmitů s periodickým nebo jednorázovým buzením.

Budící vlivy, způsobující rozkmitání mechanické soustavy automobilu, jsou různého druhu a mohou být vnitřní (motor atd.) i vnější (vozovka, brzdění, zatáčení atd.). Uvažujeme-li však vlastní odpružení vozidla, musíme vycházet pouze z nerovností vozovky, což je pochopitelně také složka hlavní. Při volbě jak výpočtového, tak i modelového schématu je nutno v první řadě zjistit, jaký mají nerovnosti na vozovce charakter, t. j. zachovávají-li určitý periodický sled nebo jsou-li rozloženy nepravidelně.

Z měření provedeného ve ÚVMV ing. Škopem vyplynulo, že na silnicích se vyskytují hlavně nepravidelně rozložené nerovnosti, bez jakékoliv vnitřní zákonitosti. Při všech úvahách proto vycházíme z nerovnosti jednorázové jako typické, která na př. může být tvořena funkcí tvaru

$$\xi = \frac{a}{2} \left(1 - \cos \frac{2\pi v}{d} t \right),$$

kde $\xi = 0$ pro $t \leq 0$ a pro $t \geq \frac{d}{v}$ (v je rychlost vozu, d délka překážky). Při grafickém řešení ovšem její tvar může být libovolný. Stačí pouze, aby funkce byla spojitá a jednoznačná.

V těchto stylisovaných poměrech je tedy systém, který je původně v klidu, nabuzen a opět volně dokmitává bez dalšího popudu. Ve skutečnosti ovšem toto volné dokmitávání málokdy nastane a kolo vozidla najede ihned na určitou další nerovnost. Podle délky a vzdálenosti po sobě jdoucích překážek a rychlosti vozidla se jejich výsledné účinky na vůz mohou buď sčítat nebo odečítat. Uvažovat tyto vlivy však není možno.

Při dalších vývodech se tedy budeme zabývat systémy s jedním stupněm volnosti a se dvěma stupni volnosti, s pružnou a setrvačnou vazbou, které jsou buzeny jednorázovou nerovností.

3. Grafické řešení systému s jedním stupněm volnosti ve fázové rovině

Diferenciální rovnici pro nelineární systém s jedním stupněm volnosti možno napsat ve tvaru

$$M\ddot{x} + \Phi[\dot{x} - \dot{\xi}], (x - \xi)] + F[(x - \xi)] = 0. \quad (2)$$

Nelineární funkce mohou mít libovolný i nespojitý průběh. Musí to však být křivky jednoznačné, graficky znázornitelné. Pro zjednodušení dalšího postupu, a jak konečně také normálně při návrhu pérování vychází, můžeme charakteristiku zpružiny $P = F[(x - \xi)]$ rozložit na tvar $P = c(x - \xi) + G[(x - \xi)]$. Zavedeme-li dále do rovnice (2) substituci $\eta = x - \xi$, t. j. relativní odlehlost hmoty a nerovnosti, dostáváme

$$\ddot{\eta} + \frac{1}{M}\Phi[(\dot{\eta}, \eta)] + \Omega^2\eta + \frac{1}{M}G[\eta] = -\ddot{\xi}, \quad (3)$$

kde $\Omega^2 = \frac{c}{M}$.

Označíme-li $\eta = y$, $\dot{\eta} = \Omega\bar{y}$, můžeme vztah (3) vyjádřit ve tvaru dvou rovnic prvního řádu

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \Omega\bar{y}, \\ \dot{\bar{y}} &= -\frac{1}{\Omega M}\Phi[(\Omega\bar{y}, y)] - \Omega\bar{y} - \frac{1}{\Omega M}G(y) - \frac{1}{\Omega}\ddot{\xi}. \end{aligned} \quad (4)$$

Grafickým způsobem se tyto rovnice řeší nejlépe ve fázové rovině, t. j. v rovině $(\bar{y}0y)$. Již také proto, že je-li $\Phi = G = 0$, $\ddot{\xi} = 0$ je její tvar

$$\bar{y} d\bar{y} + y dy = 0, \quad (5)$$

což je rovnice pro tečny ke kružnici a tedy její integrální křivkou v rovině $(y0y)$ je kružnice.

Rovnice směrnice tečny k_t k integrální křivce ve fázové rovině podle rovnice (4) zní

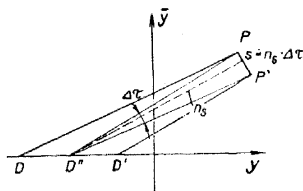
$$k_t = \frac{d\bar{y}}{dy} = -\frac{y + \frac{1}{c}\{\Phi[(\Omega\bar{y}, y)] + G(y)\} + \frac{1}{\Omega^2}\ddot{\xi}}{\bar{y}} \quad (6)$$

úhel ve fázové rovině. Stejně $d\bar{y} = \dot{\bar{y}} \frac{1}{\Omega} \cdot d\tau = \vec{Q}\vec{D} d\tau$. Umocněním a sečtením obou vztahů dostáváme elementární úsek ds na integrální křivce

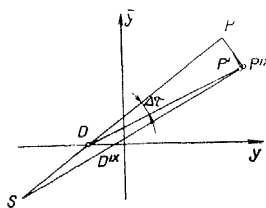
$$ds^2 = (dy)^2 + (d\bar{y})^2 = (d\tau)^2(\vec{Q}\vec{P}^2 + \vec{Q}\vec{D}^2) = (d\tau)^2 \vec{D}\vec{P}^2, \quad (8)$$

$$ds = \vec{D}\vec{P} \cdot d\tau.$$

Pootočení normály kolem její paty D o $d\tau$ je úměrné časovému intervalu $\Omega \cdot dt$ nebo, přejdeme-li na praktické provádění pro časové intervaly Δt , je $\Delta\tau = \Omega \Delta t$. Smysl otáčení určíme tak, aby při kladném \bar{y} bylo $dy > 0$. V daném

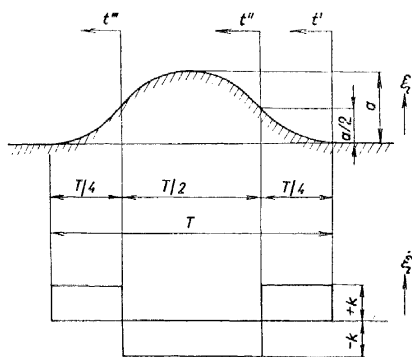


Obr. 4a.



Obr. 4b.

případě (obr. 2) je kladný přírůstek času charakterisován rotací normály ve smyslu ručiček hodinových. Známe-li tedy normálu a tečnu v určitém bodě P , je možno sousední bod P' na tečně nalézt pootočením normály $\vec{D}\vec{P}$ o úhel $\Delta\tau$. Tím je pak $ds = \vec{P}\vec{P}' \cong \vec{D}\vec{P} \cdot d\tau$. Čím je tento úhel menší, tím pochopitelně je výsledek přesnější. Je-li rozdíl délek normál $|\vec{D}\vec{P} - \vec{D}'\vec{P}'|$ příliš velký, je nutno brát určitou odhadnutou střední hodnotu normály v daném intervalu $\Delta\tau$ a z této hodnoty vycházet pro určení velikosti dráhy s na tečně z bodu P (obr. 4a).



Obr. 5.

Pokud \bar{y} zůstává přibližně konstantní (pohyb má v daném časovém intervalu přibližně konstantní rychlost), je též možno použít vztahu $\Delta y = \bar{y} \Delta\tau$.

Při tomto způsobu řešení dostáváme tedy integrální křivku složenou z úseků na tečnách v jednotlivých bodech.

1. Můžeme však také použít konstrukce přesnější, ale o něco pracnější. Stejným způsobem, jak bylo popsáno, stanovíme k bodu P sousední bod P'^* a v něm normálu. V průsečíku obou normál z bodů P a P'^* leží střed oskulační kružnice S (obr. 4b), na níž teprve z paty normály D vynesením úhlu $\Delta\tau$ najdeme skutečný bod P' . Příklad skutečného výpočtu je uveden dále.

V každém časovém intervalu $\Delta\tau$ považujeme ξ za konstantní a bereme jeho určitou střední hodnotu.

Nejjednodušší možný tvar překážky v tomto případě bude ovšem takový, který se skládá z úseků s konstantním zrychlením $|\ddot{\xi}| = |z|$. Normálně dělíme překážku na tři úseky. Řešený pohyb se rozpadá na tři pohyby vlastními kmity kolem nových statických poloh. Bereme-li za základ výšku překážky a (obr. 5) a dobu potřebnou k jejímu přejezdu $T = \frac{d}{v}$, pak absolutní velikost zrychlení $|z|$ je dána jako

$$z = \frac{16a}{T^2}. \quad (9)$$

V prvním a třetím úseku je zrychlení kladné, v druhém záporné. Výchylka překážky ξ je popisována rovnicemi

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{8a}{T^2} t'^2 && \text{pro čas } 0 \leq t' \leq T/4, \\ \xi &= 8a \left[-\frac{1}{T^2} t''^2 + \frac{1}{2T} t'' + \frac{1}{16} \right] && 0 \leq t'' \leq T/2, \\ \xi &= 8a \left[\frac{1}{T^2} t'''^2 - \frac{1}{2T} t''' + \frac{1}{16} \right] && 0 \leq t''' \leq T/4 \end{aligned} \quad (10)$$

V řešení podle obr. 2 dostáváme současně velikosti výchylek, rychlostí i zrychlení

$$\begin{aligned} x &= \xi + \overline{OQ}, \\ \dot{x} &= \dot{\xi} + \Omega \overline{QP}, \\ \ddot{x} &= \ddot{\xi} + \Omega^2 \overline{QD}, \end{aligned} \quad (11)$$

v jednotlivých zvolených časových intervalech. Tím získáváme hledané závislosti $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}(t)$, $\ddot{x} = \ddot{x}(t)$.

4. Systém se dvěma stupni volnosti a pružnou vazbou

Z rovnic (1) při $M_3 = 0$ vycházejí rovnice dané soustavou ve tvaru

$$M\ddot{x}_1 + \Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), (x_1 - x_2)] + F[(x_1 - x_2)] = 0, \quad (12)$$

$$m\ddot{x}_2 - \Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), (x_1 - x_2)] - F[(x_1 - x_2)] + \varphi[(\dot{x}_2 - \dot{\xi})] + f[(x_2 - \xi)] = 0,$$

kteřé představují soustavu podle obr. 6.

Základní zjednodušení, které můžeme v této soustavě provést, je předpoklad lineárního pružení p a tlumení t_l pneumatiky. Ačkoliv pneumatika ve skutečnosti lineární charakteristiku nemá, je rozdíl mezi jejími statickými a dynamickými vlastnostmi, které ještě dobře neznáme, takový, že je zbytečné počítat s přesnými statickými funkcemi. Pokud by bylo nutno určitou nelinearitu uva-

žovat, nezmění se na dále uváděném postupu prakticky nic, bylo by pouze nutno provést ještě jednu substituci za rozdíl $(x_2 - \xi)$, obdobně, jak jsme prováděli pro jeden stupeň volnosti.

V dalším tedy uvažujeme pneumatiku, u níž

$$p \equiv f[(x_2 - \xi)] = c_2(x_2 - \xi) \quad \text{a} \quad t_l \equiv q[(\dot{x}_2 - \dot{\xi})] = k_2(\dot{x}_2 - \dot{\xi}).$$

Výška nerovnosti ξ je dána jako funkce času $\xi = h_1(t)$. Tím v rovnicích (12) je excitační funkce dána explicitně a má tvar

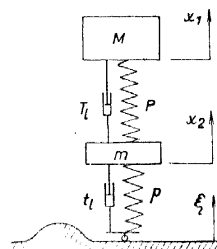
$$h_2(t) = c_2\xi + k_2\dot{\xi}. \quad (13)$$

Funkci $F[(x_1 - x_2)]$ rozkládáme opět na tvar

$$F[(x_1 - x_2)] = c_1(x_1 - x_2) + G[(x_1 - x_2)].$$

Rovnice (12) přejdou na

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + \Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), (x_1 - x_2)] + c_1(x_1 - x_2) + \\ + G[(x_1 - x_2)] = 0, \\ m\ddot{x}_2 - \Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), (x_1 - x_2)] - c_1(x_1 - x_2) - \\ - G[(x_1 - x_2)] + k_2\dot{x}_2 + c_2x_2 = h_2(t). \end{aligned} \quad (14)$$



Obr. 6.

Zavedeme-li do nich novou proměnnou $y = (x_1 - x_2)$ dostaneme po úpravě

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + \ddot{y} + \frac{c_1}{M}y + \frac{1}{M}\Phi[(\dot{y}, y)] + \frac{1}{M}G[(y)] = 0, \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m}\dot{x}_2 + \frac{c_2}{m}x_2 - \frac{c_1}{m}y - \frac{1}{m}\Phi[(\dot{y}, y)] - \frac{1}{m}G[(y)] = \frac{1}{m}h_2(t). \end{aligned} \quad (15)$$

Odečtením druhé rovnice od první, obdržíme soustavu dvou rovnic, z nichž každá obsahuje druhou derivaci pouze jedné proměnné

$$\begin{aligned} \ddot{y} + c_1\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)y + \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\Phi[(y)] + \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)G[(y)] - \frac{c_2}{m}x_2 - \\ - \frac{k_2}{m}\dot{x}_2 = -\frac{1}{m}h_2(t), \\ \ddot{x}_2 + \frac{k_2}{m}\dot{x}_2 + \frac{c_2}{m}x_2 - \frac{c_1}{m}y - \frac{1}{m}\Phi[(\dot{y}, y)] - \frac{1}{m}G[(y)] = \frac{1}{m}h_2(t). \end{aligned} \quad (16)$$

Substitucí $y = y_1$, $\dot{y} = \bar{y}_1 \sqrt{c_1\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)} = \Omega_1\bar{y}_1$ a $x_2 = y_2$, $\dot{x}_2 = \bar{y}_2 \sqrt{\frac{c_2}{m}} = \Omega_2\bar{y}_2$ přejdou rovnice (16) do tvaru čtyř rovnic prvního řádu

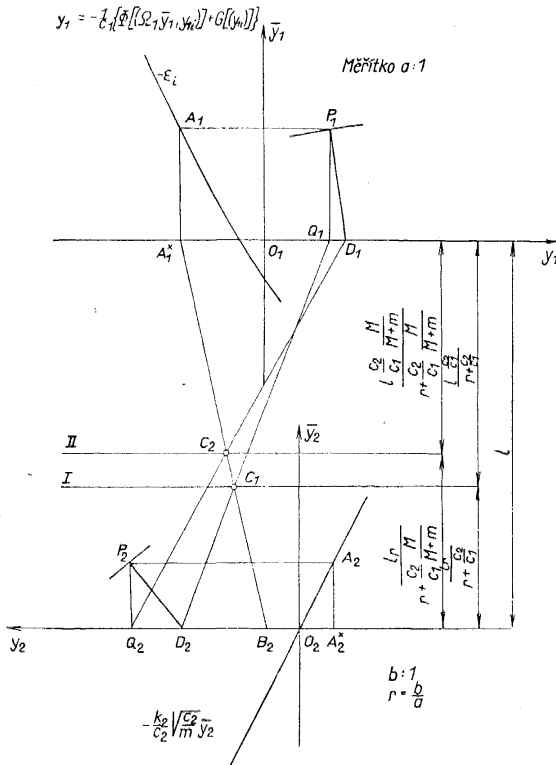
$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \Omega_1\bar{y}_1, \\ \dot{\bar{y}}_1 = -\frac{1}{\Omega_1}\left[c_1\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)y_1 + \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)\Phi[\Omega_1\bar{y}_1, y_1] + \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right)G(y_1) - \right. \\ \left. - \frac{c_2}{m}y_2 - \frac{k_2}{m}\Omega_2\bar{y}_2 + \frac{1}{m}h_2(t)\right], \end{aligned}$$

$$\dot{y}_2 = \Omega_2 \bar{y}_2, \quad \dot{\bar{y}}_2 = -\frac{1}{\Omega_2} \left[\frac{k_2 \Omega_2}{m} \bar{y}_2 + \frac{c_2}{m} y_2 - \frac{c_1}{m} y_1 - \frac{1}{m} \Phi[\Omega_1 \bar{y}_1, y_1] - \frac{1}{m} G(y_1) - \frac{1}{m} h_2(t) \right]. \quad (17)$$

Směrnice normál k integrálním křivkám ve fázové rovině lze pak vyjádřit ve tvaru

$$k_{n1} = \frac{\bar{y}_1}{y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G[(y_1)] - \frac{c_2}{c_1} \frac{M}{M+m} \left[y_2 + \frac{k_2}{c_2} \Omega_2 \bar{y}_2 - \frac{1}{c_2} h_2(t) \right]},$$

$$k_{n2} = \frac{\bar{y}_2}{y_2 + \frac{k_2}{c_2} \Omega_2 \bar{y}_2 - \frac{1}{c_2} h_2(t) - \frac{c_1}{c_2} \left\{ y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G[(y_1)] \right\}}. \quad (18)$$



Obr. 7.

Při řešení postupujeme tím způsobem, že nejprve nakreslíme pod sebe ve zvolené vzdálenosti l fázové roviny $(\bar{y}_1, 0, y_1)$ a $(\bar{y}_2, 0, y_2)$ (obr. 7). Pro snazší konstr. keci kreslíme kladné osy y_2 a y_1 v opačných směrech. (Poznámka: Při stejném

smyslu os y_1 a y_2 by přímkou I a II a tím i průsečíky C_1 a C_2 neležely uvnitř mezi osami y_1 a y_2 a v některých případech by mohly padnout mimo papír.) Osy \bar{y}_1 a \bar{y}_2 , které jsou rovněž rovnoběžné, nemusí ležet v jedné přímce, ale jejich polohu lze volit libovolně.

Pro souřadnice y_1, \bar{y}_1 můžeme volit měřítko ($a : 1$) jiné, než pro y_2, \bar{y}_2 ($b : 1$). Poměr obou měřítek nazveme $r = b : a$.

Do nakreslených souřadnic vyneseme síť pomocných křivek pro různá pevná y_{1i} o rovnici

$$y_1 = -\frac{1}{c_1} \{ \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_{1i})] + G[(y_{1i})] \} = -\varepsilon_{1i}$$

a přímkou $y_2 = -\frac{k_2}{c_2} \Omega_2 \bar{y}_2 = -\varepsilon_2$.

V okamžiku t_0 necht' je stav soustavy definován body $P_1(y_1, \bar{y}_1)$ a $P_2(y_2, \bar{y}_2)$ a vnější síla je $h_2(t_0)$. Na obr. 7 udává úsečka $\overline{A_1 P_1}$ (resp. $\overline{A_1^* Q_1}$) velikost členu

$$\overline{A_1 P_1} = y_1 + \varepsilon_1.$$

Úsečka $\overline{A_2 P_2}$ (resp. $\overline{A_2^* Q_2}$) pak velikost členu ($y_2 + \varepsilon_2$).

Od bodu A_2^* vyneseme ve směru osy y_2 a v příslušném měřítku hodnotu $\frac{1}{c_2} h_2(t_0)$ a obdržíme bod B_2 .

Dále zakreslíme do obrázku dvě pomocné přímkou I a II, rovnoběžné s osami y_1 a y_2 a to ve vzdálenostech, které jsou udány na obrázku 7. Příмка I dělí vzdálenost os v poměru $r / \frac{c_2}{c_1}$, příмка II v poměru $r / \frac{c_2}{c_1} \frac{M}{M+m}$. Průsečíky těchto pomocných přímek se spojnicí $\overline{A_1^* B_2}$ jsou označeny C_1, C_2 . Promítneme-li bod Q_1 pomocí bodu C_1 na osu y_2 , dostáváme bod D_2 . Úsečka $\overline{B_2 D_2}$ udává v měřítku osy y_2 hodnotu

$$\overline{B_2 D_2} = \frac{c_1}{c_2} \left\{ y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G[(y_1)] \right\}.$$

Podobně promítnutím úsečky $\overline{B_2 Q_2}$ bodem C_2 obdržíme úsečku $\overline{A_1^* D_1}$, která v měřítku osy y_1 udává hodnotu

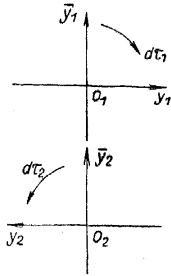
$$A_1^* D_1 = \frac{c_2}{c_1} \frac{M}{M+m} \left[y_2 + \frac{k_2}{c_2} \Omega_2 \bar{y}_2 - \frac{1}{c_2} h_2(t_0) \right].$$

Úsečka $\overline{D_1 Q_1} = \overline{A_1 Q_1} - \overline{A_1 D_1}$ určuje velikost jmenovatele v první rovnici (18) a úsečka $\overline{D_2 Q_2} = \overline{B_2 Q_2} - \overline{B_2 D_2}$ určuje velikost jmenovatele druhé rovnice. Znaménko výrazu ve jmenovateli bereme za kladné, souhlasí-li smysl vektoru $\overline{D_1 Q_1}$ (resp. $\overline{D_2 Q_2}$) se smyslem kladné osy y_1 (resp. y_2).

Přímky $\overline{D_1 P_1}$ a $\overline{D_2 P_2}$ tvoří normály integrálních křivek ve fázových rovinách a kolmice na tyto přímky jsou tečny hledaných integrálních křivek.

Porovnáme-li rovnice (17) se jmenovateli v rovnicích (18), vidíme, že úsečky $\overline{D_1 Q_1}$ a $\overline{D_2 Q_2}$ udávají velikosti druhých derivací v čase t_0 v příslušných měřítkách

$$\frac{1}{\Omega_1^2} a\ddot{y} = \frac{1}{\Omega_1} a\dot{y}_1 = -\overline{D_1 Q_1} = \overline{Q_1 D_1}, \quad \frac{1}{\Omega_2^2} b\ddot{x}_2 = \frac{1}{\Omega_2} b\dot{y}_2 = -\overline{D_2 Q_2} = \overline{Q_2 D_2}.$$



Obr. 8.

Polohu sousedních bodů P_1' a P_2' nalezneme stejným způsobem, jako u systému s jedním stupněm volnosti. Pootočení normály $\overline{D_1 P_1'}$ o elementární úhel $d\tau_1$ (bezrozměrný čas) odpovídá změně času

$$d\tau_1 = \Omega_1 dt \quad (19)$$

a pootočení normály $\overline{D_2 P_2'}$ o elementární úhel $d\tau_2$ změně času

$$d\tau_2 = \Omega_2 dt. \quad (20)$$

Přechod na konečné časové intervaly byl již popsán dříve. Provádí se jako u systému s jedním stupněm volnosti pro každou rovinu zvlášť. Nutno však dáti pozor, že úhel $d\tau_2$ vynášíme v opačném smyslu než $d\tau_1$, jak odpovídá také opačnému smyslu kladné osy y_2 (obr. 8).

Za budící funkci $h_2(t)$ bereme její střední hodnotu v každém intervalu Δt .

Z nakreslených integrálních křivek pohybu ve fázových rovinách $(\bar{y}_1, 0, y_1)$ a $(\bar{y}_2, 0, y_2)$ obdržíme jednoduše průběh výchylek x_2, y rychlostí \dot{x}_2, \dot{y} a zrychlení \ddot{x}_2, \ddot{y} . Průběh výchylek dostaneme, když pro zvolené časy $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots$, pro které jsme sestrojovali jednotlivé body ve fázových rovinách, odměříme y_1 a y_2 -ové souřadnice. Pak (obr. 7)

$$x_2 = \overline{O_2 Q_2} \frac{1}{b}, \quad y = \overline{O_1 Q_1} \frac{1}{a}. \quad (21)$$

Rychlosti jsou s ohledem na zavedenou substituci

$$\dot{x}_2 = \overline{Q_2 P_2} \frac{1}{b} \Omega_2, \quad \dot{y} = \overline{Q_1 P_1} \frac{1}{a} \Omega_1 \quad (22)$$

a zrychlení

$$\ddot{x}_2 = \overline{Q_2 D_2} \frac{1}{b} \Omega_2^2, \quad \ddot{y} = \overline{Q_1 D_1} \frac{1}{a} \Omega_1^2. \quad (23)$$

Odečítáme-li z fázových rovin délky již s ohledem na příslušná měřítká, můžeme ve vzorcích (21, 22, 23) vynechat součinitele $\frac{1}{a}$ a $\frac{1}{b}$.

Absolutní pohyb hmoty M je určen součtem absolutního pohybu neodpírované hmoty m a relativního pohybu obou hmot, tedy

$$x_1 = x_2 + y, \quad \dot{x}_1 = \dot{x}_2 + \dot{y}, \quad \ddot{x}_1 = \ddot{x}_2 + \ddot{y}. \quad (24)$$

Jsou-li výchylky y_2 a y_1 opačného znaménka a přibližně stejně velké (to bývá v případě rychlého přejezdu krátké překážky), obdržíme x_1 jako rozdíl velkých, skoro stejných hodnot, což způsobí, že relativní chyba může být značná. Je proto v tomto případě výhodnější použít jiného postupu, při kterém vycházíme z upravené prvé rovnice (14). Plyne z ní

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= - \{c_1 y + \Phi[(y, y)] + G[(y)]\} \frac{1}{M} = \\ &= - \frac{c_1}{M} \left\{ y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G[(y_1)] \right\} = \frac{c_1}{M} \cdot \frac{1}{a} \cdot \overrightarrow{P_1 A_1}. \end{aligned} \quad (25)$$

Úsečka $\overrightarrow{P_1 A_1}$ (obr. 7) je úměrná zrychlení absolutního pohybu hmoty M . Rychlost \dot{x}_1 a výchylku x_1 dostaneme integrací průběhu zrychlení, kterou lze provést známými methodami (graficky, početně atd.).

Při řešení ve fázových rovinách je výhodné vždy po několika krocích zjistit výchylku x_1 i rychlost \dot{x}_1 jak na základě vztahů (25), tak i podle vzorců (24). Porovnáním takto obdržených hodnot, které mají být zhruba stejné, zkontrolujeme, zda jsme neudělali někde chybu, zda jsme správně odhadli střední hodnotu normály $\overrightarrow{D_1 P_1}$ a $\overrightarrow{D_2 P_2}$ a pod. Tato kontrola umožní odstranit chybu hned na začátku a často ušetří zbytečnou práci.

5. Odskok kola v systému se dvěma stupni volnosti a pružnou vazbou

Dotykový bod pneumatiky není na vozovce nijak mechanicky veden. Proto v určitých okamžicích se může silový styk mezi vozovkou a kolem přerušit a nastává odskok kola od vozovky.

Přerušení silového styku nastane v okamžiku, kdy

$$c_2(x_2 - \xi) + k_2(\dot{x}_2 - \dot{\xi}) = (M + m)g, \quad (26)$$

vycházíme-li pro x_2 ze statické polohy systému jako nulové. Protože v dané transformaci souřadnic (obr. 7) je $x_2 = y_2$, $\dot{x}_2 = \Omega_2 \bar{y}_2$ dostáváme s ohledem na vztah (13) tento výraz v podobě

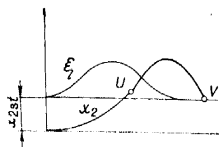
$$\left(y_2 + \frac{k_2}{c_2} \Omega_2 \bar{y}_2 \right) - \frac{h_2(t)}{c_2} = \frac{(M + m)g}{c_2}. \quad (27)$$

Hodnota $\left(y_2 + \frac{k_2}{c_2} \Omega_2 \bar{y}_2 \right)$ odpovídá (obr. 7) v měřítku $b : 1$ velikosti úsečky $\overrightarrow{A_2^* Q_2}$, výraz $\frac{1}{c_2} h_2(t)$ úsečce $\overrightarrow{A_2^* B_2}$ a hodnota $\frac{1}{c_2} (M + m)g$ dává statický průhyb pneumatiky x_{2st} . Odskok kola tedy nastane, je-li v dané grafické konstrukci

$$\overrightarrow{B_2 Q_2} = \overrightarrow{A_2^* Q_2} - \overrightarrow{A_2^* B_2} = |x_{2st}| \cdot b.. \quad (28)$$

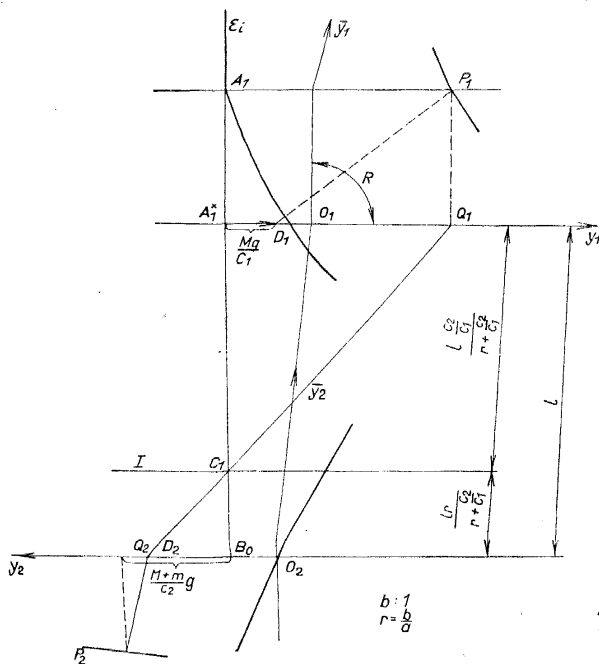
Tato podmínka stanoví počátek odskoku U (obr. 9), v některých případech i konec odskoku V . Většinou však bod V padne do oblasti, kdy $\xi = 0$, takže pro bod V platí pouze podmínka $x_2 \doteq x_{2st}$.

Sledujeme nyní pohyb systému v oblasti mezi body U a V . Proměnné x_1 a x_2 v rovnicích (14), z kterých jsme při dosud prováděném řešení vycházeli, měříme od klidové polohy, která se nastaví pod vlivem sil tíže Mg a mg . Rovněž síly $c_1(x_1 - x_2)$, $G[(x_1 - x_2)]$ atd. měříme od rovnovážného stavu, při kterém působí síla $P = (M + m)g$ na povrch vozovky.



Obr. 9.

V době odskoku kola od vozovky tato síla zmizí. Při řešení pohybu v takovém případě můžeme opět použít původních relativních souřadnic x_1, x_2 , musíme však — vzhledem k původně zvoleným počátkům deformací



Obr. 10.

a sil — nahradit v rovnicích (14) sílu $k_2\dot{x}_2 + c_2x_2 - h_2(t)$ konstantní hodnotou $(M + m)g$ (viz rov. 26).

Tím obdržíme

$$M\ddot{x}_1 + \Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), (x_1 - x_2)] + c_1(x_1 - x_2) + G[(x_1 - x_2)] = 0, \quad (29)$$

$$m\ddot{x}_2 - \Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2), (x_1 - x_2)] - c_1(x_1 - x_2) - G[(x_1 - x_2)] = - (M + m)g$$

Stejným postupem, použitým již u rovnic (15 ÷ 18) získáme směrnice normál k integrálním křivkám ve fázové rovině

$$k_{n1} = \frac{\bar{y}_1}{y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G[(y_1)] - \frac{M}{c_1} g},$$

$$k_{n2} = \frac{\bar{y}_2}{\frac{M+m}{c_2} g - \frac{c_1}{c_2} \left\{ y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G[(y_1)] \right\}}. \quad (30)$$

Můžeme tedy použít stejného postupu jako dříve. V dříve nakreslených osách y_1, \bar{y}_1 a y_2, \bar{y}_2 , v kterých jsme řešili pohyb systému až do okamžiku odskoku, pokračujeme dále s řešením na základě rovnic (30). Tyto rovnice lze přepsat do tvaru

$$k_{n1} = \frac{\overrightarrow{Q_1 P_1}}{A_1^* \overrightarrow{Q_1} - A_1^* \overrightarrow{D_1}} = \frac{\overrightarrow{Q_1 P_1}}{D_1 \overrightarrow{Q_1}}, \quad (31)$$

$$k_{n2} = \frac{\overrightarrow{Q_2 P_2}}{B_0 \overrightarrow{Q_2} - B_0 \overrightarrow{D_2}} = \frac{\overrightarrow{Q_2 P_2}}{D_2 \overrightarrow{Q_2}}, \quad (32)$$

kde označení úseček je provedeno v soulase s obr. 10. Řešení je jednodušší než v případě, že pneumatika je v dotyku s vozovkou. Pohyb v souřadnicích y_2, \bar{y}_2 neovlivňuje pohyb v souřadnicích y_1, \bar{y}_1 , který lze tedy řešit jako pohyb systému o jednom stupni volnosti, na který působí pouze konstantní síla. Rovněž řešení ve fázové rovině y_2, \bar{y}_2 se zjednoduší oproti dříve probíranému případu, neboť proměnlivé síly $c_2 y_2$ a $k_2 \Omega_2 \bar{y}_2$ nahrazujeme konstantní silou $(M+m)g$ (úsečka $B_0 \overrightarrow{Q_2}$). Promítání úseček z jedné fázové roviny do druhé provádíme nyní pouze jednou, pomocí přímkou I; přímkou II (viz obr. 7) nepoužíváme.

6. Systém se dvěma stupni volnosti a setrvačnou vazbou

Základní dynamické rovnice pro systém se dvěma stupni volnosti a setrvačnou vazbou plynou z rovnic (1), kde pneumatiky považujeme za naprosto tuhé (obr. 11) jako

$$M_1 \ddot{x}_1 + M_3 \ddot{x}_2 + \Phi_1[(\dot{x}_1 - \dot{\xi}_1), (x_1 - \xi_1)] + c_1(x_1 - \xi_1) + G_1[(x_1 - \xi_1)] = 0,$$

$$M_3 \ddot{x}_1 + M_2 \ddot{x}_2 + \Phi_2[(\dot{x}_2 - \dot{\xi}_2), (x_2 - \xi_2)] + c_2(x_2 - \xi_2) + G_2[(x_2 - \xi_2)] = 0. \quad (33)$$

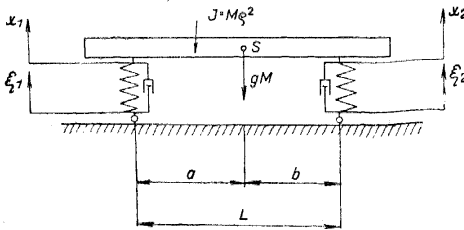
Tyto rovnice můžeme lineární transformací převést do tvaru

$$\ddot{x}_1 \left(M_1 - \frac{M_3^2}{M_2} \right) + \Phi_1[(\dot{x}_1 - \dot{\xi}_1), (x_1 - \xi_1)] + c_1(x_1 - \xi_1) + G_1[(x_1 - \xi_1)] -$$

$$- \frac{M_3}{M_2} \{ \Phi_2[(\dot{x}_2 - \dot{\xi}_2), (x_2 - \xi_2)] + c_2(x_2 - \xi_2) + G_2[(x_2 - \xi_2)] \} = 0,$$

$$\ddot{x}_2 \left(M_2 - \frac{M_3^2}{M_1} \right) + \Phi_2[(\dot{x}_2 - \dot{\xi}_2), (x_2 - \xi_2)] + c_2(x_2 - \xi_2) + G_2[(x_2 - \xi_2)] - \\ - \frac{M_3}{M_1} \{ \Phi_1[(\dot{x}_1 - \dot{\xi}_1), (x_1 - \xi_1)] + c_1(x_1 - \xi_1) + G_1[(x_1 - \xi_1)] \} = 0. \quad (34)$$

Zavedením substitucí $y_1 = x_1 - \xi_1$, $y_2 = x_2 - \xi_2$, $\bar{y}_1 \Omega_1 = \dot{x}_1 - \dot{\xi}_1$, $\bar{y}_2 \Omega_2 = \dot{x}_2 - \dot{\xi}_2$ (resp. $\tau_1 = \Omega_1 t$, $\tau_2 = \Omega_2 t$), kde



Obr. 11.

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{c_1}{M_1}} \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 M_2 - M_3^2}}, \\ \Omega_2 = \sqrt{\frac{c_2}{M_2}} \sqrt{\frac{M_1 M_2}{M_1 M_2 - M_3^2}}, \quad (35)$$

se rovnice (34) zjednoduší na vztahy

$$\dot{y}_1 = \Omega_1 \bar{y}_1, \\ \ddot{y}_1 + y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi_1[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \\ + \frac{1}{c_1} G_1[(y_1)] - \frac{M_3}{M_2} \frac{c_2}{c_1} \left\{ y_2 + \frac{1}{c_2} \Phi_2[(\Omega_2 \bar{y}_2, y_2)] + \frac{1}{c_2} G_2[(y_2)] \right\} = -\frac{1}{\Omega_1^2} \ddot{\xi}_1, \\ \dot{y}_2 = \Omega_2 \bar{y}_2, \\ \ddot{y}_2 + y_2 + \frac{1}{c_2} \Phi_2[(\Omega_2 \bar{y}_2, y_2)] + \frac{1}{c_2} G_2[(y_2)] - \frac{M_3}{M_1} \frac{c_1}{c_2} \left\{ y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi_1[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{c_1} G_1[(y_1)] \right\} = -\frac{1}{\Omega_2^2} \ddot{\xi}_2, \quad (36)$$

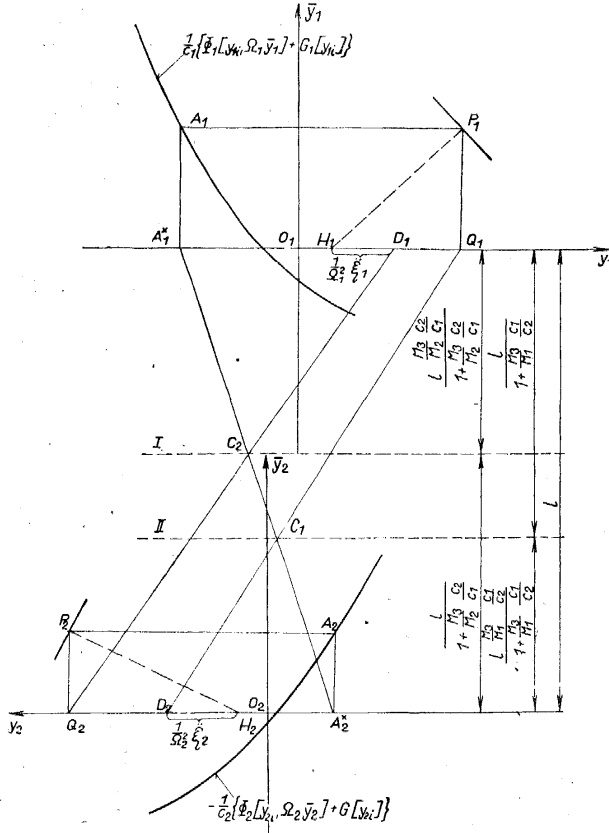
kteřé jsou stejného typu jako rovnice (17). Lze je tedy řešit obdobným postupem. Směrnice normál k integračním křivkám ve fázové rovině jsou dány zlomky

$$k_{n1} = \frac{\bar{y}_1}{A}, \\ A = y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi_1[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \frac{1}{c_1} G_1[(y_1)] - \frac{M_3}{M_2} \frac{c_2}{c_1} \left\{ y_2 + \frac{1}{c_2} \Phi_2[(\Omega_2 \bar{y}_2, y_2)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{c_2} G_2[(y_2)] \right\} + \frac{1}{\Omega_1^2} \ddot{\xi}_1, \\ k_{n2} = \frac{\bar{y}_2}{B}. \\ B = y_2 + \frac{1}{c_2} \Phi_2[(\Omega_2 \bar{y}_2, y_2)] + \frac{1}{c_2} G_2[(y_2)] - \frac{M_3}{M_1} \frac{c_1}{c_2} \left\{ y_1 + \frac{1}{c_1} \Phi_1[(\Omega_1 \bar{y}_1, y_1)] + \right. \\ \left. + \frac{1}{c_1} G_1[(y_1)] \right\} + \frac{1}{\Omega_2^2} \ddot{\xi}_2 \quad (37)$$

resp.

$$k_{n1} = \frac{\overrightarrow{Q_1 P_1}}{A_1^* Q_1 - A_1^* D_1 + H_1 D_1} = \frac{\overrightarrow{Q_1 P_1}}{H_1 Q_1},$$

$$k_{n2} = \frac{\overrightarrow{Q_2 P_2}}{A_2^* Q_2 - A_2^* D_2 + H_2 D_2} = \frac{\overrightarrow{Q_2 P_2}}{H_2 Q_2}, \quad (38)$$



Obr. 12.

kde vektory $\overrightarrow{Q_i P_i}$, $\overrightarrow{A_i^* Q_i}$, $\overrightarrow{A_i^* D_i}$, ... ($i = 1, 2$) označují úsečky, popsané na obr. 12 stejnými písmeny. Měřítka obou fázových rovin $(y_1, 0y_1)$, $(y_2, 0y_2)$ je výhodné volit v tomto případě stejná ($a : 1$). Výchylky, rychlosti a zrychlení jsou dány vztahy

$$y_i = \overrightarrow{O_i Q_i} \frac{1}{a},$$

$$\dot{y}_i = \overrightarrow{Q_i P_i} \frac{1}{a} \Omega_i,$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_i &= \overline{Q_i H_i} \frac{1}{a} \Omega_i^2, \\ x_i &= \xi_i + y_i. \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (39)$$

7. Systém se čtyřmi stupni volnosti

Na základě znalosti řešení obou případů dvou stupňů volnosti dá se řešit i úplný systém se čtyřmi stupni volnosti podle rovnic (1).

Postup při tomto řešení se však již stává dosti komplikovaným a nepřehledným. Pro dosažení vyhovující přesnosti je nutno volit kroky velmi malé a integrální křivky konstruovat pomocí oskulačních kružnic. Časové nároky na provedení celého řešení jsou značné.

8. Příklad: Řešení systému se dvěma stupni volnosti a pružnou vazbou

Postup grafického řešení diferenciálních rovnic, který byl odvozen v předešlých kapitolách, objasníme na příkladě řešení pohybu systému nakresleného na obr. 6. Pro jednoduchost předpokládejme, že funkce Φ v rovnici (14) je pouze funkcí rychlosti $(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)$, t. j. $\Phi[(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)]$ a že hlavní pružina P je lineární o tuhosti $c_1 = 15 \text{ kg/cm}$. Ostatní hodnoty soustavy jsou

$$\begin{aligned} c_2 &= 150 \text{ kg/cm}, & M &= 0,3 \text{ kgs}^2/\text{cm}, \\ k_2 &= 1 \text{ kgs/cm}, & m &= 0,03 \text{ kgs}^2/\text{cm}. \end{aligned}$$

Tlumič má charakteristiku

$$\begin{aligned} \Phi[(\dot{y})] &= 2\dot{y} + \Phi_1[(\dot{y})] & \dot{y} > 0 \\ \Phi[(\dot{y})] &= 0,5\dot{y} + \Phi_2[(\dot{y})] & \dot{y} < 0 \end{aligned}$$

kde Φ_1 a Φ_2 jsou nelineární funkce rychlosti \dot{y} , jejichž Taylorovy rozvoje okolo bodu $\dot{y} = 0$ neobsahují konstantu nebo lineární člen a začínají tedy vyššími mocninami rychlosti \dot{y} .

Nerovnost vozovky je popisována rovnicí

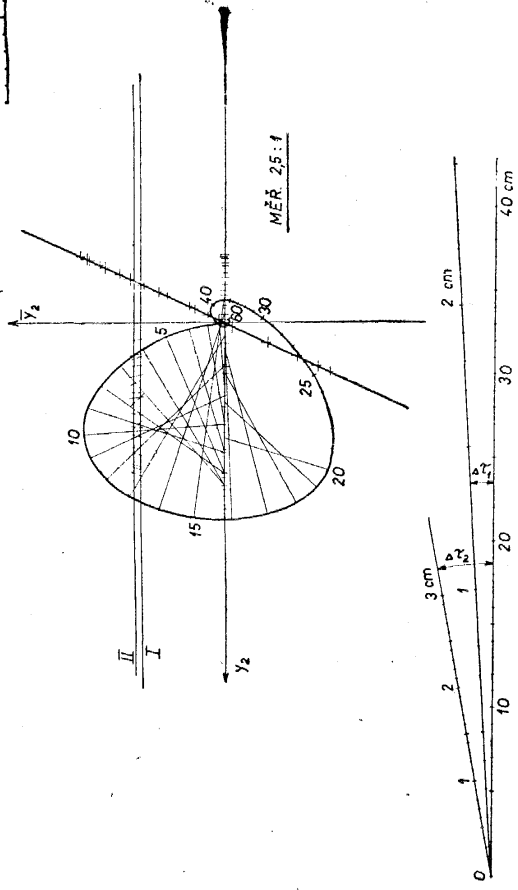
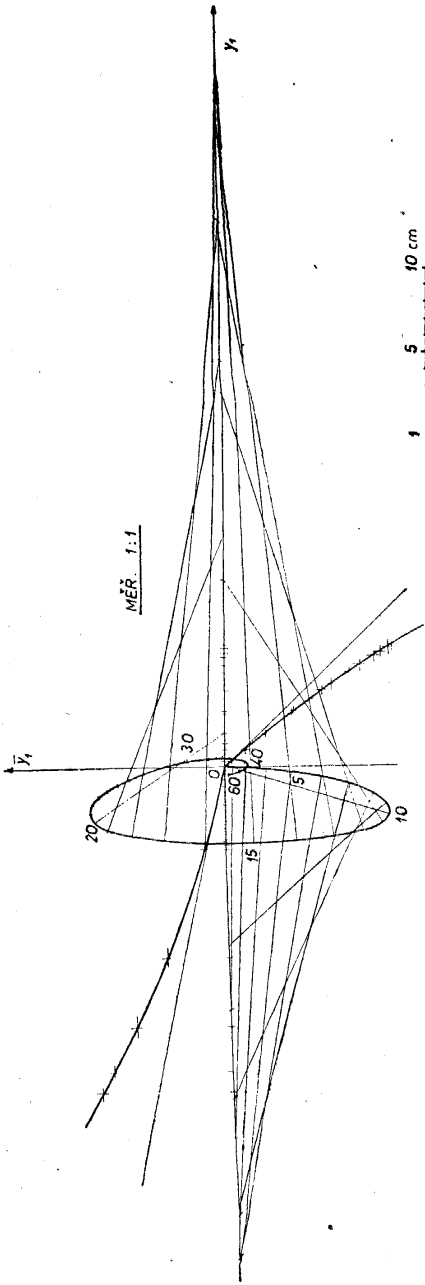
$$\xi = h_1(t) = 2,5(1 - \cos 40\pi t).$$

Při grafickém řešení potřebujeme průběh funkce $\frac{1}{c_2} h_2(t)$

$$\frac{1}{c_2} h_2(t) = h_1(t) + \frac{k_2}{c_2} h_1'(t) = 2,5(1 - \cos 40\pi t) + \frac{2\pi}{3} \sin 40\pi t$$

v intervalu $0 \leq t \leq \frac{1}{20}$ s. Pro jiná t platí

$$h_2 = h_1 = 0.$$

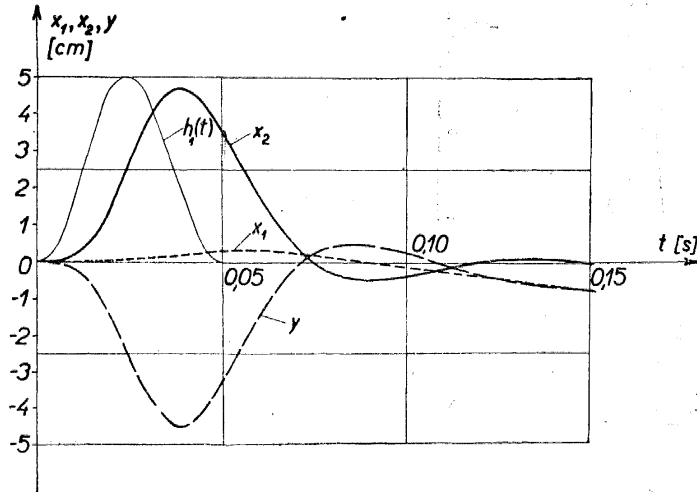


Obr. 13.

Bezrozměrné časy τ_1 a τ_2 jsou dány jako

$$\tau_1 = \sqrt{15 \left(\frac{1}{0,3} + \frac{1}{0,03} \right)} t = 23,452t, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{150}{0,03}} t = 70,7107t.$$

Zvolíme-li $\Delta t = 0,0025$ sec, bude $\Delta\tau_1 = 0,05863$ a $\Delta\tau_2 = 0,17677$. Dosazením číselných hodnot do rovnic (18) obdržíme



Obr. 14.

$$k_{n1} = \frac{\bar{y}_1}{y_1 + \frac{1}{15} \Phi_1[(23,45\bar{y}_1)] - \frac{1}{0,11} \left\{ y_2 + 0,471\bar{y}_2 - \frac{1}{150} h_2(t) \right\}}$$

$$k_{n2} = \frac{\bar{y}_2}{y_2 + 0,471\bar{y}_2 - \frac{1}{150} h_2(t) - \frac{1}{10} \left\{ y_1 + \frac{1}{15} \Phi_1[(23,45\bar{y}_1)] \right\}}$$

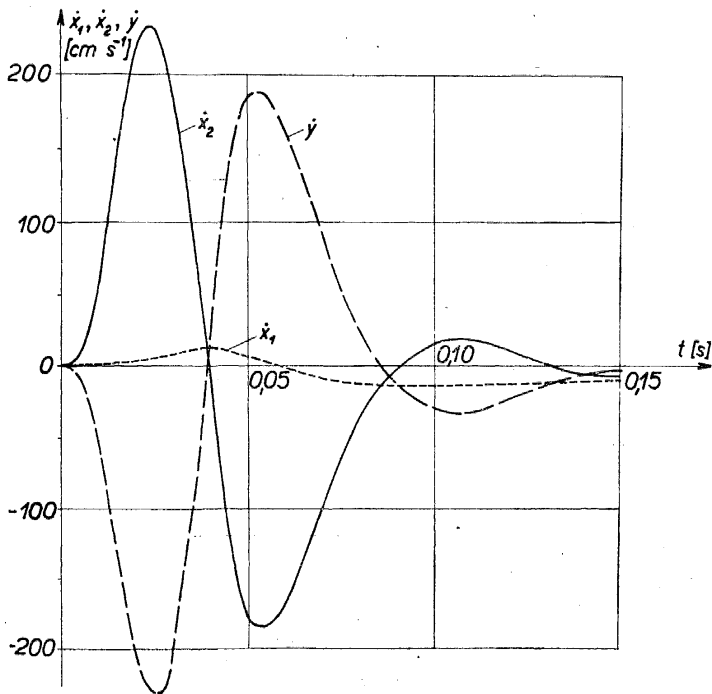
Vzdálenost os y_2 a y_1 na obr. 13 volíme $l = 25$ cm. Použijeme-li v souřadnicích y_2, \bar{y}_2 měřítko $2,5 : 1$ a v souřadnicích y_1, \bar{y}_1 měřítko $1 : 1$, je vzdálenost pomocné přímky I od osy y_1

$$\frac{25 \cdot 10}{2,5 + 10} = 20 \text{ cm},$$

vzdálenost přímky II od téže osy je

$$\frac{25 \cdot 10 \cdot \frac{10}{11}}{2,5 + 10 \frac{10}{11}} = 19,608 \text{ cm}.$$

Na obr. 13 je provedeno podrobné grafické řešení pohybových rovnic v intervalu $0 \leq t \leq 0,05$ s, t. j. po dobu přejíždění překážky (body 0÷20). Jsou zde nakresleny úhly $\Delta\tau_1$ a $\Delta\tau_2$, na jejichž společném vodorovném rameni je stupnice v cm. Vyneseme-li na tomto raměni délku normály, udává oblouk příslušný tomuto poloměru délku oblouku integrální křivky pro jednu nebo druhou ro-



Obr. 15.

vinu, odpovídající času $\Delta t = 0,0025$ s. Pro rychlejší odečítání mohou být na druhých ramenech úhlů $\Delta\tau_1$ a $\Delta\tau_2$ vyneseny příslušné délky oblouku v cm.

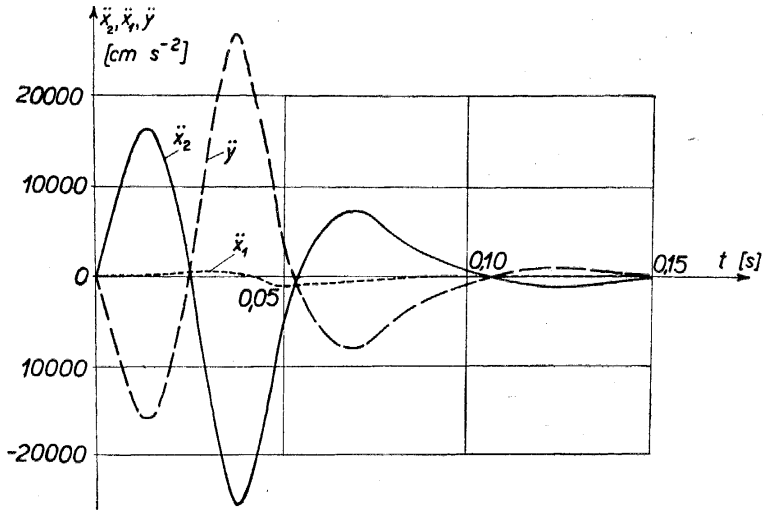
Křivka mezi body 20 a 60 znázorňuje výsledek grafického řešení pohybu systému za překážkou v časovém intervalu $0,05 \leq t \leq 0,15$ s (pomocné přímky a normály pro tuto etapu řešení nejsou zakresleny).

Při konstrukci integrálních křivek v obr. 13 pro názornost příkladu nebyl uvažován odskok kola od vozovky. Na obrázku 14 je překreslen pohyb x_2 neodpérované hmoty a relativní pohyb y a dále jako součet obou křivek průběh výchylek odpérované hmoty x_1 . Slabou čarou je ve stejném měřítku zakreslen i průběh nerovnosti $h_1(t)$.

Na obr. 15 a 16 jsou zakresleny rychlosti $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{y}$ a zrychlení $\ddot{x}_1, \ddot{x}_2, \ddot{y}$. Tyto

hodnoty byly získány z průběhu integrálních křivek v fázových rovinách (obr. 7, 13) dle vzorců (soustava cm, s):

$$\begin{aligned}x_2 &= \frac{1}{2,5} \overrightarrow{O_2 Q_2}, & y &= \overrightarrow{O_1 Q_1}, & x_1 &= x_2 + y, \\ \dot{x}_2 &= \frac{70,71}{2,5} \overrightarrow{Q_2 P_2}, & \dot{y} &= 23,452 \overrightarrow{Q_1 P_1}, & \dot{x}_1 &= \dot{x}_2 + \dot{y}, \\ \ddot{x}_2 &= \frac{5000}{2,5} \overrightarrow{Q_2 D_2}, & \ddot{y} &= 550 \overrightarrow{Q_1 D_1}, & \ddot{x}_1 &= \ddot{x}_2 + \ddot{y},\end{aligned}$$



Obr. 16.

9. Závěr

Popsané přibližné grafické metody k řešení pohybu nelineárních mechanických soustav se dvěma stupni volnosti mají poměrně široké použití ve všech oborech techniky, kde se s rovnicemi podobného typu setkáváme (na př. elektrotechnika, všeobecné strojírenství, regulační pochody v nelineárních soustavách atd.). Zabývali-li jsme se zde pouze speciálnějším případem řešení pohybu automobilu, je to s ohledem na zaměření a potřebu ÚVMV a jeho skupiny podvozků vozů.

Poněvadž při grafickém řešení nejsme omezeni požadavkem, aby nelineární závislosti, vyskytující se v soustavě, byly analytické, můžeme řešit i případy, které jinými metodami nelze řešit buď vůbec, nebo jen velmi obtížně. Další výhodou uvedeného řešení ve fázových rovinách je přehlednost výsledků, které obdržíme ve tvaru integrálních křivek, z nichž můžeme přímo odečítat velikost výchylek, rychlostí a zrychlení.

Nevýhodou popsané metody, která je společná pro všechny grafické postupy, je nemožnost jejího použití pro získání obecného řešení, neboť jí lze řešit pouze určité dané případy. Z vysvětlení je patrné, že výsledná chyba řešení je chybou součtovou, takže metoda není vhodná pro déletrvající nebo dokonce periodické pochody. Naproti tomu pro přechodové krátkodobé děje, trvající v časovém intervalu odpovídajícím maximálně jedné nebo dvěma periodám s nižší vlastní frekvencí systému, je uvedený postup výhodný, a to zejména pro získání relativních závislostí při změnách charakteristik nebo některého parametru soustavy.

LITERATURA

- [1] *Marquard*: Schwingungsdynamik des schnellen Strassenfahrzeuges. Girardet, Essen.
- [2] *Stoker*: Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems. New York, 1950.
- [3] *Jacobsen*: On General Method of Solving Second-Order Ordinary Differential Equations by Phase-Place Displacement. J. of Applied Mechanics, 1952.
- [4] *Роменберг*: Колебания автомобиля с различными типами независимых подвесок. Подвеска автомобиля. АИ СССР, 1951.
- [5] *Škop, Apetaur*: Grafické a graficko-mechanické metody pro řešení kmitavých pohybů motorových vozidel. Zpráva ÚVMV č. 32 601, Praha, 1955.
- [6] *Půst*: Grafické řešení přechodových dějů v nelineárních soustavách. Zpráva VÚTT 55-03019, Praha, 1955.

Резюме

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ДВИЖЕНИЙ АВТОМОБИЛЕЙ С УЧЕТОМ НЕЛИНЕЙНОЙ ПОДВЕСКИ

МИЛАН АПЕТАУР, ЛАДИСЛАВ ПУСТ (Milan Apetaur, Ladislav Púst)

(Поступило в редакцию 14/VIII 1956 г.)

Работа посвящена решению системы двух нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, которые описывают движение механической или электрической системы. Нелинейные функции, которые в дифференциальных уравнениях встречаются, могут принимать очень общую форму. На этом основании имеет предложенный порядок большое применение в технической практике.

Метод решения заключается в построении касательных к интегральным кривым в фазовых плоскостях. Для одного уравнения второго порядка это решение знакомо из литературы под названием „Графическое построение Лъенара“.

В предложенной работе доказан метод решения двух нелинейных уравнений второго порядка. Далее указано применение этого метода для некоторых задач из теории подвески автомобилей. Это решение, произведенное в фазовых плоскостях позволяет получить сравнительно простым способом перемещения, скорости и ускорения как функции времени. Метод служит преимущественно для исследования переходных процессов в нелинейных колебательных системах.

Точность результата определена прежде всего избранной длиной интервала между отдельными шагами и точностью графической конструкции. В большинстве случаев эта точность для техников вполне достаточна.

Zusammenfassung

DIE GRAFISCHEN LÖSUNGSMETHODEN DER SCHWINGUNGSBEWEGUNGEN DER KRAFTWAGEN MIT BERÜCKSICHTIGUNG DER NICHTLINEAREN FEDERUNG

MILAN APETAUR, LADISLAV PŮST

(Eingegangen am 14. August 1956.)

Diese Arbeit ist der neuen Methode der Lösung eines Systems zweier nicht-linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewidmet, welche die Bewegung des mechanischen oder elektrischen Systems beschreiben. Die nicht-linearen Funktionen, die in den Differentialgleichungen vorkommen, können eine sehr allgemeine Form haben. Das vorliegende Lösungsverfahren findet deshalb eine Allgemeine Anwendung in der technischen Praxis.

Die Lösungsmethode besteht in der Konstruktion der Tangenten der Integralkurven in Phasenebenen. Für eine Gleichung zweiter Ordnung ist eine solche Lösungsmethode bekannt und ist in der Literatur als „Liènards Methode“ bezeichnet.

In der vorliegenden Arbeit ist das Lösungsverfahren für zwei Gleichungen zweiter Ordnung abgeleitet. Ferner ist die Anwendung dieses Verfahrens auf einige Aufgaben der Theorie der Federung des Kraftwagens gezeigt. Die Lösung, welche in den Phasenebenen durchgeführt ist, ermöglicht auf eine einfache Weise den Verlauf der Auslenkungen, Geschwindigkeiten und beschleunigungen als Funktionen der Zeit zu gewinnen. Die Methode ist besonders für das Studium der Übergangserscheinungen in nichtlinearen Systemen geeignet.

Die Genauigkeit des Ergebnisses ist durch die Grösse des gewählten Intervalls zwischen zwei aufeinanderfolgenden Schritten und durch die Genauigkeit der grafischen Konstruktion gegeben. In den meisten Fällen ist diese Genauigkeit für die technische Praxis völlig ausreichend.