Ivo Babuška

Линейная теория внутреннего трения

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 3, 177–202

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102660

SVAZEK 4 (1959) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

(Поступило в редакцию 11/VIII 1958 г.) DT: 539.67.001

А. ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСИХ КОЛЕБАНИЙ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Часть I.

В работе положены основания общей линейной теории внутреннего трения. В настоящей статье, в которой развита первая часть этой теории подробно изучается проблема вынужденных периодических колебаний системы с одной степенью свободы.

ВВЕДЕНИЕ

Внутренним трением мы называем способность твердого тела превращать энергию механических колебаний в тепловую энергию. Одним из последствий внутреннего трения является затухание свободных колебаний.

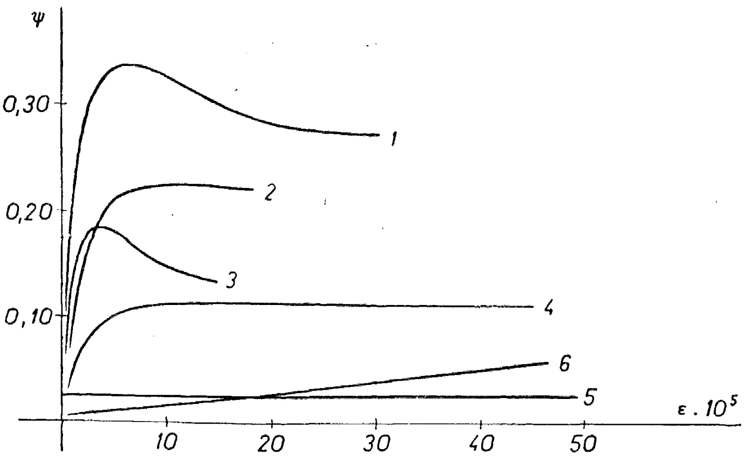
В идеально упругом теле при периодической деформации имеет напряжение общую несдвинутую фазу. Следовательно, отсутствует как внутреннее трение, так и затухание колебаний. С таким положением встречаемся, например, у кварцевых монокристаллов. Итак, затухание как результат внутреннего трения является последствием неупругости материалов. Эта неупругость указывается и при малых деформациях и напряжениях и поэтому не может приписываться только влиянию пластических деформаций.

Эти вопросы в последние годы весьма подробно изучались как в случае металлов, так и других материалов, например, стекла, дерева, бетона и т. д. Был произведен целый ряд экспериментальных измерений и теоретико-физических исследований именно в связи с проблемой внутреннего трения. Особенно подробному изучению подверглось поведение металлов как при незначительных напряжениях порядка нескольких g/mm², так и при напряжениях величиною порядка нескольких десятков kg/mm².

Обзорные рефераты, посвященные физической сущности внутреннего трения, в особенности при напряжениях, даются в работах [1], [2], [3], [4].

В этих работах указываются три главных причины внутреннего трения. Это, во-первых, причины термоэластического характера, затем последствия ферромагнитных эффектов и, наконец, последствия внутренних напряжений и дислокаций.

В результате интенсивного изучения явлений, находящихся в связи с внутренним трением, в годы второй мировой войны и после были обнару-



1 железобетон
2 кирпичная кладка без трещин
3 бетон ($E = 1,52 \cdot 10^5$ kg/cm²)
4 дуб ($E = 1,34 \cdot 10^5$ kg/cm²)
5 стекло ($E = 7,1 \cdot 10^5$ kg/cm²)
6 сталь ($E = 20,5 \cdot 10^5$ kg/cm²)

Рис. 1. Зависимость коэффициента затухания от амплитуды.

жены новые источники внутреннего трения. Это — эффекты релаксации на границах зерн гетерогенных материалов и ориентация металлов, вызванная напряжением. Эти два эффекта вместе с термоэластическими явлениями внутреннего трения объединил Зинер в группу т. наз. неупругих явлений. См. [5], [6].

Зинер изучает только те явления, при которых внутреннее трение не зависит от амплитуды. Независимость внутреннего трения от амплитуды имеет здесь место только при незначительных напряжениях.

В случае более значительных напряжений предположение независимости коэффициента внутренних трений от амплитуды постигает настоящее положение вещей только приближенно. На рис. 1 графически изображена зависимость внутреннего трения ψ[1]) от амплитуды деформации для различных материалов. См. [7].

[1]) Коэффициент ψ определяется как отношение энергии, затраченной в результате внутреннего трения в течение одного цикла гармонического колебания, к потенциальной энергии, соответствующей амплитуде колебания.

При более значительных напряжениях и деформациях нельзя объяснять явления внутреннего напряжения неупругостью; скорее можно их поставить в связь с локальными пластическими деформациями (например, в граничных слоях зерен), приводящими к статической кривой гистерезиса; см. например, [8], [9].

Феноменологические теории, описывающие явления внутреннего затухания, очень разнообразны. Все-таки их можно разделить на несколько групп смотря по тому, на какие основные мысли они опираются.

I. Внутреннее трение является функцией скорости колебаний. Сюда следует отнести, в первую очередь, работы О. Майера [11] и в особенности работы Фохта [12]; оба названных автора считают внутреннее трение пропорциональным скорости. Впоследствии эта теория была развита с большой широтой и глубокомыслием, и до сих пор при решении сложных задач ею часто пользуются из-за ее простоты. Е. В. Лунц [13] обобщил эту гипотезу таким образом, что зависимость внутреннего трения от скорости считает общей степенной функцией. Теории этой группы в определенной мере хорошо постигают действительность, например, в случае затухания, вызванного сопротивлением воздуха, но совершенно не постигают явления внутреннего трения в материале, которые, как видно по экспериментальным данным, сравнительно в очень малой мере зависят от частоты.

II. Внутреннее трение зависит от деформации (отклонения). Сюда относится в особенности [14].

III. Внутреннее трение стоит в связи с релаксационными явлениями. Сюда в первую очередь относится теория Зинера, см. [6] и, например, [15].

IV. Внутреннее трение возникает в результате зависимости между напряжением и деформацией, выраженной при помощи кривой гистерезиса.

Гипотезы IV-ой группы хорошо постигают действительность, в особенности в случае периодических колебаний. В случае непериодических колебаний наталкиваемся на многие затруднения, которые все до сих пор не удалось с успехом устранить. Даже в случае периодических, но не гармонических, колебаний возникает целый ряд проблем, которые также не удалось до сих пор удовлетворительно решить. Гипотезы IV-ой группы, здесь например раводы [8], [9], работы Н. Н. Давиденкова [16] и т. д. гипотезу Давиденкова развивает и использует в нескольких теоретических работах Г. С. Писаренко [17], [18]. Разнообразные гипотезы этой группы отличаются друг от друга характером и видом рассматриваемых кривых гистерезиса. Можно еще назвать, например, работы Д. Ю. Панова [19] и Е. С. Сорокина [20], [21][2]) и другие.

---

[2]) В работе [22] приведены некоторые идеи, с которыми читатель встретится и в настоящей работе.

По некоторым перечисленным здесь гипотезам затухание зависит от амплитуды линейно, по другим — нелинейно. В настоящей работе будем предполагать, что затухание зависит от амплитуды только линейно.

1. ЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

В этом отделе положим основания линейной теории внутреннего трения.

Предположим, что масса находится в состоянии установившихся гармонических колебаний. Пусть зависимость деформации $\varepsilon(t)$[3]) от времени дана формулой

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega 2\pi t .$$

Зависимость напряжения $\sigma(t)$, соответствующего этой деформации, не будет в таком случае пропорциональной деформации, но будет со сдвинутой фазой. В общем случае имеем

$$\sigma(t) = E[\varepsilon_0 \sin \omega 2\pi t + \psi \varepsilon_0 f(\omega 2\pi t)] ,$$

где $f(2\pi\omega t)$ — по предположении общая периодическая функция с периодом $\frac{1}{\omega}$, ψ — коэффициент затухания.[4])

Теперь мы приведем некоторые основые виды функции f, соответствующей деформации

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \sin \omega t 2\pi$$

по некоторым из гипотез, о которых шла речь выше.

a) Гипотеза Фохта (см. [12])

$$\sigma(t) = E[\varepsilon_0 \sin (2\pi\omega t) + \psi\varepsilon_0 2\pi\omega \cos (2\pi\omega t)] .$$

b) Гипотеза Сорокина (см. [20])

$$\sigma(t) = E[\varepsilon_0 \sin (2\pi\omega t) + \psi\varepsilon_0 \cos (2\pi\omega t)] .$$

c) Гипотеза линейной ползучести Больтцмана

$$\sigma(t) = E[g_1(\omega)\, \varepsilon_0 \sin (2\pi\omega t) + \varepsilon_0 \psi g_2(\omega) \cos (2\pi\omega t)] , \quad g_1(\omega) > 0,\ g_2(\omega) > 0 .$$

d) Гипотеза (см. [22])[5])

$$\sigma(t) = E[\varepsilon_0 \sin (2\pi\omega t) + \psi\varepsilon_0[\cos (2\pi\omega t) + \tfrac{1}{3}\cos (6\pi\omega t)]] .$$

На этих нескольких примерах достаточно ясно показано, какой вид имеет функция $f(\omega 2\pi t)$ в случае перечисленных гипотез. Пока мы представили функцию $\sigma(t)$ в зависимости от $\varepsilon(t)$ только для специальных видов

[3]) В дальнейшем t означает всюду время, E —-модуль упругости или же упругий коэффициент, численно равный статической силе, вызывающей единичное перемещение.

[4]) Везде предполагаем, что коэффициент затухания есть постоянная.

[5]) Имеется в виду гипотеза, выраженная в [22] посредством оператора $\boldsymbol{A}_1$.

функции $\varepsilon(t)$, а именно для случая гармонических колебаний. Но во всех случаях имеет место также принцип суперпозиции. Значит, если деформация $\varepsilon(t)$ будет задана функцией

$$\varepsilon(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i \sin(2\pi\omega t i)$$

то в случае гипотез, приведенных выше, получим

a) $\sigma(t) = E[\varepsilon(t) + \psi(\sum_{i=1}^{n} a_i i \cos(2\pi\omega t i)) \, . \, 2\pi\omega]$.

b) $\sigma(t) = E[\varepsilon(t) + \psi(\sum_{i=1}^{n} a_i \cos(2\pi\omega t i))]$.

c) $\sigma(t) = E[\sum_{i=1}^{n} a_i g_1(i\omega) \sin(2\pi\omega t i) + \psi \sum_{i=1}^{n} a_i g_2(i\omega) \cos(2\pi\omega t i)]$.

d) $\sigma(t) = E[\varepsilon(t) + \psi \sum_{i=1}^{n} a_i \cos(2\pi\omega t i) + \psi\frac{1}{3} \sum_{n=1}^{n} a_i \cos(6\pi\omega t i)]$.

Во всех этих случаях можем функцию $\sigma(t)$ представить в виде

$$\sigma(t) = E[\boldsymbol{A}_1\varepsilon(t) - \psi\boldsymbol{A}_2\varepsilon(t)] = E\boldsymbol{A}\varepsilon(t) \,, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$ — однородные и аддитивные операторы. В большинстве случаев $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{I}$, где $\boldsymbol{I}$ — тождественный оператор.

Отметим еще, что гипотеза c) является обобщением гипотез a) и b), но не обобщает гипотезу d).

Все гипотезы, приведенные выше, можно объединить под видом (1). Очевидно, что оператор $\boldsymbol{A}$, соотв. операторы $\boldsymbol{A}_1$ и $\boldsymbol{A}_2$, выражающие внутреннее трение, обладают, кроме свойств однородности и аддитивности, еще другими свойствами, которыми будем в дальнейшем заниматься подробнее.

Определение 1. *Символом C_l обозначим пространство всех непрерывных периодических функций (действительных) с периодом l. В этом пространстве введем метрику следующим образом: пусть $x \in C_l$ тогда*

$$\|x\| = \max_{-\infty < t < \infty} |x(t)| .$$

Прежде всего докажем некоторые вспомогательные теоремы, которые нам впоследствии понадобятся.

Лемма 1. *Пусть*

$$\omega_h(x) \begin{cases} = \dfrac{1}{\varkappa_h} e^{\frac{x^2}{x^2-h^2}} & \text{для} \quad |x| < h \\ = 0 & \text{для} \quad |x| \geqq h \end{cases} \quad \text{и} \quad \varkappa_h = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(x) \, \mathrm{d}x \, .$$

Тогда функция $\omega_h(x)$ непрерывна со всеми производными во всем интервале $(-\infty, +\infty)$.

Доказательство. Приемом полной индукции можно легко доказать, что

$$\frac{\mathrm{d}^n e^{\frac{x^2}{x^2-h^2}}}{\mathrm{d}x^n} = \frac{P_n(x)}{(x^2-h^2)^{2n}} e^{\frac{x^2}{x^2-h^2}} \quad \text{для } |x| < h \quad \text{для } |x| \geqq h$$

При этом $P_n(x)$ означает полином (зависящий от n). Но отсюда уже вытекает доказываемое утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $x(t) \in C_l$. *Пусть*

$$x_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-\tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{2}$$

Тогда

1. $x_h(t) \in C_l$,
2. *все производные от функции* $x_h(t)$ *непрерывны*,
3. $\lim\limits_{h\to 0} \|x_h - x\| = 0$.

Доказательство. 1. Функция $x_h(t)$ является периодической. Действительно, функцию можем записать также в виде

$$x_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(\tau)\, x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{2'}$$

следовательно,

$$x_h(t+l) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(\tau)\, x(t-\tau+l)\, \mathrm{d}\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(\tau)\, x(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = x_h(t)\,.$$

Непрерывность функции $x_h(t)$ очевидна, она вытекает непосредственно из выражения (2).

2. Второе свойство функции $x_h(t)$, о котором шла речь, сразу же получается из леммы 1.

3. Функция $x(t)$ непрерывна; следовательно, она также равномерно непрерывна. Итак, пусть $\varepsilon > 0$, тогда существует $\delta > 0$ так, что $|x(t) - x(t_0)| < \varepsilon$, как только $|t - t_0| < \delta$. Теперь возьмем фиксированное $h < \delta$. Получим

$$x_h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-\tau)[x(\tau) - x(t)]\, \mathrm{d}\tau + \int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-\tau)\, x(t)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Потому что $\omega_h(t-\tau) = 0$ для $|t-\tau| \geqq \delta$, $\int_{-\infty}^{\infty} \omega_h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = 1$ и $\omega_h(t-\tau) \geqq 0$, получим $|x_h(t) - x(t)| \leqq \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon\omega_h(t-\tau)\, \mathrm{d}\tau = \varepsilon$, ч. т. д.

Лемма 3. *Пусть* $x(t) \in C_l$, $x'(t) \in C_l$. *Тогда*

$$(x_h(t))' = (x'(t))_h\,.$$

Дифференцируя соотношение (2′), получим сразу доказываемое утверждение.

В дальнейшем индексом h будем последовательно обозначать функцию, определенную выражением (2′).

Теперь уже можем приступить к более подробному анализу оператора внутреннего трения.

Определение 2. *Пусть* $\mathbf{D}$ *— линейный оператор, отображающий* C_l *в* C_l.[6]) *Пусть* φ *— линейный функнционал на* C_l. *Пусть оператор* $\mathbf{D}$ *и функционал* φ[7]) *обладают следующими свойствами*:

1. *Пусть* $f \in C_l$ $\quad ((\mathbf{D}f)_h)'' + \varphi(f) = 0$ *для каждого достаточно малого* $h > 0$. *Тогда* $f = 0$.

2. *Пусть* $f \in C_l$, $f \neq \infty\,\mathrm{konst}$. *Тогда для каждого достаточно малого* h *пусть будет*

$$\int\limits_0^l (f_h)'((\mathbf{D}f)_h)''\,\mathrm{d}t > 0\,.$$ [8])

3. *Оператор* $\mathbf{D}$ *вполне непрерывен.*

Пару $(\mathbf{D}, \varphi)$ *будем называть оператором внутреннего трения.*

Дадим еще одно определение.

Определение 3. *Пусть* $f \in C_l$. *Символом* $\mathbf{V}^{(-k)}$, $k = 0, 1, \ldots$ *будем обозначать оператор, отображающий* C_l *в* C_l, *определенный следующим образом. Пусть* $f \in C_l$,

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l}nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{l}nt\,,$$

$$\mathbf{V}^{(-2k)}f = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^{2k}(-1)^k\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-2k}\cos\frac{2\pi}{l}nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-2k}\sin\frac{2\pi}{l}nt\right],$$

$$\mathbf{V}^{(-(2k+1))}f = \left(\frac{l}{2\pi}\right)^{2k+1}(-1)^k\left[\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(2k+1)}\sin\frac{2\pi}{l}nt - \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-(2k+1)}\cos\frac{2\pi}{l}nt\right].$$

Далее, через φ_0 *обозначим функционал на* C_l, *определенный следующим образом*:

$$\varphi_0(f) = \int\limits_0^l f(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

---

[6]) Оператор $\mathbf{D}$ называем линейным оператором, если он является однородным, аддитивным и непрерывным. Аналогично и функционал φ.

[7]) Ради упрощения мы говорим и будем и в дальнейшем говорить просто о функционале. На самом деле мы имеем в виду оператор, который функции $f \in C_l$ ставит в соответствие постоянную функцию $\varphi(f)\,.\,1$. В таком же смысле будем производить сложение операторов и функционала φ.

[8]) Отметим, что функция f, соотв. $\mathbf{D}f$, только непрерывна и может не иметь производной. Функция f_h, соотв. $(\mathbf{D}f)_h$ имеет, конечно, уже все производные.

Очевидно, справедлива следующая теорема:

Лемма 4. *Пусть* $\mathbf{V}^{(-k)}$ *— оператор, определенный в определении* 3. *Тогда*

1. $\mathbf{V}^{(-k)}$ *является линейным (т. е. однородным, аддитивным и непрерывным) оператором, отображающим* C_l *в* C_l.

2. $(\mathbf{V}^{(-k)}f)^{(p)} = \mathbf{V}^{(p-k)}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $p \leq k$.[9])[10])

3. $(\mathbf{V}^{(-k)}f)_h = \mathbf{V}^{(-k)}f_h$, $k = 0, 1, 2, \ldots$

4. φ_0 *является линейным (т. е. однородным, аддитивным и непрерывным) функционалом.*

Между оператором $\mathbf{A}$, указывающим зависимость между $\varepsilon(t)$ и $\sigma(t)$ (см. (1)), и оператором $(\mathbf{D}, \varphi)$ имеется следующая связь:

$$\sigma(t) = E\mathbf{A}\varepsilon(t) = E[(\mathbf{D}\varepsilon(t))'' + \varphi(\varepsilon)]\,.$$[11])

Это соотношение мы будем в дальнейшем всегда иметь в виду.

Теперь покажем, как можно выразить оператор $(\mathbf{D}, \varphi)$ в случае гипотез, которые мы перечислили выше.

a) Гипотеза Фохта

$$\mathbf{D}f = \mathbf{V}^{(-2)}f + \psi\mathbf{V}^{(-1)}f\,, \quad \varphi(f) = \frac{1}{l}\,\varphi_0(f)\,.$$

c) Гипотеза Больтцмана

Если

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l}\,nt$$

то

$$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \mathbf{D}f = -\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\frac{g_1(n)}{n^2}\cos\frac{2\pi}{l}\,nt - \sum_{n=1}^{\infty} a_n\,\frac{g_2(n)}{n^2}\sin\frac{2\pi}{l}\,nt\right),$$

$$\varphi(f) = \frac{1}{l}\,\varphi_0(f)\,g_1(0)\,.$$

Теперь уже ясно, каков вид оператора $\mathbf{D}$ в случае гипотезы Сорокина (под b) или в случае гипотезы, приведенной под d).

Ограничимся теперь одним специальным видом оператора внутреннего трения $(\mathbf{D}, \varphi)$ и покажем, что он имеет все свойства, приведенные в определении 2.

---

[9]) Символом $(\mathbf{V}^{(-k)}f)^{(p)}$ обозначена p-ая производная функции $(\mathbf{V}^{(-k)}f)$.

[10]) Значит, функция $\mathbf{V}^{(-k)}f$ является примитивной функцией к функции $\mathbf{V}^{(-k+1)}f$.

[11]) Конечно, если только это уравнение имеет смысл, т. е. если $\mathbf{D}\varepsilon$ есть функция с непрерывными вторыми производными. В противном случае имеем дело с обобщением выражения (1).

Теорема 1. *Пусть χ — положительная функция, определенная на интервале $(0, \infty)$. Далее, пусть $\chi(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$*[12]) *для $x \to \infty$. Пусть оператор $(\mathbf{D}, \varphi)$ представлен в виде*

$$\mathbf{D}f = \mathbf{V}^{(-2)}f + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \mathbf{B}f\,, \quad \varphi(f) = \frac{1}{l}\,\varphi_0(f)\,.$$

Если

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l}\,nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{l}\,nt\,,$$

пусть

$$\mathbf{B}f = +\sum_{n=1}^{\infty} \chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) a_n \sin\frac{2\pi}{l}\,nt - \sum_{n=1}^{\infty} \chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) b_n \cos\frac{2\pi}{l}\,nt\,.$$

Оператор $(\mathbf{D}, \varphi)$ является в таком случае оператором внутреннего трения в смысле определения 2.

Доказательство. 1. Оператор $\mathbf{D}$ непрерывен. Очевидно, что вполне достаточно доказать это утверждение об операторе $\mathbf{B}$. Итак, пусть $f \in C_l$. Тогда

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l}\,nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{l}\,nt$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 < \infty\,.$$

Обозначим

$$f^*(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n\chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) \cos\frac{2\pi}{l}\,nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n n\chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) \sin\frac{2\pi}{l}\,nt\,. \tag{3}$$

Потому что χ является для больших n $O\left(\frac{1}{n}\right)$-функцией, будет $f^*(t)$, согласно теореме Риса, функцией, интегрируемой с квадратом, и частичные суммы ряда (3) будут сходится к $f^*(t)$ в среднем. Следовательно, функция $\mathbf{V}^{(-1)}f^* = F$ является непрерывной функцией. Так как функция $\mathbf{V}^{(-1)}f^*$ с точностью до постоянного множителя равна функции $\mathbf{B}f$, $\mathbf{B}$ является действительно оператором, отображающим C_l в C_l. Аддитивность и однородность оператора $\mathbf{B}$ также очевидна. Если $|f| < 1$, то $\int_0^l f^{*2}(t)\,\mathrm{d}t < K$, причем K не зависит

[12]) Скажем, что функция $\chi(x)$ является $O\left(\frac{1}{x}\right)$ для $x \to \infty$, если существует $C > 0$ так, что $(\chi(x)\,.\,x) < C$ для $x \to \infty$.

от f. Из неравенства Шварца-Буняковского уже вытекает, что $\mathbf{V}^{(-1)}f^* < K_1$ и что K_1 не зависит от f. Значит, $\mathbf{B}$ есть непрерывный линейный оператор.

2. Оператор $(\mathbf{B}, \varphi)$ обладает свойством 1.

Прежде всего докажем, что

$$\left(\sin \frac{2\pi}{l} nt\right)_h = C_h(n) \sin \frac{2\pi}{l} nt\,, \tag{4}$$

$$\left(\cos \frac{2\pi}{l} nt\right)_h = C_h(n) \cos \frac{2\pi}{l} nt\,, \tag{5}$$

где

$$C_h(n) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \cos \left(\frac{2\pi}{l}\right) n\tau \,\mathrm{d}\tau\,. \tag{6}$$

Действительно,

$$\left(\sin \frac{2\pi}{l} nt\right)_h = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(t-\tau) \sin \frac{2\pi}{l} n\tau \,\mathrm{d}\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \sin n \frac{2\pi}{l} (t-\tau) \,\mathrm{d}\tau =$$

$$= \sin \left(\frac{2\pi}{l} tn\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \cos \frac{2\pi}{l} n\tau \,\mathrm{d}\tau - \cos \left(\frac{2\pi}{l} tn\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega(\tau) \sin \frac{2\pi}{l} \tau n \, d\tau\,.$$

Потому что $\omega(\tau)$ — симметрическая функция, второй интеграл равен нулю, и уравнение (4) доказано. Аналогично можно доказать и (5).

Докажем, что оператор обладает свойством 1.

Пусть $f(t) \in C_l$. Тогда, если

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2\pi}{l} nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{2\pi}{l} nt$$

получим

$$\left(\frac{2\pi}{l}\right)^2 \mathbf{D}f = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2} a_n - \chi \left(\frac{n2\pi}{l}\right) b_n\right) \cos \frac{2\pi}{l} nt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{n^2} b_n + \chi \left(\frac{n2\pi}{l}\right) a_n\right) \sin \frac{2\pi}{l} nt$$

и, следовательно,

$$((\mathbf{D}f)_h)'' = \sum_{n=1}^{\infty} C_h(n) \left(a_n + n^2\chi \left(\frac{n2\pi}{l}\right) b_n\right) \cos \frac{2\pi}{l} nt +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} C_h(n) \left(b_n - n^2\chi \left(\frac{n2\pi}{l}\right) a_n\right) \sin \frac{2\pi}{l} nt\,.$$

По предположению

$$(\mathbf{D}(f)_h)'' + \varphi_0(f) = 0\,.$$[13]

Значит,

$$\begin{aligned} a_n + n^2\chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) b_n = 0 \\ b_n - n^2\chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) a_n = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

для $n = 1, 2, \ldots$

Так как $\chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right) > 0$, то определитель системы (7) отличен от нуля и, следовательно, $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Итак, $f(t) = a_0$. Но в таком случае $\mathbf{D}f = 0$ и, следовательно, $\varphi_0(f) = 0$. Однако $\varphi_0(f) = a_0$. Поэтому $a_0 = 0$, ч. т. д.

Теперь докажем, что оператор $(\mathbf{D}, \varphi)$ обладает свойством 2. Пусть опять

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi}{l} nt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi}{l} nt\,.$$

Тогда

$$f_h(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_h(n)\, a_n \cos\frac{2\pi}{l} nt + \sum_{n=1}^{\infty} C_h(n)\, b_n \sin\frac{2\pi}{l} nt$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^l (f_h(t))'((\mathbf{D}f)_h)''\, \mathrm{d}t &= \frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n a_n n + b_n^2 n^3 \chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right)\right) C_h^2(n) - \\ &- \frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\left(n b_n a_n - a_n^2 n^3 \chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right)\right) C_h^2(n) = \\ &= \frac{2\pi}{l}\sum_{n=1}^{\infty} C_h^2(n)\, n^3 \chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right)(a_n^2 + b_n^2) > 0\,, \end{aligned}$$

причем, ввиду того, что χ — положительная функция, равенство может иметь место только тогда, когда $a_n = b_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$ Но в таком случае $f = a_0 = \mathrm{konst}$. Этим второе свойство доказано.

4. Теперь докажем третье свойство. Очевидно, что оператор $\mathbf{V}^{(-2)}$ вполне непрерывен. Следовательно, достаточно доказать полную непрерывность оператора $\mathbf{B}$. Итак, мы должны доказать, что множество функций $\{\mathbf{B}f\}$ является компактным для всех $\|f\| \leq 1$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что множество $\{\mathbf{B}f\}$ состоит из равномерно ограниченных и равно-

---

[13]) См. сноску на стр. 184.

степенно непрерывных функций. Но это сразу же получается из неравенства Шварца-Буняковского, если учесть, что функции $\boldsymbol{B}f$ являются примитивными функциями к множеству $\{f^*\}$, имеющими ограниченную норму в пространстве функций с интегрируемым квадратом, и что из этого вытекает $\int_0^l \boldsymbol{B}f\,\mathrm{d}t = 0$ (с доказательством непрерывности оператора $\boldsymbol{B}$). Этим теорема 1 полностью доказана.

Итак, мы показали, что оператор, соответствующий гипотезам Фохта, Сорокина и, в сущности, и Больтцмана, является оператором внутреннего трения в смысле определения 2. Аналогичным путем можно доказать, что оператор, соответствующий выше приведенной гипотезе d), есть оператор того же типа. Мы дали весьма общее определение оператора внутреннего трения. В этом определении заключены все в настоящее время применяемые линейные гипотезы внутреннего трения.

Можно было дать еще более общее определение. Но ввиду того, что с физической точки зрения такая общность вполне удовлетворительна, мы не ставим перед собой задачу добиваться математически наиболее общей формулировки.

В определении 2 мы поставили некоторые требования, которым должен удовлетворять оператор $(\boldsymbol{D}, \varphi)$. Теперь скажем несколько слов о физической сущности этих условий.

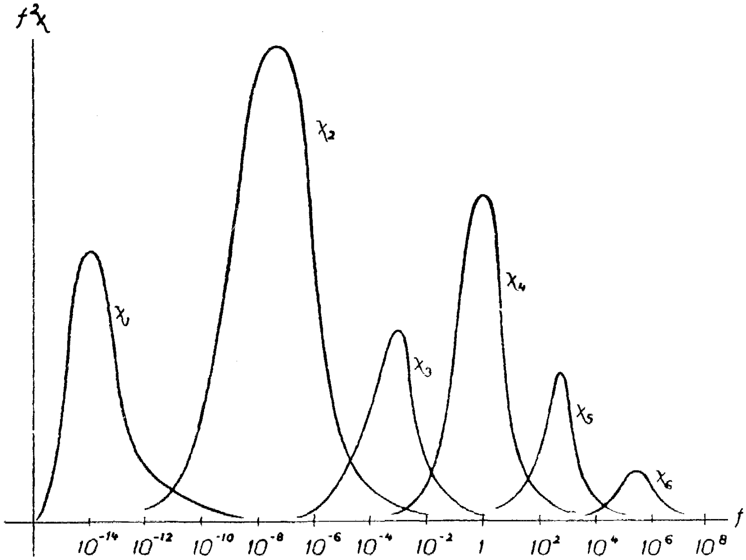
1. Посредством оператора внутреннего трения мы данной деформации ставили в соответствие определенное напряжение. Непрерывность оператора $(\boldsymbol{D}, \varphi)$ означает, что малой деформации соответствует тоже малое (конечно, в общем смысле) напряжение.

2. Допустим, что $(\boldsymbol{D}, \varphi)''$ — непрерывная функция. В таком случае свойство 1 выражает то обстоятельство, что нулевое напряжение, т. е. функция, поставленная в соответствие деформации, должна равняться нулю, можем получить только в том случае, когда $f = 0$, т. е. имеем нулевую деформацию. В общем случае, конечно, функция $\boldsymbol{D}f$ может быть только непрерывной, и, следовательно, вторая производная в классическом смысле вовсе не существует. Тогда можем данное уравнение понимать или в общем (по теории распределений) смысле, или, не применяя теорию распределений, можем поступать таким образом, как в нашем определении, т. е. использовать ω_h функции.

3. Допустим, что $f'(t)$ непрерывна так же, как и $(\boldsymbol{D}f)''$. Тогда можем перейти к пределу $h \to 0$, и условие 2 запишется в виде $\int_0^l f'(t)(\boldsymbol{D}f)''\,\mathrm{d}t > 0$. Этот интеграл означает количество энергии, потерянной при одном колебательном цикле, т. е. количество энергии, превратившейся в тепло Итак, условие 2 выражает то физическое обстоятельство, что в течение

одного цикла необходимо имеется потеря энергии, т. е. часть энергии при любого вида колебаниях превращается в теплоту, только в случае постоянной деформации, т. е. в таком случае, когда колебания вообще отсутствуют, может процесс пройти без потерь.

4. Последнее требование имеет наименее наглядное физическое значение. Оно находится в тесной связи с характером сил инерции, соответствующих деформации, которая пропорциональна силам внутреннего трения.



f = частота

Рис. 2. Схематический рисунок релаксационного спектра.

Особенно подробно мы изучали один специальный вид оператора внутреннего трения, о котором мы в теореме 1 доказали, что он обладает всеми свойствами, перечисленными в определении 2. В этом операторе важную роль играет функция χ. Эта функция в сущности выражает зависимость внутреннего трения на частоте. Физический смысл значения $n^2\chi\left(\frac{n2\pi}{l}\right)$ (с точностью до постоянного множителя) — это коэффициент затухания при данной частоте.

Функция χ имеет для различных материалов различные виды, причем всегда вид ее довольно сложен, так как при различных частотах затухание вызвано различными причинами.

Например, в случае металлов функцию χ можно представить в виде суммы $\chi = \sum_{i=1}^{n} \chi_i$, причем χ_i означает затухание, вызванное только одной причиной.

На рис. 2 эти функции схематически изображены. Здесь значит

χ_1 — затухание, обусловленное анизотропным распределением пар растворенных атомов под действием внешних напряжений,

χ_2 — затухание, обусловленное процессами, пробегающими в граничных слоях зерен поликристаллов.

χ_3 — затухание, обусловленное процессами, связанными с границами разделения двойников.

χ_4 — затухание, обусловленное растворенными атомами в сплавах типа внедрения.

χ_5 — затухание, обусловленное поперечными потоками тепла.

χ_6 — затухание, обусловленное межкристаллитными потоками тепла. (По Зинеру [5].)

Так как функция $n^2\chi(n)$ является ограниченной функцией, то внутреннее трение имеет, очевидно, свойства, требуемые в теореме 1.

Отметим еще, что в случае затухания, вызванного сопротивлением воздуха $\chi n^2 = Cn$ в довольно широком интервале частот n, а в случае гипотезы Сорокина $\chi n^2 = C$.

Результаты Зинера пригодны главным образом при малых амплитудах и сравнительно небольших напряжениях.

2. ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

В настоящем отделе мы используем гипотезу линейного трения, высказанную в предыдущем отделе, при расчете резонансной кривой механической системы с одной степенью свободы.

Прежде всего дадим определение следующей задачи.

Определение 4. *Пусть* ($\mathbf{D}$, φ) *— оператор внутреннего трения по определению 2 и пусть* $m > 0$, $k > 0$. *Пусть задана функция* $f(t) \in C_l$ *и постоянная* C. *Тогда задачей вынужденных колебаний назовем задачу, заключающуюся в нахождении функции* $y(t) \in C_l$, *удовлетворяющей уравнению*

$$my''(t) + k((\mathbf{D}y(t))'' + \varphi(y(t))) = f''(t) + C \text{ [14]} \tag{8}$$

При этом выполнение этого уравнения мы понимаем в том смысле, что для всех достаточно малых $h > 0$ *справедливо*

$$m(y_h(t))'' + k(((\mathbf{D}y)_h)'' + \varphi(y)) = (f_h(t))'' + C\,. \tag{9}$$

Сначала докажем теорему об однозначности.

[14]) Возбуждающая сила равна $f''(x) + C$. Следовательно, если $g(t)$ возбуждающая сила то $C = \varphi_0(g)$ и $f = \mathbf{V}^{-2}g$.

Теорема 2. *Существует лишь одно решение задачи вынужденных колебаний.*

Доказательство. Потому что дело касается линейной задачи, достаточно доказать, что уравнение (9) имеет только тривиальное решение, если $f = 0 = C$. Итак, пусть функция $y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$my''(t) + k((\mathbf{D}y)'' + \varphi(y)) = 0$$

или же, согласно определению 4, для всех достаточно малых $h > 0$ уравнению

$$my_h''(t) + k(((\mathbf{D}y)_h)'' + \varphi(y)) = 0\,.^{15)} \tag{10}$$

Функции y_h'', y_h', y_h, $(\mathbf{D}y_h)''$ являются периодическими, непрерывными функциями (см. лемму 2). Уравнение (10) умножим на функцию y_h' и проинтегрируем его в пределах $(0, l)$. Так как

$$\int_0^l (y_h)''\, y_h'\, \mathrm{d}t = \tfrac{1}{2}(y_h')^2]_0^l = 0 \quad \text{и} \quad \int_0^l (y_h')\, \mathrm{d}t = 0\,,$$

можем заключить, что

$$\int_0^l ((\mathbf{D}y)_h)''\, y_h'\, \mathrm{d}t = 0\,.$$

Согласно свойству 2 оператора внутреннего трения (см. определение 2) будет, следовательно, $y = \mathrm{konst}$. Но в таком случае $y_h'' = 0$ и, значит, $(\mathbf{D}y)_h'' + \varphi(y) = 0$. Следовательно, по свойству 1 оператора внутреннего трения $y = 0$. Этим утверждение доказано.

Теперь докажем теорему существования:

Теорема 3. *Задача, сформулирована в определении* 4, *имеет одно и только одно решение.*

Доказательство. Не умаляя общности, можем предполагать, что $\int_0^l (\mathbf{D}y)\, \mathrm{d}t = 0$ для каждого $y \in C_l$ и $\int_0^l f(t)\, \mathrm{d}t = 0$.

Прежде всего докажем, что наша задача в смысле определения 4 эквивалентна решению следующего уравнения

$$my(t) = -k\mathbf{D}y - \tfrac{1}{2}\varphi(y)\, kt^2 + f(t) + \tfrac{1}{2}Ct^2 + \tfrac{1}{2}\varphi(y)\, ktl - \tfrac{1}{2}Clt + \frac{1}{l}\,\varphi_0(y)\, m\,. \tag{11}$$

При этом отображение в правой части уравнения надо понимать в том смысле, что речь идет об интервале $\langle 0, l\rangle$ и его периодическом продолжении (с периодом l); это значит, что к каждой периодической (непрерывной) функции найдем непрерывную функцию в интервале $\langle 0, l\rangle$ определенную выражением в правой части уравнения а затем эту найденную функцию

[15]) См. сноску на стр. 183.

периодически продолжим. Определенное таким образом отображение является действительно отображением пространства C_l в C_l.

Теперь докажем, что решения уравнения (8), или же (9), удовлетворяют уравнению (11). Проинтегрируем дважды уравнение (9). Получим

$$my_h(z) = -k(\mathbf{D}y)_h - \tfrac{1}{2}\varphi(y)\,t^2k + f_h(t) + \tfrac{1}{2}Ct^2 + \alpha_0 + \alpha_1 t\,, \tag{12}$$

где α_0, α_1 — постоянные интегрирования. По предположению $y_h(t)$ — периодическая функция. Потому, что функции $f_h(t)$, $(\mathbf{D}y)_h$ являются периодическими, будет обязательно и функция

$$-\tfrac{1}{2}\varphi(y)\,t^2k + \tfrac{1}{2}Ct^2 + \alpha_0 + \alpha_1 t$$

периодической. Но это может быть так только в том случае, если $k\varphi(y) = C$, $\alpha_1 = 0$. Теперь проинтегрируем уравнение (12) в пределах $\langle 0, l\rangle$. Получим

$$m\int_0^l y_h(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^l (\mathbf{D}y)_h\,\mathrm{d}t + \int_0^l (f(t))_h\,\mathrm{d}t + \alpha_0 l\,. \tag{13}$$

Так как

$$\lim_{h\to 0}(\mathbf{D}y)_h = \mathbf{D}y\,,\quad \lim_{h\to 0} f_h(t) = f(t)\,,\quad \lim_{h\to 0} y_h(t) = y(t)\,,$$

причем сходимость является равномерной (см. лемму 2), можем в уравнении (13) перейти к пределу $h \to 0$, следовательно, будет

$$m\int_0^l y(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^l (\mathbf{D}y)\,\mathrm{d}t + \int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t + \alpha_0 l\,.$$

Но по предположению $\int_0^l (\mathbf{D}y)\,\mathrm{d}t = \int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t = 0$; следовательно, $m\varphi_0(y) = \alpha_0 l$; поэтому $\alpha_0 = \dfrac{\varphi_0(y)}{l}\,m$.[16] Итак, если выполняется уравнение (8), выполняется и уравнение (11).

Предположим теперь наоборот, что $y(t) \in C_l$ является решением уравнения (11). Проинтегрируем это уравнение в пределах $(0, l)$. Получим

$$m\varphi_0(y) = -\tfrac{1}{2}\varphi(y)\,k(\tfrac{1}{3}l^3 - \tfrac{1}{2}l^3) + \tfrac{1}{2}C(\tfrac{1}{3}l^3 - \tfrac{1}{2}l^3) + \varphi_0(y)\,m\,,$$

следовательно, $k\varphi(y) = C$. Поэтому $my(t) = -k(\mathbf{D}y) + \dfrac{1}{l}\varphi_0(y)\,m + f(t)$. Если справедливо (11) справедливо также

$$my_h = -k(\mathbf{D}y)_h + f_h + \frac{1}{l}\varphi_0(y)\,m.$$

Дифференцируя это уравнение два раза, получим

$$my_h'' = -k(\mathbf{D}y)_h'' + (f_h)''\,.$$

Потому что $k\varphi(y) = C$, выполняется также уравнение (9). Итак, мы доказали, что уравнения (9) и (11) эквивалентны.

[16]) О функционале φ_0 см. определение 3.

Но уравнение (11) является функциональным уравнением в пространстве C_l. Потому что φ и φ_0 — непрерывные функционалы, а **D** — вполне непрерывный оператор, имеет место альтернатива Фредгольма.[17]) В теореме 2 мы доказали однозначность решения. Следовательно, этим доказано и существование решения. Теорема 3 полностью доказана.

Замечание. Мы доказали существование и единственность решения при довольно общих предположениях, для довольно общих операторов и правых частей уравнений. Выражение правой части (функции f) заключает в себе все наиболее важные возбуждающие силы, а также и импульсы.

Ясно видно, и я в другом месте уже упоминал об этом, что этот метод можно еще обобщить.

3. О РАСЧЕТЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

В предыдущем отделе мы доказали существование и единственность решения задачи вынужденных колебаний в смысле определения 4. Теперь будем заниматься вопросом, как это решение практически находить.

Из теоремы существования вытекает, что непрерывное решение $y(t)$ нашей задачи действительно существует. Если разложить $y(t)$ в ряд Фурье, то этот ряд не будет в общем случае сходиться в обычном смысле. Но если этот ряд будем суммировать в смысле сумм Чезаро, то он будет сходиться и даже равномерно. Итак, если обозначим

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_0^l y(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l y(t)\cos\frac{n2\pi}{l}\,t\,\mathrm{d}t\,,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l y(t)\sin\frac{n2\pi}{l}\,t\,\mathrm{d}t\,,$$

то последовательность функций

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{n}\,a_i\cos\frac{2\pi i}{l}\,t + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{n}\,b_i\sin\frac{2\pi i}{l}\,t$$

будет сходиться равномерно к функции $y(t)$. Это будет именно так потому, что $S_n(t)$ является последовательностью центров Чезаро.[18])

[17]) Об альтернативе Фредгольма см., напр., [23].
[18]) О суммировании рядов Фурье в смысле Чезаро см., напр. [24].

В доказательстве теоремы существования мы показали, что функция $y(t)$, являющаяся решением задачи по определению 4, удовлетворяет также уравнению

$$my(t) = -k(\mathbf{D}y) + f(t) + \frac{1}{l}\varphi_0(y)\, m\,. \text{[19]}$$

Из этого уравнения будем вычислять неизвестную функцию $y(t)$. Обозначим еще

$$\alpha_n^{p,1} = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{D}\left(\cos\frac{2\pi p}{l}t\right)\cos\frac{2\pi n}{l}t\,\mathrm{d}t\,, \quad \begin{matrix} p = 0, 1, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

$$\alpha_n^{p,2} = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{D}\left(\sin\frac{2\pi p}{l}t\right)\cos\frac{2\pi n}{l}t\,\mathrm{d}t\,, \quad \begin{matrix} p = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

$$\beta_n^{p,1} = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{D}\left(\cos\frac{2\pi p}{l}t\right)\sin\frac{2\pi n}{l}t\,\mathrm{d}t\,, \quad \begin{matrix} p = 0, 1, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

$$\beta_n^{p,2} = \frac{2}{l}\int_0^l \mathbf{D}\left(\sin\frac{2\pi p}{l}t\right)\sin\frac{2\pi n}{l}t\,\mathrm{d}t\,, \quad \begin{matrix} p = 1, 2, \ldots \\ n = 1, 2, \ldots \end{matrix}$$

Пусть теперь

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{2\pi n}{l}t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{2\pi n}{l}t\,, \text{[20]}$$

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \cos\frac{2\pi n}{l}t + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \sin\frac{2\pi n}{l}t\,.$$

Следовательно, для $\varepsilon > 0$ существует N так, что для всех $n > N$ $|y(t) - S_n(t)| < \varepsilon$, где

$$S_n(t) = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{n}a_i\cos\frac{2\pi i}{l} + \sum_{i=1}^{n-1}\frac{n-i}{n}b_i\sin\frac{2\pi i}{l}t\,.$$

Аналогично и для $f(t)$.

Так как $\mathbf{D}$ является непрерывным оператором, то для достаточно больших n будет также $\|\mathbf{D}y - \mathbf{D}S_n\| < \varepsilon$. Поэтому получим

---

[19]) Будем предполагать, что $\int_0^l (\mathbf{D}f)\,\mathrm{d}t = 0$ и $\int_0^l f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, что, очевидно, можно сделать, не умаляя общности.

[20]) Ряд сходится по Чезаро.

$$ma_0 + m\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{n}a_j\cos\frac{2\pi j}{l}t + m\sum_{j=1}^{n-1}\frac{n-j}{n}b_j\sin\frac{2\pi j}{l}t =$$

$$= -k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_j^{i,1}\frac{n-i}{n}a_i\cos\frac{2\pi j}{l}t - k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_j^{i,2}\frac{n-i}{n}b_i\cos\frac{2\pi j}{l}t -$$

$$- k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{n-1}\beta_j^{i,1}\frac{n-i}{n}a_i\sin\frac{2\pi j}{l}t - k\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{n-1}\beta_j^{i,2}\frac{n-i}{n}b_i\sin\frac{2\pi j}{l}t +$$

$$+ \sum_{j=1}^{\infty}\gamma_j\cos\frac{2\pi j}{l}t + \sum_{j=1}^{\infty}\delta_j\sin\frac{2\pi j}{l}t + \frac{1}{l}ma_0 l + \varepsilon(t)\,,$$

где $\varepsilon(t)$ — периодическая функция, которая выбором достаточно большого n может быть сделана как угодно малой.

Сравнив коэффициенты при отдельных членах ряда Фурье, получим систему уравнений

$$m\frac{n-p}{n}a_p = -k\sum_{i=0}^{n-1}\alpha_p^{i,1}\frac{n-i}{n}a_i - k\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_p^{i,2}\frac{n-i}{n}b_i + \gamma_p + \varepsilon_{p,n}^{(1)}\,,$$

$$m\frac{n-p}{n}b_p = -k\sum_{i=0}^{n-1}\beta_p^{i,1}\frac{n-i}{n}a_i - k\sum_{i=1}^{n-1}\beta_p^{i,2}\frac{n-i}{n}b_i + \delta_p + \varepsilon_{p,n}^{(2)}\,,$$

$$p = 1, 2, \ldots$$

Произведя переход $n \to \infty$, получим бесконечную систему уравнений

$$\begin{aligned} ma_p &= -k\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_p^{i,1}a_i - k\sum_{i=0}^{\infty}\alpha_p^{i,2}b_i + \gamma_p\,,\\ mb_p &= -k\sum_{i=0}^{\infty}\beta_p^{i,1}a_i - k\sum_{i=0}^{\infty}\beta_p^{i,2}b_i + \delta_p\,. \end{aligned} \tag{14}$$

При этом все суммы бесконечных рядов существуют в смысле центров Чезаро (метод $(C,1)$). К системе (14) необходимо присоединить уравнение

$$k\varphi(y) = C\,, \tag{15}$$

которое можем опять-таки заменить системой. Действительно, если обозначить

$$\varphi\left(\cos\frac{2\pi p}{l}t\right) = \varphi_p^{(1)}\,, \quad p = 0, 1, 2, \ldots, \varphi\left(\sin\frac{2\pi p}{l}t\right) = \varphi_p^{(2)}\,, \quad p = 1, 2, \ldots$$

то уравнение (15) окажется эквивалентным уравнению

$$\sum_{p=0}^{\infty}a_p\varphi_p^{(1)} + \sum_{p=1}^{\infty}b_p\varphi_p^{(2)} = \frac{C}{k}\,, \tag{16}$$

где бесконечные ряды опять суммируем по центрам Чезаро.

Таким образом мы получили бесконечную систему линейных уравнений. В подавляющем большинстве практических примеров (относятся сюда и все гипотезы, которые мы привели в начале настоящей работы), система уравнений (14), (16) принимает специальный вид, а именно, распадается в сущности на системы уравнений с двумя неизвестными (гипотезы, приведенные под a, b, c), или становится системой, решение которой можно также получить в явном виде.

Теперь покажем, какой вид будет иметь система (14) и (16) в случае, когда оператор $(\mathbf{D}, \varphi)$ будет оператором, описанным в теореме 1. Здесь получаем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D}\cos\frac{2\pi p}{l}t &= -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\cos\frac{2\pi p}{l}t + \left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\chi\left(\frac{2p\pi}{l}\right)\sin\frac{2\pi p}{l}t\,, \\ \mathbf{D}\sin\frac{2\pi p}{l}t &= -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\sin\frac{2\pi p}{l} \quad -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\chi\left(p\frac{2\pi}{l}\right)\cos\frac{2\pi p}{l}t \end{aligned}\right. \tag{17}$$

$$\text{для } p = 1, 2, \ldots$$

$$\mathbf{D}1 = 0\,.$$

$$\left.\begin{aligned} &\varphi\left(\sin\frac{2\pi p}{l}t\right) = 0\,, \\ &\varphi\left(\cos\frac{2\pi p}{l}t\right) = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{для} \quad p = 1, 2, \ldots, \tag{18}$$

$$\varphi(1) = 1\,.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \alpha_n^{p,1} &= -\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2} \quad \text{для } p = n,\ n = 1, 2, \ldots \\ &= 0 \quad \text{для } p \neq n \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} \alpha_n^{p,2} &= -\chi\left(\frac{p2\pi}{l}\right)\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \quad \text{для } p = n,\ n = 1, 2, \ldots \\ &= 0 \quad \text{для } p \neq n \end{aligned} \tag{19'}$$

$$\begin{aligned} \beta_n^{p,1} &= \chi\left(\frac{2\pi p}{l}\right)\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \quad \text{для } p = n,\ n = 1, 2, \ldots \\ &= 0 \quad \text{для } p \neq n \end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned} \beta_n^{p,2} &= -\frac{1}{p^2}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 \quad \text{для } p = n,\ n = 1, 2, \ldots \\ &= 0 \quad \text{для } p = 0 \end{aligned} \tag{20'}$$

$$\begin{aligned} \varphi_p^{(1)} &= 0 \quad \text{для } p \geqq 1 \\ \varphi_p^{(2)} &= 0 \quad \text{для } p \geqq 1 \\ \varphi_p^{(1)} &= 1 \quad \text{для } p = 0\,. \end{aligned} \tag{21}$$

Система уравнений (14) распадается на системы

$$\begin{aligned} ma_p &= -k\alpha_p^{p,1}a_p - k\alpha_p^{p,2}b_p + \gamma_p\,, \\ mb_p &= -k\beta_p^{p,1}a_p - k\beta_p^{p,2}b_p + \delta_p\,. \end{aligned} \tag{22}$$

Уравнение (16) будет иметь вид

$$a_0\varphi_0^{(1)} = \frac{C}{k}\,. \tag{23}$$

Подставив выражения (19), (20), (21), получим

$$\begin{aligned} ma_p &= k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\,a_p + k\chi\left(\frac{p2\pi}{l}\right)\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 b_p + \gamma_p\,, \\ mb_p &= -k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\chi\left(\frac{p2\pi}{l}\right)a_p + k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\,b_p + \delta_p\,, \\ a_0 &= \frac{C}{k}\,. \end{aligned} \tag{24}$$

Определитель системы (24) для любого p отличен от нуля. Поэтому a_p, b_p определены однозначно. Зная a_p, b_p, можем найти и решение $y(t)$.[21])

Теперь приведем и покажем решение системы (24) для специального выбора функции χ. Положим, следуя гипотезе Сорокина, $\chi\left(\frac{p2\pi}{l}\right) = \frac{1}{p^2}\,\psi$. Тогда получим

$$\begin{aligned} ma_p &= k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\,a_p + \psi k\,\frac{1}{p^2}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2 b_p + \gamma_p\,, \\ mb_p &= -k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\,a_p\psi + k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\,b_p + \delta_p\,, \\ a_0 &= \frac{C}{k}\,, \end{aligned}$$

следовательно

$$a_p = \frac{\gamma_p\left(m - k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\right) + \delta_p\psi\,\frac{1}{p^2}\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2}{\left(m - k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{1}{p^2}\right)^2 + \left(k\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2\frac{\psi}{p^2}\right)^2} = \frac{\gamma_p\left(m\left(\frac{p2\pi}{l}\right)^2 - k\right) + \delta_p\psi}{\left(m\left(\frac{p2\pi}{l}\right)^2 - k\right)^2 + \psi^2}\left(\frac{p2\pi}{l}\right)^2.$$

Аналогичное выражение получим и для b_p.

Зная эти коэффициенты, получим искомое решение в виде

$$y(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{2\pi n}{l}\,t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{2\pi n}{l}\,t\,.$$

---

[21]) Непосредственно видно, что система (24) имеет решение. Это же вытекает и из общих теорем о существовании и однозначности решения задачи в смысле теоремы 4. См. теорему 3.

Этот ряд сходится в смысле центров Чезаро равномерно к непрерывной функции.

Заметим еще, что коэффициенты γ_p и δ_p означают коэффициенты Фурье второй примитивной функции возбуждающей силы, следовательно коэффициенты Фурье возбуждающей силы равны $-\gamma_p\left(\frac{2\pi p}{l}\right)^2$ или же $-\delta_p\left(\frac{2\pi p}{l}\right)^2$.

4. О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, НАХОДЯЩИХСЯ В СВЯЗИ С ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИЕЙ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ С ВНУТРЕННИМ ТРЕНИЕМ

В данном отделе сделаем некоторые замечания по поводу теории, которую мы развили в предыдущих отделах. Анализируя подробнее отделы 2 и 3, легко обнаружим, что теорема о существовании и единственности решения задачи вынужденных колебаний будет справедливой и в том случае, если свойство 2 оператора внутреннего трения заменим другим условием, а именно, если обратим неравенство. Вместо условия

$$\int_0^l (f_h)'(\mathbf{D}f)_h'' \,\mathrm{d}t > 0 \tag{25}$$

поставим условие

$$\int_0^l (f_h)'(\mathbf{D}f)_h'' \,\mathrm{d}t < 0\,. \tag{26}$$

Согласно сказанному в отделе 2 условие (25) означает поглощение энергии, следовательно, условие (26) — возникновение энергии. Итак, заменив условие (25) условием (26), получаем самовозбужденные колебания. Кажется несколько парадоксальным то обстоятельство, что существует решение, в то время как в действительности оно существовать не может. Парадокс получился вследствие того, что мы пока не брали во внимание вопросы устойчивости. Ими будет заниматься в следующей части. Покажем, что в случае затухающих колебаний вынужденные стационарные колебания устойчивы, в то время как в случае самовозбужденных колебаний (оператор $\mathbf{D}$ удовлетворяет условию (26)) имеем дело с неустойчивыми колебаниями. Вопросы устойчивости будут обьектом наших рассуждений позднее.

Литература

[1] *Zener C.*: Proc. Phys. Soc. 52 (1940).
[2] *Seitz F.*: The Physics of Metals, New York 1943, kap. X.
[3] *Seitz F.*, *Read T.*: J. Appl. Phys. 12 (1941).
[4] *Постников В. С.*: Успехи физических наук 53 (1954).
[5] *Zener C.*: Trans. Amer. Inst. Min. Met. Engrs. 167 (1946).

[6] *Zener C.*: Elasticity and Anelasticity of Metals, Chicago 1948.
Существует перевод: Упругость и неупругость металлов, Москва 1954.
[7] *Сорокин Е. С.*: Внутренние и внешние сопротивления при колебаниях твердых тел, Научное сообщение ЦНИИСК 3 (1957).
[8] *Nowick A. S.*: Phys. Rev. 80 (1950).
[9] *Nowick A. S.*: Symposium on the Plastic Deformation of Crystalline Solids, Pittsburgh 1950.
[10] *Nowick A. S.*: Internal Friction in Metals, Progress of Metal Physics 4 (1953).
[11] *Meyer O. J.*: Reine u. angew. Math. 78 (1874).
[12] *Voigt W.*: Ann. d. Phys. 47 (1892).
[13] *Лунц Е. Б.*: Прикл. матем. и мех. 1 (1938).
[14] *Schlippe B.*: Ing. Arch. 6 (1933).
[15] *Ржаницын А. Р.*: Некоторые вопросы механики систем деформирующих во времени, Гостехиздат 1948.
[16] *Давиденков Н. Н.*: Журн. тех. физики VIII (1938).
[17] *Писаренко Г. С.*: Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале, Киев 1955.
[18] *Pisarenko G. S.*: Apl. mat. 2 (1957).
[19] *Панов Д. Ю.*: Прикл. матем. и мех. IV (1940).
[20] *Сорокин Е. С.*: Метод учета неупругого сопротивления материала при расчете конструкции на колебания, Сборник ЦНИПС 1955.
[21] *Сорокин Е. С.*: Динамический расчет несущих конструкций зданий, Москва 1956.
[22] *Бабушка И.*, *Колоушек В.*: Линейная теория внутреннего поглощения при колебаниях упругих систем. (В печати.)
[23] *Люстерник Л. А.*, *Соболев В. И.*: Элементы функционального анализа, Москва 1951.
[24] *Титчмаш Е.*: Теория функций, Москва 1951.

Souhrn

LINEÁRNÍ TEORIE VNITŘNÍHO TŘENÍ

IVO BABUŠKA

(Došlo dne 11. července 1958.)

A. TEORIE PERIODICKÝCH KMITŮ SOUSTAV S JEDNÍM STUPNĚM VOLNOSTI

Část I.

V práci se vychází z obecného vztahu mezi periodickou deformací $\varepsilon(t)$ a příslušným napětím $\sigma(t)$ ve tvaru

$$\sigma(t) = E[(\boldsymbol{D}\varepsilon(t))'' + \varphi(\varepsilon)] \,. \tag{1}$$

Předpokládá se, že operátor $\boldsymbol{D}$ jest lineárním operátorem zobrazujícím prostor všech spojitých l-periodických funkcí C_l do sebe; $\varphi(\varepsilon)$ jest spojitým funkcionálem v témže prostoru. $\varphi(\varepsilon)$ chápe se přitom jako operátor přiřazující funkci $\varepsilon(t)$ konstantní funkci $\varphi(\varepsilon)$. O operátoru $\mathbf{D}$ a funkcionálu φ se dále předpokládá, že má následující vlastnosti:

1. Buď $f \in C_l$, a nechť $((\mathbf{D}f)_h)'' + \varphi(f) = 0$ pro každé dostatečně malé h. Potom $f = 0$.

2. Buď $f \in C_l$, $f \neq$ konst. Potom pro každé dostatečně malé h nechť platí

$$\int_0^l (f_h)'((\mathbf{D}f)_h)'' \, \mathrm{d}t > 0 .$$

3. Operátor $\mathbf{D}$ jest totálně spojitý.

Přitom je užito označení

$$f_h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(t - \tau) \, f(\tau) \, \mathrm{d}\tau \, ; \quad h > 0$$

a podobně $(\mathbf{D}f)_h$. Funkce $\omega_h(t)$ a její vlastnosti viz lemma 1. Funkce $f_h(t)$ resp. $(\mathbf{D}f)_h$ má všechny derivace.

V práci jest vyložen i fysikální význam uvedených předpokladů. Derivace v (1) nemusí obecně existovat. Potom jest třeba chápati rovnici (1) v zobecněném smyslu. Jest ukázáno, že takto vybudovaná teorie obsahuje všechny dnešní lineární hypotesy.

V odst. 2 studují se vynucené kmity soustavy s jedním stupněm volnosti. Tyto kmity jsou popsány diferenciální rovnicí

$$my''(t) + k((\mathbf{D}y)'' + \varphi(y)) = f''(t) + C \, . \tag{2}$$

Tuto rovnici jest třeba chápat v zobecněném smyslu tak, že pro každé dostatečně malé h platí

$$m(y_h(t))'' + k((\mathbf{D}y)_h)'' + \varphi(y) = (f_h(t))'' + C \, .$$

Rovnice (2) popisuje velmi obecný problém, zahrnuje i budící síly ve tvaru impulsů atd.

V práci jest dokázáno, že existuje právě jediné řešení rovnice (2).

V odst. 3 studuje se otázka určení řešení problému vynuceného periodického kmitání popsaného rovnicí (2).

Jest ukázáno, že Fourierovy koeficienty hledané rovnice vyhovují jistému systému nekonečně mnoho lineárních rovnic. Přitom jest však všechny řady sčítat sčítací metodou $(C, 1)$, ve smyslu Cesarovských středů.

V závěrečném 4. odstavci jsou naznačeny některé otázky zejména v souvislosti se stabilitou řešení.

Zusammenfassung

LINEARE THEORIE DER INNEREN REIBUNG

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 11. Juli 1958)

A. DIE THEORIE PERIODISCH SCHWINGENDER SYSTEME MIT EINEM FREIHEITSGRAD

I. Teil

In der Arbeit wird von der allgemeinen Beziehung zwischen der periodischen Deformation $\varepsilon(t)$ und der zugehörigen Spannung $\sigma(t)$ in der Form

$$\sigma(t) = E[(\mathbf{D}\varepsilon(t))'' + \varphi(\varepsilon)] \tag{1}$$

ausgegangen.

Es wird vorausgesetzt, dass der Operator $\mathbf{D}$ ein linearer Operator ist, welcher den Raum aller stetigen l-periodischen Funktionen C_l in sich abbildet. $\varphi(\varepsilon)$ ist ein stetiges Funktional im gleichen Raum. $\varphi(\varepsilon)$ wird dabei als Operator aufgefasst, welcher der Funktion $\varepsilon(t)$ die konstante Funktion $\varphi(\varepsilon)$ zuordnet. Vom Operator $\mathbf{D}$ und dem Funktional φ wird weiter vorausgesetzt, dass sie folgende Eigenschaften haben:

1. Es sei $f \in C_l$ und es möge $((\mathbf{D}f)_h)'' + \varphi(f) = 0$ für jedes hinreichend kleine h sein. Dann gilt: $f = 0$.

2. Es sei $f \in C_l$, $f \neq$ konst. Dann möge für jedes hinreichend kleine h gelten:

$$\int_0^l (f_h)'((\mathbf{D}f)_h)''\,\mathrm{d}t > 0\,.$$

3. Der Operator $\mathbf{D}$ ist total stetig.

Dabei wird folgende Bezeichnung verwendet:

$$f_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_h(t-\tau)\,f(\tau)\,\mathrm{d}_\tau\,, \quad h > 0$$

und ähnlich für $(\mathbf{D}f)_h$. Über die Funktion $\omega_h(t)$ und ihre Eigenschaften siehe Lemma 1. Die Funktion $f_h(t)$ bezw. $(\mathbf{D}f)_h$ hat alle Ableitungen.

In der Arbeit wird auch die physikalische Bedeutung der angeführten Voraussetzungen auseinandergesetzt. Die Ableitungen in der Gleichung (1) müssen nicht allgemein existieren. Dabei ist es nötig die Gleichung (1) im verallgemeinerten Sinn aufzufassen. Es wird gezeigt, dass eine derart ausgebaute Theorie alle heute geltenden linearen Hypothesen umfasst.

Im zweiten Paragraphen werden die erzwungenen Schwingungen eines Systems mit einem Freiheitsgrad studiert. Diese Schwingungen beschreibt die Differentialgleichung:

$$my''(t) + k((\mathbf{D}y)'' + \varphi(y)) = f''(t) + C\,. \tag{2}$$

Im verallgemeinerten Sinn ist diese Differentialgleichung so aufzufassen, dass für jedes hinreichend kleine h gilt

$$m(y_h(t))'' + k((\mathbf{D}y)''_h + \varphi(y)) = f''_h(t) + C\,.$$

Die Gleichung (2) beschreibt das sehr allgemeine Problem und umfasst auch zukünftige von Impulsen usw. bewirkte Einwirkungen. In der Arbeit wird gezeigt, dass gerade nur eine Lösung der Gleichung (2) existiert.

Im dritten Paragraphen wird die Frage der Bestimmung der Lösung des Problems erzwungener periodischer Schwingungen, wie es durch die Gleichung (2) gestellt wird, studiert. Es wird gezeigt, dass die Fourier-Koeffizienten der gesuchten Gleichung einem gewissen System unendlich vieler linearer Gleichungen genügen. Dabei ist es jedoch nötig alle Reihen nach der Additionsmethode $(C, 1)$ im Sinne von Césaro-Mitteln zu summieren.

Im abschliessenden vierten Paragraphen werden einige Fragen, welche insbesondere mit der Stabilität der Lösung zusammenhängen, gestreift.