Ivan Šantavý

Věta o reciprocitě pro přechodné jevy

Aplikace matematiky, Vol. 2 (1957), No. 5, 390–397

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102588

VĚTA O RECIPROCITĚ PRO PŘECHODNÉ JEVY

IVAN ŠANTAVÝ

(Došlo dne 24. září 1956.) DT: 530.15 : 621.3.015.3/.4

Obsahem této práce je odvození věty o reciprocitě pro d'Alembertovu vlnovou rovnici v uzavřeném oboru s okrajovou podmínkou $U = 0$. Věta je zobecněním známých vět o reciprocitě pro ustálené harmonické pole a její důkaz je proveden užitím Laplaceovy transformace.

Úvod

V theorii elektrostatického pole, šíření vln elektromagnetických nebo zvukových, i v jiných odvětvích fysiky vyslovuje se t. zv. princip reciprocity. Na příklad v elektrostatice v případě bodových elektrických nábojů zní takto: Nechť v bodě A ležícím uvnitř uzavřené vodivé plochy S, jejíž potenciál je konstantní, je umístěn bodový náboj. Pak potenciál jím vzbuzený v bodě B uvnitř plochy S je právě takový, jaký by byl potenciál vzbuzený v bodě A týmž nábojem umístěným v bodě B. Tato věta plyne z theorie Greenovy funkce pro Laplaceovu rovnici. V theorii šíření vln se dokazuje analogická věta pro případ, že bodový zdroj umístěný v bodě A uvnitř plochy S vykonává harmonické kmity a že pole je ustálené, t. j. funkce charakterisující pole mají tvar $U = e^{i\omega t} . v(x, y, z)$. D'Alembertova rovnice $\Delta U - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0$ přechází pak v rovnici $\Delta v + k^2 v = 0$, pro kterou se důkaz věty o reciprocitě provede podobně jako v případě rovnice Laplaceovy.

V této práci ukážeme, jak lze větu o reciprocitě pro šíření vln zobecnit na přechodné jevy v tomto smyslu: Začne-li v okamžiku $t = 0$ zářit zdroj umístěný v bodě A, pak v okamžiku $t = t_k (> 0)$ je v bodě B pole právě takové, jaké by vyvolal v bodě A týž zdroj umístěný v bodě B po uplynutí téhož času, t. j. platí $U_A(B; t_K) = U_B(A; t_K)$. V dalším budeme větu formulovat přesně. Průběh funkcí U_A, U_B je odlišný od průběhu analogických funkcí v případě ustáleného pole. Je-li na př. zdroj v bodě A a začne zářit v okamžiku $t = 0$, pak v bodě B je nejprve U_A rovno nule až do okamžiku $t = \frac{r_{AB}}{a}$, kde $r_{AB} = AB$ a a je rychlost šíření vln. V tom okamžiku tam dojde primární vlna šířící se přímo ze zdroje A, později přijde první vlna odražená na hranici oboru, pak další atd. Princip reciprocity platí jistě v časovém intervalu $\langle 0; \frac{r_{AB}}{a} \rangle$, kdy $U_A(B) = U_B(A) = 0$ a také po jistou dobu po příchodu primární vlny, neboť před příchodem první odražené vlny je celkové pole dáno vlnou primární, pro kterou zřejmě platí $U_{A prim}(B) = U_{B prim}(A)$. Po příchodu odražených vln není již platnost principu reciprocity evidentní.

Věta o reciprocitě

Budeme uvažovat o řešení d'Alembertovy rovnice

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0 \tag{1}$$

v otevřeném oboru O, tvořícím vnitřek uzavřené plochy S, o které budeme předpokládat, že je Ljapunovova typu[1]). O řešení budeme předpokládat, že se anuluje na hranici oboru O, přesněji, že pro libovolný bod N plochy S platí $\lim_{P \to N} U(P; t) = 0$, $P \in O$. Základní řešení rovnice (1) je funkce $\frac{F\left(t - \frac{r_A}{a}\right)}{r_A}$, $r_A = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$, která představuje kulovou vlnu šířící se z bodového zdroje, který je umístěn v bodě $A(x_A, y_A, z_A)$ ležícím v oboru O. Řešení vyjadřující pole vzbuzené tímto zdrojem v oboru O je pak typu $U(x, y, z; t) = \frac{1}{r_A} F\left(t - \frac{r_A}{a}\right) + U_0(x, y, z; t)$. Zde U_0 je funkce definovaná ve všech bodech oboru O (včetně bodu A), vyjadřující vliv hranice S na průběh pole v jejím vnitřku. Dokážeme, že o takovémto řešení platí věta:

Věta 1. *Nechť S je libovolná uzavřená plocha typu Ljapunovova a nechť O je její vnitřek, t. j. otevřený obor jí ohraničený. Nechť $F(t)$ je funkce pro všechna t spojitá i s derivacemi až do řádu $n = 3$ včetně, splňující podmínky $F(t) = F'(t) = \overset{(3)}{F''}(t) = 0$ pro $t \leq 0$. Nechť pro vhodné pevné $\alpha \geq 0$ je funkce $F(t)e^{-\alpha t}$ ohraničená a po částech monotonní v intervalech, jichž délka je větší než $\lambda > 0$[2]). Pak existuje jediná funkce $U_A(P; t)$ vyjadřující pole bodového zdroje umístěného v bodě $A \in O$, který počal zářit v okamžiku $t = 0$, s těmito vlastnostmi:*

[1]) Podmínky, jimž vyhovují Ljapunovovy plochy a některé jejich vlastnosti jsou uvedeny na př. v knize [1], § 192.

[2]) To značí, že nezápornou část osy t můžeme rozdělit na spočetně mnoho intervalů (t_{n-1}, t_n), z nichž žádný nemá délku menší než λ a z nichž v každém je funkce $F(t)$ monotonní.

1. Vyhovuje rovnici (1) *všude v oboru O s výjimkou bodu A, kde není definována;*

2. Je typu $U_A(x, y, z; t) = \frac{1}{r_A} F\left(t - \frac{r_A}{a}\right) + U_{0A}(x, y, z; t)$, *kde* $r_A = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2}$; *funkce* U_{0A} *i její parciální derivace* $\frac{\partial^2 U_{0A}}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 U_{0A}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 U_{0A}}{\partial x\, \partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 U_{0A}}{\partial z^2}$ *jsou spojité vzhledem k* (x, y, z) *v oboru O pro každé* $t \geqq 0$ *a spojité vzhledem k t v oboru* $t \geqq 0$ *pro pevné* $(x, y, z) \in O$;

3. Pro $t \leqq 0$ *platí* $U_A = \frac{\partial U_A}{\partial t} = \frac{\partial^2 U_A}{\partial t^2} = 0$;

4. Na hranici oboru splňuje U podmínku $\lim_{P \to N} U_A(P; t) = 0$; *zde N je libovolný bod na S.*

Důkaz této věty provedeme užitím Laplaceovy transformace. Hledání řešení neustálených dějů v theorii parciálních diferenciálních rovnic methodou Laplaceovy transformace se děje obvykle tak, že se provede Laplaceova transformace neznámé hledané funkce a že se předpokládá záměnnost pořadí derivace a integrace. Po nalezení Laplaceova obrazu se najde vzor a dodatečně se dokazuje, že záměna pořadí derivace a integrace, i jiné provedené operace byly oprávněny a že nalezená funkce je skutečně řešením daného problému. Zde budeme postupovat podobně, s tím rozdílem, že na existenci řešení a jeho vlastnosti usoudíme z vlastností jeho obrazu v Laplaceově transformaci. Přitom se budeme opírat o větu odvozenou Churchillem [2] (Theorem 10). Uvádíme ji na konci práce jako větu 3, při čemž ji zde vyslovujeme pro funkci $\varphi(x, y, z; s)$ tří parametrů x, y, z, zatím co Churchill uvažoval o funkci $\varphi(x; s)$ jednoho parametru x.

Předpokládejme nejprve, že řešení s vlastnostmi 1-4 věty 1 existuje. Utvořme jeho Laplaceovu transformaci, t. j. funkci

$$u_A(x, y, z; s) = \mathrm{L}\{U_A(x, y, z; t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st} U_A(x, y, z; t)\, \mathrm{d}t\,.$$

Přitom s nechť je libovolné komplexní číslo oboru $\mathrm{Re}\, s \geqq \gamma$, kde γ je libovolné číslo splňující podmínku $\gamma > \alpha$. Platí

$$u_A(x, y, z; s) = \int_0^\infty e^{-st} \left[\frac{F\left(t - \frac{r_A}{a}\right)}{r_A} + U_{0A}(x, y, z; t) \right] \mathrm{d}t =$$

$$= \frac{e^{-s\frac{r_A}{a}}}{r_A} \,.\, f(s) + u_{0A}(x, y, z; s)\,; \tag{2}$$

zde

$$f(s) = \mathrm{L}\{F(t)\}\,, \quad u_{0A}(x, y, z; s) = \mathrm{L}\{U_{0A}(x, y, z; t)\}\,.$$

Za předpokladu, že platí

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 U_A}{\partial x^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{L}\{U_A\}\,,\quad \mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 U_A}{\partial y^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\mathrm{L}\,\{U_A\}\,,\quad \mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 U_A}{\partial z^2}\right\} = \frac{\partial^2}{\partial z^2}\mathrm{L}\,\{U_A\}\,,$$

$$\mathrm{L}\left\{\frac{\partial^2 U_A}{\partial t^2}\right\} = s^2\mathrm{L}\,\{U_A\}\,,\quad \mathrm{L}\,\{\lim_{P\to N} U_A\} = \lim_{P\to N}\mathrm{L}\,\{U_A\}\,,$$

vyhovuje funkce $u_A(x, y, z; s)$ parciální diferenciální rovnici

$$\frac{\partial^2 u_A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_A}{\partial z^2} - \frac{s^2}{a^2}u_A = 0 \tag{3}$$

a okrajové podmínce

$$\lim_{P\to N} u_A = 0\,. \tag{4}$$

Funkce u_A, která je typu (2), vyhovuje diferenciální rovnici (3) a splňuje okrajovou podmínku (4), je zřejmě (až na faktor $f(s)$) Greenova funkce oboru O. Funkce $u_{0A} = \mathrm{L}\{U_{0A}\}$ rovněž splňuje rovnici (3) a lze ji zřejmě psát ve tvaru

$$u_{0A}(x, y, z; s) = f(s)\,.\,\bar{u}_{0A}(x, y, z; s)\,, \tag{5}$$

při čemž

$$\lim_{P\to N}\bar{u}_{0A} = -\frac{e^{-s\frac{r_{NA}}{a}}}{r_{NA}}\,;\quad \text{zde}\quad r_{NA} = NA\,. \tag{6}$$

Funkce $\bar{u}_{0A}$ je tedy řešení vnitřního Dirichletova problému v oboru O pro rovnici (3) s okrajovou podmínkou (6). Dosud jsme ovšem existenci funkce U_A, tím méně platnost rovnice (3), nedokázali.

Uvažujme nyní takto: rovnice $\Delta v + \lambda v = 0$ má v oboru O kladné vlastní hodnoty ($\lambda_k > 0$). Jestliže $\mathrm{Re}\, s \geqq \gamma > \alpha \geqq 0$, není výraz $-\frac{s^2}{a^2}$ nikdy kladný a pro každé takové s má Dirichletův problém v oboru O pro rovnici (3) s okrajovou podmínkou (6) jediné řešení. Toto řešení lze psát ve tvaru zobecněného potenciálu vrstvy

$$\bar{u}_{0A}(P; s) = \iint_S \mu(N)\,\frac{e^{-s\frac{r}{a}}}{r}\,\mathrm{d}S\,. \tag{7}$$

Zde $\mu(N)$ je funkce spojitá na ploše S a $r = PN$. Důkaz tohoto tvrzení vyplývá z vět uvedených v [1] takto: Ježto $-\frac{s^2}{a^2}$ není, jak jsme řekli, vlastní hodnotou vnitřního Dirichletova problému, má vnější Neumannova úloha pro rovnici $\Delta u - \frac{s^2}{a^2}u = 0$ v O', kde O' je vnějšek plochy S, řešení, které lze psát jako potenciál vrstvy, to jest ve tvaru pravé strany ve vzorci (7) (viz [1], str. 287).

To, že vzorec (7) dává také řešení našeho vnitřního Dirichletova problému, plyne z úvahy zcela analogické úvaze uvedené v [1], § 221, s tím rozdílem, že se namísto o funkci

$$v = \begin{cases} g(P;Q) & \text{uvnitř } S \\ -\dfrac{1}{4\pi r} & \text{vně } S \end{cases}$$

uvažuje o funkci

$$v = \begin{cases} \bar{u}_{0A}(x, y, z; s) & \text{uvnitř } S \\ -\dfrac{e^{-s\frac{r_A}{a}}}{r_A} & \text{vně } S\,. \end{cases}$$

Namísto vzorce (200) na str. 659 budeme mít $v = \int\int_S \mu(N) \dfrac{e^{-s\frac{r}{a}}}{r} \, \mathrm{d}S$ vně S

a dále týž vzorec i pro v uvnitř S namísto vzorce (201). To však znamená, že funkce $\bar{u}_{0A}$ je dána vzorcem (7). Ukážeme, že pak funkce u_{0A} definovaná vzorci (5), (7), splňuje podmínky 1-3 věty 2. Označme R libovolný uzavřený obor ležící v O. Z předpokládaných vlastností funkce $F(t)$ plyne, že její Laplaceova transformace $f(s) = \mathrm{L}\{F(t)\}$ je analytická pro $\mathrm{Re}\, s \geqq \gamma$ a dále, že funkce $|s^4 f(s)|$ je v tom oboru ohraničená (viz na př. theorem F citované práce Churchillovy [2]). Ze vztahů (5), (7) pak plyne, že také funkce u_{0A} je analytická pro $\mathrm{Re}\, s \geqq \gamma$ a že funkce $|s^4 u_{0A}|$ je v tom oboru ohraničená pro všechna $(x, y, z) \in R$, neboli, že funkce u_{0A} splňuje podmínku 2 věty 3 pro $n = 2$ a $\varepsilon_1 = 1$. Podobně se snadno vidí, že také podmínky 1 a 3 věty 3 jsou splněny a to pro $m = 2$ a $\varepsilon_2 = 1$ v oboru $(x, y, z) \in R$. Ježto tedy podmínky věty 3 jsou splněny, plyne z ní, že k funkci u_{0A} existuje funkce inversní v Laplaceově transformaci $U_{0A}(x, y, z; t) = \mathrm{L}_{(i)}^{-1}\{u_{0A}(x, y, z; s)\}$ a že v oboru R pro tuto funkci platí

$$\frac{\partial^p U_{0A}}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l} = \mathrm{L}_{(i)}^{-1} \left\{ \frac{\partial^p u_{0A}}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l} \right\}, \quad p = j + k + l = 1, 2\,;$$

$$\frac{\partial^q U_{0A}}{\partial t^q} = \mathrm{L}_{(i)}^{-1} \{s^q u_{0A}\}\,, \quad q = 0, 1, 2\,.$$

Ježto R je libovolný uzavřený obor z O, platí uvedené vztahy v celém oboru O. Z tvaru funkce u_{0A} je nadto zřejmé, že funkce U_{0A} splňuje vztah

$$\lim_{P \to N} U_{0A} = \mathrm{L}_{(i)}^{-1} \{\lim_{P \to N} u_{0A}\}\,,$$

kde N je bod na S. Funkce

$$u_A(x, y, z; s) = \frac{e^{-s\frac{r_A}{a}}}{r_A} f(s) + u_{0A}(x, y, z; s)$$

splňuje rovnici (3) s okrajovou podmínkou (4), takže funkce

$$U_A(x, y, z; t) = \frac{F\left(t - \frac{r_A}{a}\right)}{r_A} + U_{0A}(x, y, z; t)$$

má vlastnosti 1-4 věty 1 a je zřejmě jediná.

Věta 2. *Nechť S je libovolná uzavřená plocha Ljapunovova typu a nechť O je její vnitřek. Nechť $F(t)$ je funkce splňující podmínky uvedené ve větě 1. Nechť $U_A(x, y, z; t)$ je funkce vyjadřující pole bodového zdroje charakterisovaného funkcí $F(t)$ umístěného v bodě $A \in O$, která má vlastnosti 1—4 uvedené ve větě 1. Nechť $U_B(x, y, z; t)$ je funkce vyjadřující pole téhož bodového zdroje umístěného v bodě $B \in O$, jejíž vlastnosti dostaneme z vlastností 1—4 věty 1 tak, že namísto A píšeme všude B. Pak platí $U_A(B; t) = U_B(A; t)$.*

Důkaz této věty, t. j. důkaz vlastní věty o reciprocitě pro přechodné jevy, je jednoduchý. Podle věty o reciprocitě pro rovnici (3) s podmínkou (4) platí $u_A(B) = u_B(A)$. Ježto $U_A = \mathrm{L}_{(i)}^{-1}\{u_A\}$, $U_B = \mathrm{L}_{(i)}^{-1}\{u_B\}$, platí také $U_A(B; t) = U_B(A; t)$, což bylo dokázat.

Funkci $U_A(x, y, z; t)$ bychom mohli interpretovat takto: V případě šíření zvukových vln z bodového zdroje v kapalině nebo plynu vyhovuje přetlak p D'Alembertově rovnici. Funkce $U_A(x, y, z; t)$ může tedy představovat přetlak v bodě (x, y, z) a okamžiku t vzbuzený zvukovým zdrojem umístěným v bodě A, při čemž přetlak na hranici oboru je trvale nulový. Poznamenejme, že realisovat tuto okrajovou podmínku by bylo obtížné. Snadněji realisovatelná a případně experimentálnímu ověření přístupná by byla případná analogická věta o reciprocitě s okrajovou podmínkou $\left.\frac{\partial U}{\partial n}\right/_S = 0$ namísto $U/S = 0$, kterou jsme zde nezkoumali. Pak by funkce U mohla mít význam rychlostního potenciálu a uvedená okrajová podmínka by znamenala, že plocha S ohraničující prostředí, v němž se vlny šíří, je dokonale pevná.

Věta 3.[3]) *Nechť funkce $\varphi(x, y, z; s)$ splňuje v uzavřeném oboru $(x, y, z) \in R$ tyto podmínky:*

1. Funkce $\varphi(x, y, z; s)$ a její parciální derivace vzhledem k x, y, z typu $\frac{\partial^p \varphi}{\partial x^j \partial y^k \partial z^l}$, $p = j + k + l = 1, 2, \ldots, m$ jsou analytickými funkcemi proměnné s pro $\mathrm{Re}(s) \geqq \gamma$ a nechť jsou spojité v proměnných x, y, z, η v oboru $(x, y, z) \in R$, $-\omega < \eta < \omega$ pro všechna reálná ω; přitom $s = \gamma + \eta i$.

[3]) Podle Churchilla, viz [2], Theorem 10.

2. Nechť funkce $|s^{n+1+\varepsilon_1}\varphi(x, y, z; s)|$, *při čemž* $\varepsilon_1 > 0$ *je vhodné číslo, je ohraničená v oboru* $\operatorname{Re} s \geqq \gamma$ *pro všechna* $(x, y, z) \in R$.

3. Nechť každá z funkcí $\left|s^{1+\varepsilon_2} \frac{\partial^p \varphi}{\partial x^j\, \partial y^k\, \partial z^l}\right|$, $p = j + k + l = 1, 2, \ldots, m$, *kde* $\varepsilon_2 > 0$ *je vhodné číslo, je ohraničená v oboru* $\operatorname{Re}(s) \geqq \gamma$ *pro všechna* $(x, y, z) \in R$.

Pak existuje funkce $\Phi(x, y, z; t)$, *inversní v Laplaceově transformaci k funkci* $\varphi(x, y, z; s)$ *a platí:*

$$\Phi(x, y, z; t) = \mathrm{L}_{(i)}^{-1}\{\varphi(x, y, z; s)\} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to \infty} \int_{\gamma - i\omega}^{\gamma + i\omega} e^{tu} \varphi(x, y, z; u)\, du\,,$$

$$\frac{\partial^q \Phi(x, y, z; t)}{\partial t^q} = \mathrm{L}_{(i)}^{-1}\{s^2 \varphi(x, y, z; s)\}\,, \quad q = 0, 1, 2, \ldots, n\,,$$

$$\frac{\partial^p \Phi(x, y, z; t)}{\partial x^j\, \partial y^k\, \partial z^l} = \mathrm{L}_{(i)}^{-1}\left\{\frac{\partial^q \varphi(x, y, z; s)}{\partial x^j\, \partial y^k\, \partial z^l}\right\}, \quad p = 1, 2, \ldots, m\,.$$

Všechny tyto funkce jsou spojité vzhledem k $(x, y, z) \in R$ *pro každé* $t \geqq 0$, *spojité vzhledem k* t *v oboru* $t \geqq 0$ *pro každé* $(x, y, z) \in R$ *a platí*

$$\Phi(x, y, z; t = 0) = 0\,, \quad \frac{\partial^q \Phi(x, y, z; t = 0)}{\partial t^q} = 0\,, \quad \frac{\partial^p \Phi(x, y, z; t = 0)}{\partial x^j\, \partial y^k\, \partial z^l} = 0\,,$$

$$(q = 1, 2, \ldots, n;\; p = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Závěr

V práci byla odvozena věta o reciprocitě pro rovnici (1) s okrajovou podmínkou $U = 0$, což je zobecnění známé věty o reciprocitě pro rovnici $\Delta u + \lambda u = 0$. Věta byla odvozena užitím Laplaceovy transformace. Lze očekávat, že touto methodou bude možno poměrně jednoduše rozšířit na neustálené jevy také jiné věty o recoprocitě odvozené dosud jen pro jevy ustálené.

LITERATURA

[1] *Смирнов В. И.:* Курс высшей математики; том IV, ГИТТЛ, Москва 1953.

[2] *Churchill R. V.:* Mathematische Annalen 114 (1937), 591.

Резюме

ТЕОРЕМА О ВЗАИМНОСТИ ДЛЯ ПЕРЕХОДНЫХ ЯВЛЕНИЙ

ИВАН ШАНТАВЫ (Ivan Šantavý)

(Поступило в редакцию 24/IX 1956 г.)

Содержанием работы является вывод теоремы о взаимности для уравнения д'Аламбера (1) с краевым условием $U = 0$ в области, ограниченной замкнутой поверхностью типа Ляпунова. Методом преобразования Лапласа доказывается существование решения, обладающего свойствами 1—4, теорема 1. Собственная теорема о взаимности (теорема 2) вытекает легко из теоремы о взаимности для функции Грина в случае уравнения (3) с краевым условием (4).

Zusammenfassung

DER REZIPROZITÄTSSATZ DER NICHTHARMONISCHEN WELLENVORGÄNGE

IVAN ŠANTAVÝ

(Eingegangen am 24. September 1956.)

In der vorliegenden Arbeit wird ein Reziprozitätssatz für die d'Alembertsche Gleichung (1) mit der Randbedingung $U = 0$ in einem mit einer Fläche von Ljapunov begrenzten Gebiet bewiesen. Die Methode von Laplace Transformation ermöglicht die Existenz einer Lösung mit den Eigenschaften 1—4, Satz 1, zu beweisen. Der Reziprozitätssatz (Satz 2) wird dann leicht auf Grund des Reziprozitätssatzes für die Greensche Funktion der Gleichung (3) mit der Randbedingung (4) bewiesen.