Ivo Babuška

Нелинейная теория внутреннего трения

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 4, 303–321

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102671

НЕЛИНЕЙНАЯ ТЕОРИЯ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

ИВО БАБУШКА (Ivo Babuška)

(Поступило в редакцию 25/VIII 1958 г.) DT: 539.67

В работе изучается нелинейная теория внутреннего трения в том случае, когда коэффициент затухания не зависит от частоты, но зависит от амплитуды. Показано, что эти явления можно описать нелинейным дифференциальным уравнением. Свойства этого уравнения подробно исследуются. В заключение приводится пример.

ВВЕДЕНИЕ

При колебаниях каждой механической системы всегда встречаемся с затуханием, обусловленным необратимыми процессами внутреннего трения. На этой проблеме сосредоточивается внимание физиков и техников уже почти сто лет. Особенно в течение последних двадцати лет изучались весьма подробно все явления, находящиеся в связи с внутренним трением. Доказано, что внутреннее трение возникает всегда, даже при совсем незначительных напряжениях. Причины и внутриструктурные явления внутреннего трения особенно тщательно изучались у металлов. Оказалось, что можно назвать целый ряд причин. С одними встречаемся при небольших напряжениях, а при больших напряжениях имеем дело с другими. Обзорный реферат о полученных результатах физики металлов с точки зрения внутреннего трения см. в [1], [2]. О внутреннем трении см. еще также [3], [4].

Здесь мы не будем подробно заниматься ни физической теорией внутреннего трения, ни современными феноменологическими теориями, которые в настоящее время используются и лучше или хуже соответствуют действительности.

Из всех феноменологических гипотез остановимся подробнее только на гипотезе, основанной на понятии кривой гистерезиса. Основным положением гипотезы является здесь связь между напряжением и деформацией в случае циклической зависимости деформации от времени. Соотношение между напряжением и деформацией определяет здесь известную кривую гистерезиса, которую различные авторы выражают различно.

В этой группе гипотез явилась основным шагом вперед работа Н. Н. Давиденкова [5]. В ней показано, что при не незначительных напряжениях потери энергии, обусловленные внутренним трением, зависят от амплитуды, а не от скорости деформации. Затем Н. Н. Давиденков исследует кривую гистерезиса, которая возникает при циклической зависимости деформации под влиянием несовершенной упругости материала. Несовершенство упругости можно объяснить как следствие пластических микродеформаций в граничных слоях зерн гетерогенных материалов. Вследствие того, что здесь происходит отчасти упругая и отчасти упруго-пластическая деформация, материал, рассматриваемый в целом, не удовлетворяет линейному закону Гука. Мгновенный модуль упругости,[1]) следовательно, не постоянен; он является в общем случае функцией деформации и напряжения и будет иным в случае возрастающего у убывающего напряжения.

Давиденков в своей работе показывает, что такое представление правильно, и предлагает кривые гистерезиса для различных циклов нагрузки.

Гипотезу, предложенную Н. Н. Давиденковым, разработал и ввел в широкое применение в особенности Г. С. Писаренко (см. [6], [7]).

Однако формулировка Давиденкова и Писаренко имеет также свои невыгоды, заключающиеся в том, что она опирается на понятие кривой гистерезиса и всегда только для определенного вида циклической нагрузки. При точной математической формулировке в таком случае не совсем ясно, как следует поступать при переходе од одной циклической зависимости деформации к другой итд. Затруднения возникают при применении этой гипотезы внутреннего трения к собственным затухающим колебаниям.

В настоящей работе предположена расширенная математическая формулировка гипотезы, опирающаяся на те же интуитивные представления, из которых исходит Давиденков.

1. ГИПОТЕЗА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

В настоящем отделе будем заниматься выводом и анализом гипотезы внутреннего трения. Исследуем проблему о зависимости между напряжением и деформацией в том случае, когда имеется налицо внутреннее трение.

Формулируя вопросы, касающиеся внутреннего трения, необходимо исходить из основной зависимости между напряжением и деформацией. Дело заключается в том, чтобы определить оператор, который каждой периодической и непериодической зависимости деформации от времени поставил бы в соответствие надлежащую зависимость напряжения от времени.

[1]) Говорить о модуле упругости здесь не совсем точно и правильно. Мы употребляем это выражение только для простоты, так как ясно, что мы под этим подразумеваем.

Если ограничимся только одной основной зависимостью циклической деформации, то эта зависимость окажется, собственно говоря, основанием всех гипотез, опирающихся на понятие кривой гистерезиса. Необходимо здесь подчеркнуть, что гипотезы, пользующиеся понятием кривой гистерезиса, исходят из циклических зависимостей деформации специального вида, как, напр., гармоническая зависимость и т. под.

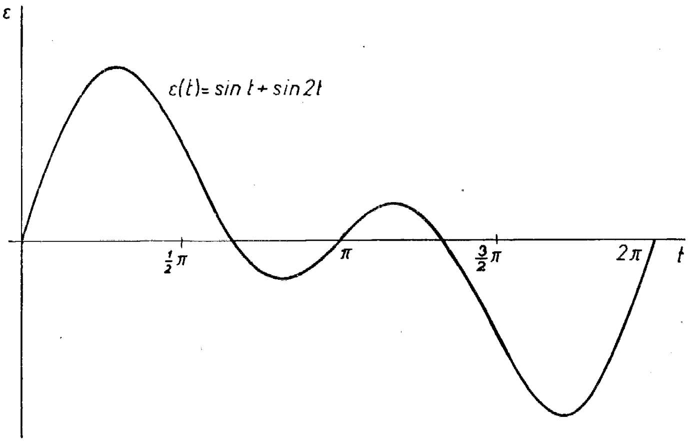

Рис. 1. График деформации.

Писаренко, например, выражает зависимость между напряжением и деформацией при помощи формулы

$$\begin{aligned} \vec{\sigma} &= \mathrm{E}\left\{\varepsilon - \frac{\eta}{n}\left[(\varepsilon_0 + \varepsilon)^n - 2^{n-1}\varepsilon_0\right]\right\}, \\ \overleftarrow{\sigma} &= \mathrm{E}\left\{\varepsilon - \frac{\eta}{n}\left[(\varepsilon_0 - \varepsilon)^n - 2^{n-1}\varepsilon_0\right]\right\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Отдельные символы здесь означают:

$\vec{\sigma}$, соотв. $\overleftarrow{\sigma}$ — зависимость напряжения при возрастающем, соотв. убывающем напряжении,

ε — деформацию,

ε_0 — амплитуду деформации,

η, n — постоянные, характеризующие кривую гистерезиса,

E — модуль упругости.

Соотношение (1) определяет зависимость между напряжением и деформацией в случае периодической зависимости деформации специального вида, по крайней мере, в том смысле, что можно говорить об амплитуде деформации. Но дело обстоит уже не так, например, для функции $\varepsilon(t) = \sin t + \sin 2t$; график этой функции показан на рис. 1.

Очевидно, что на затруднения наталкиваемся при непериодических колебаниях, в особенности затухающих.

Воспользуемся теперь той же идеей, как Давиденков; допустим, что кривая гистерезиса является следствием пластических микродеформаций в граничных слоях зерн. Это хорошо постигает и тот факт, что внутреннекристаллическая коррозия и микростатические трещины подчеркивают кривую гистерезиса.

Следовательно, мы можем представить, себе, что часть сечения находится в пластическом состоянии, а часть в упругом состоянии. Значит, поведение материала в данный момент зависит только от состояния достигнутых пластических микродеформаций; однако оно не зависит от того, каким образом мы достигли этих деформаций. При этом, конечно, необходимо различать случаи с возрастающим и убывающим напряжением.

Еще, однако, необходимо уяснить себе точно понятие пластической микродеформации. Но это понятие можно определенным способом обойти. На короткое время представим себе, что нам известна величина этих пластических микродеформаций. В таком случае мы умеем определить напряжение, соответствующее общей относительной деформации. Наоборот, если бы мы при данной общей деформации знали и соответствующее напряжение, то этим самым были бы в данный момент охарактеризованы и пластические микродеформации. Таким образом мы знали бы и соответствующий модуль упругости. Итак, понятие пластической микродеформации можем обойти, если каждой паре (ε, σ) поставить в соответствие надлежащий модуль упругости, который, конечно, будет не один и тот же в случае возрастающего и в случае убывающего напряжения.

Допустим поэтому, что нам известна зависимость деформации от времени $\varepsilon(t)$, и будем искать соответствующую зависимость напряжения. На основании выше сказанного можно утверждать, что напряжение $\sigma(t)$ будет удовлетворять следующему дифференциальному уравнению:

$$\dot{\sigma}(t) = f_1(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_+(t) + f_2(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_-(t)\,; \tag{2}$$

при этом мы положили

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\dot{\varepsilon}_+(t) = \mathrm{Max}\,[0, \dot{\varepsilon}(t)]\,,$$

$$\dot{\varepsilon}_-(t) = \mathrm{Min}\,[0, \dot{\varepsilon}(t)]\,.$$ [2]

[2]) Мы умышленно выражемся здесь только приближенно, без точной формулировки предположений, чтобы подчеркнуть интуитивный характер рассуждений. В дальнейшем дадим точные формулировки и будем выражаться точно.

Следовательно, к данной зависимости $\varepsilon(t)$ умеем определить $\sigma(t)$ только тогда, если знаем в начальное время t_0 значение $\sigma(t_0)$. При различных начальных напряжениях (соответствующих одной и той же деформации) получаем различные виды напряжения $\sigma(t)$, которое обусловлено одной и той же зависимостью $\varepsilon(t)$.

Но это полностью соответствует действительности и интуитивной мысли, которую мы развиваем. Мы получим, то есть, иную зависимость напряжения для одной и той же $\varepsilon(t)$, но при наличии в начальный момент иных пластических деформаций, характеризующих состояние материала, которое возникло в результате предыдущей работы материала.

Уравнение (2) мы написали более-менее формально. Чтобы оно описывало явления внутреннего трения, то, очевидно, выступающие в нем функции должны обладать определенными свойствами. Этим вопросом будем теперь подробнее заниматься.

Определение 1. *Уравнением внутреннего трения будем называть дифференциальное уравнение*

$$\dot{\sigma}(t) = f_1(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_+(t) + f_2(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_-(t)\,, \tag{3}$$

где положено

$$\dot{\sigma}(t) = \frac{\mathrm{d}\sigma(t)}{\mathrm{d}t}, \quad \dot{\varepsilon}(t) = \frac{\mathrm{d}\varepsilon(t)}{\mathrm{d}t},$$

$$\dot{\varepsilon}_+(t) = \mathrm{Max}\,(0, \dot{\varepsilon}(t))\,, \quad \dot{\varepsilon}_-(t) = \mathrm{Min}\,(0, \dot{\varepsilon}(t))\,.$$

Функции $f_i(\sigma, \varepsilon)$, $i = 1, 2$, определенные для $-\infty < \sigma < \infty$, $-\infty < \varepsilon < \infty$ будем называть функциями внутреннего трения. Пусть они обладают следующими свойствами:

Va. $f_i(\sigma, \varepsilon)$, $i = 1, 2$ есть непрерывная функция во всем интервале определения.

Vb. $f_i(\sigma, \varepsilon) \geqq 0$, $i = 1, 2$.

Vc. Если $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то $f_1(\sigma, \varepsilon_1) \geqq f_1(\sigma, \varepsilon_2)$ и $f_2(\sigma, \varepsilon_1) \leqq f_2(\sigma, \varepsilon_2)$ причем равенство может иметь место только в том случае, если $f_1(\sigma, \varepsilon_1) = f_1(\sigma, \varepsilon_2) = 0$ или же $f_2(\sigma, \varepsilon_1) = f_2(\sigma, \varepsilon_2) = 0$.

Vd. Если $\sigma_1 > \sigma_2$, то $f_1(\sigma_1, \varepsilon) \leqq f_1(\sigma_2, \varepsilon)$ и $f_2(\sigma_1, \varepsilon) \geqq f_2(\sigma_2, \varepsilon)$, причем равенство может иметь место только в том случае, если $f_1(\sigma_1, \varepsilon) = f_1(\sigma_2, \varepsilon) = 0$ или же $f_2(\sigma_1, \varepsilon) = f_2(\sigma_2, \varepsilon) = 0$.

Ve. Существуют постоянные $D_1 > 0$ и $D_2 > 0$ такие, что $f_1(\sigma, \varepsilon) = 0$ для $\sigma \geqq D_1$, $-\infty < \varepsilon < \infty$ и $f_2(\sigma, \varepsilon) = 0$ для $\sigma \leqq -D_2$, $-\infty < \varepsilon < \infty$.

Vf. Если обозначить $M_i = \underset{\sigma,\varepsilon}{\mathrm{E}}[f_i(\sigma, \varepsilon) = 0]$, $i = 1, 2$ то $M_1 \cap M_2 = \emptyset$.

Прежде чем приступим к анализу дифференциального уравнения внутреннего трения по определению 1, приведем несколько примеров функций внутреннего трения и сделаем несколько замечаний физического характера по поводу этого определения.

Пример 1. Пусть

$$
\begin{aligned}
f_1(\sigma, \varepsilon) &= C_1 e^{\alpha_1 \varepsilon}(D_1 - \sigma)^{\beta_1} && \text{для} \quad \sigma \leqq D_1\,, \\
&= 0 && \text{для} \quad \sigma \geqq D_1\,, \\
f_2(\sigma, \varepsilon) &= C_2 e^{-\alpha_2 \varepsilon}(D_2 + \sigma)^{\beta_2} && \text{для} \quad \sigma \geqq -D_2\,, \\
&= 0 && \text{для} \quad \sigma \leqq -D_2\,.
\end{aligned}
$$

При этом через C_i, D_i, α_i, β_i, $i = 1, 2$ обозначены положительные постоянные. Функции $f_i(\sigma, \varepsilon)$, $i = 1, 2$ являются функциями внутреннего трения. Можно легко проверить, что они имеют свойства Va—Vf из определения 1.

Пример 2. Пусть

$$
f_1 = (\sigma, \varepsilon) = C_1 g_1(\varepsilon)\, h_1(\sigma)\,,
$$

$$
f_2 = (\sigma, \varepsilon) = C_2 g_2(\varepsilon)\, h_2(\sigma)\,,
$$

где

$$
\begin{aligned}
g_1(\varepsilon) &= (1 + \alpha_1 \varepsilon) && \text{для} \quad \varepsilon \geqq -\frac{1}{\alpha_1}, \\
&= 0 && \text{для} \quad \varepsilon \leqq -\frac{1}{\alpha_1}, \\
g_2(\varepsilon) &= (1 - \alpha_2 \varepsilon) && \text{для} \quad \varepsilon \leqq \frac{1}{\alpha_2}, \\
&= 0 && \text{для} \quad \varepsilon \geqq \frac{1}{\alpha_2}, \\
h_1(\sigma) &= (1 - \beta_1 \sigma) && \text{для} \quad \sigma \leqq \frac{1}{\beta_1}, \\
&= 0 && \text{для} \quad \sigma \geqq \frac{1}{\beta_1}, \\
h_2(\sigma) &= (1 + \beta_2 \sigma) && \text{для} \quad \sigma \geqq -\frac{1}{\beta_2}, \\
&= 0 && \text{для} \quad \sigma \leqq -\frac{1}{\beta_2}.
\end{aligned}
$$

При этом C_i, α_i, β_i, $i = 1, 2$ означают положительные постоянные.

Замечание 1. Функции $f_1(\sigma, \varepsilon)$, соотв. $f_2(\sigma, \varepsilon)$ означают, в сущности, мгновенный модуль упругости для напряжения σ и деформации ε для случая возрастающего, соотв. убывающего, напряжения.

Замечание 2. Свойство Vc в большой степени соответствует известному эффекту Баушингера. Если при одном и том же напряжении σ получена в первый раз деформация ε_1, а во второй раз ε_2, $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, то во втором случае, по сравнению с первым, имеем дело с материалом, в котором пластические деформации произошли при обратном напряжении. Следовательно, по эффекту Баушингера понижается предел текучести, что в нашем случае означает падение мгновенного модуля упругости $f_1(\sigma, \varepsilon_2)$. Аналогично можно рассуждать и в случае, когда идет речь о функции $f_2(\sigma, \varepsilon)$.

Замечание 3. Свойство *Vd* выражает известное свойство понижения мгновенного модуля при возрастании напряжения, которое встречается у большинства материалов.

Замечание 4. Свойство *Vb* выражает то обстоятельство, что мгновенные модули упругости не отрицательны для всех σ, ε.

Замечание 5. Постоянные D_1 и D_2 означают верхнюю оценку предела текучести.

Замечание 6. Свойство *Vf* значит, что не можем одновременно достичь предела текучести при давлении и натяжении.

Замечание 7. Потому что в функциях напряженности не содержится в качестве аргумента скорость деформации, внутреннее трение не зависит от скорости. Можно, однако, в функциях внутреннего трения учитывать и влияние скорости, не наталкиваясь на существенные затруднения. В настоящей работе будем все-таки заниматься исключительно внутренним трением, не зависящим от скорости.

Теорема 1. *Пусть $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция с непрерывной первой производной, определенная на интервале $\langle 0, T \rangle$.*[3] *Пусть задано число σ_0. Тогда существует одна единственная функция $\sigma(t)$, $0 \leqq t \leqq T$, удовлетворяющая уравнению внутреннего трения и такая, что $\sigma(0) = \sigma_0$. Это решение будем обозначать символом $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$*[4].)

Доказательство. По предположению $\dot{\varepsilon}(t)$ есть непрерывная функция. Поэтому также $\dot{\varepsilon}_+(t)$ и $\dot{\varepsilon}_-(t)$ непрерывны. Следовательно, уравнение (3) представляет собой дифференциальное уравнение с непрерывной правой частью. Теперь обозначим

$$a = \sup_{0 \leqq t \leqq T} \dot{\varepsilon}_+(t) + 1 \,, \quad c = \sup_{0 \leqq t \leqq T} \varepsilon(t) \,,$$

$$b = \inf_{0 \leqq t \leqq T} \dot{\varepsilon}_-(t) - 1 \,; \quad d = \inf_{0 \leqq t \leqq T} \varepsilon(t) \,,$$

$$\alpha = f_1(\sigma_0, c) + 1 \,.$$

$$\beta = f_2(\sigma_0, d) + 1 \,.$$

[3]) В точках $t = 0$, $t = T$ Предполагаем существование производной справа, соотв. слева.

[4]) Когда можно будет не опасаться недоразумений, будем пользоваться более короткими обозначениями $\sigma(t)$ или $\sigma(t, \sigma_0)$ и т. под.

Далее, пусть R означает область

$$R = \mathop{\mathrm{E}}_{\sigma, t} [0 \leqq t \leqq T, \sigma_0 + b\beta T \leqq \sigma \leqq \sigma_0 + a\alpha T] .$$

Теперь, согласно известным теоремам теории дифференциальных уравнений, либо существует решение $\sigma(t, \sigma_0)$ во всем интервале $\langle 0, T\rangle$ либо существует t^* так, что $\sigma(t^*, \sigma_0) = \sigma_0 + b\beta T$ или $\sigma(t^*, \sigma_0) = \sigma_0 + a\alpha T$. Покажем, что такое t^* не может существовать. Итак, допустим, что существует $0 \leqq t^* \leqq T$ так, что $\sigma(t^*, \sigma_0) = \sigma_0 + a\alpha T$. По теореме о среднем существует $0 < t_1 < t^*$ так, что $\dot{\sigma}(t_1) \geqq \alpha a$. Следовательно, будет также

$$\dot{\varepsilon}_+(t_1)\, f_1(\sigma_0 + \alpha a T, \varepsilon(t_1)) + \dot{\varepsilon}_-(t_1)\, f_2(\sigma_0 + \alpha a T, \varepsilon(t_1)) \geqq a\alpha .$$

Однако

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_+(t_1)\, f_1(\sigma_0 + \alpha a T, \varepsilon(t_1)) + \dot{\varepsilon}_-(t_1)\, f_2(\sigma_0 + \alpha a T, \varepsilon(t_1)) \leqq \\ \leqq \dot{\varepsilon}_+(t_1)\, f_1(\sigma_0 + \alpha a T, \varepsilon(t_1)) < a f_1(\sigma_0 + \alpha a T, \varepsilon(t_1)) \leqq \\ \leqq a f_1(\sigma_0, c) < a\alpha , \end{aligned}$$

в чем заключается противоречие. Таким же приемом исключается и вторая возможность. Значит, мы доказали, что существует решение во всем интервале $\langle 0, T\rangle$.

Теперь докажем, что существует самое большое одно решение. Допустим, что справедливо обратное. Тогда существуют решения $\sigma_1(t, \sigma_0)$ и $\sigma_2(t, \sigma_0)$ такие, что $\sigma_1(t, \sigma_0) \neq \sigma_2(t, \sigma_0)$. Значит, существует $0 < t_0 < T$ так, что $\sigma_1(t_0, \sigma_0) \neq \sigma_2(t_0, \sigma_0)$. Не умаляя общности, можем считать, что $\sigma_1(t_0, \sigma_0) > \sigma_2(t_0, \sigma_0)$. Теперь обозначим

$$\xi(t) = \sigma_1(t, \sigma_0) - \sigma_2(t, \sigma_0) .$$

Потому что $\xi(t)$ — непрерывная функция и $\xi(0) = 0$, $\xi(t_0) > 0$ существует $0 \leqq \bar{t} < t_0$ так, что $\xi(\bar{t}) = 0$ и $\xi(t) > 0$ для всех $\bar{t} < t \leqq t_0$. Но функция $\xi(t)$ удовлетворяет, очевидно, дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) = \dot{\varepsilon}_+(t)[f_1(\sigma_2 + \xi, \varepsilon) - f_1(\sigma_2, \varepsilon)] + \\ + \dot{\varepsilon}_-(t)[f_2(\sigma_2 + \xi, \varepsilon) - f_2(\sigma_2, \varepsilon)] . \end{aligned}$$

Из теоремы о среднем следует, что существует $\bar{t} < t^* < t_0$ так, что $\dot{\xi}(t^*) > 0$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_+(t^*)[f_1(\sigma_2(t^*) + \xi(t^*), \varepsilon(t^*)) - f_1(\sigma_2(t^*), \varepsilon(t^*)] + \\ + \dot{\varepsilon}_-(t^*)[f_2(\sigma_2(t^*) + \xi(t^*)) - f_2(\sigma_2(t^*), \varepsilon(t^*)] > 0 . \end{aligned}$$

Но в силу свойства Vd функций внутреннего трения будет (ввиду того, что $\xi(t^*) > 0$)

$$f_1(\sigma_2(t^*) + \xi(t^*), \varepsilon(t)) - f_1(\sigma_2(t^*), \varepsilon(t^*)) \leqq 0$$

и

$$f_2(\sigma_2(t^*) + \xi(t^*), \varepsilon(t)) - f_2(\sigma_2(t^*), \varepsilon(t^*)) \geqq 0 .$$

Потому что $\dot{\varepsilon}_+(t^*) \geqq 0$ и $\dot{\varepsilon}_-(t) \leqq 0$, приводит нас наше предположение к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция с непрерывной первой производной; пусть $\varepsilon(t)$ определена на интервале $\langle 0, T \rangle$. Пусть задано число $-D_1 \leqq \sigma_0 \leqq D_1$. Тогда $-D_2 \leqq \sigma(t, \sigma_0) \leqq D_1$.*

Доказательство совсем просто и приводить его здесь не будем.

Теорема 3. *Пусть $\varepsilon(t)$ — непрерывная функция с непрерывной первой производной, определенная на интервале $\langle 0, T \rangle$. Пусть σ_n — числовая последовательность такая, что $\sigma_n \to \sigma_0$. Тогда для всех $0 < t < T$ $\sigma(t, \sigma_n) \to \sigma(t, \sigma_0)$.*

Доказательство проводится таким же образом, как втеории обыкновенных дифференциальных уравнений, когда используется однозначность.

Теорема 4. *Пусть $\varepsilon(t)$ — непостоянная периодическая функция с непрерывной производной. Тогда существует в точности одно периодическое решение $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$, удовлетворяющее уравнению внутреннего трения. При этом $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$ не является постоянной функцией.*

Доказательство. Сначала докажем, что может существовать только одно периодическое решение. Предположим, что справедливо противное. Тогда существуют два различных периодических решения $\sigma(t, \sigma_1)$ и $\sigma(t, \sigma_2)$, удовлетворяющие уравнению внутреннего трения. Не умаляя общности, можем, очевидно, предполагать, что $\sigma_1 - \sigma_2 = a > 0$. Обозначим

$$\xi(t) = \sigma_1(t, \sigma_1) - \sigma_2(t, \sigma_2)\ .$$

Функция $\xi(t)$ является, очевидно, непрерывной периодической функцией и $\xi(0) = a > 0$.

Для всех t $\xi(t) > 0$. В противном случае существовало бы, t^* такое, что было бы $\sigma(t^*, \sigma_1) = \sigma(t^*, \sigma_2)$. Согласно теореме 1 было бы в этом случае $\sigma(t, \sigma_1) = \sigma(t, \sigma_2)$ для всех $t \geqq t^*$; но в этом заключается противоречие, потому что обе функции периодичны.

Теперь докажем, что $\dot{\xi}(t) \leqq 0$ для всех t. Функция $\dot{\xi}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) = \dot{\varepsilon}_+(t)[f_1(\sigma_2 + \xi, \varepsilon) - f_1(\sigma_2, \varepsilon)] &+ \\ + \dot{\varepsilon}_-(t)[f_2(\sigma_2 + \xi, \varepsilon) - f_2(\sigma_2, \varepsilon)]&\ .\end{aligned}$$

Потому что $\xi > 0$, $\dot{\varepsilon}_+(t) \geqq 0$, $\dot{\varepsilon}_-(t) \leqq 0$, можем, учитывая свойство Vd, сделать заключение, что $\dot{\xi}(t) \leqq 0$. Так как $\xi(t)$ периодическая и непрерывная функция, будет $\dot{\xi}(t) = 0$ и, следовательно, $\xi(t) = a > 0$.

Но теперь уже в каждой точке t, где $\dot{\varepsilon}_+(t) \neq 0$ будет

$$f_1(\sigma_2 + a, \varepsilon) - f_1(\sigma_2, \varepsilon) = 0\ ,$$

следовательно, согласно свойству Vd функций внутреннего трения (см. определение 1) будет

$$f_1(\sigma_i, \varepsilon) = 0\,, \quad i = 1, 2\,.$$

Аналогично можно показать, что всюду, где $\dot{\varepsilon}_-(t) \neq 0$ будет и $f_2(\sigma_i, \varepsilon) = 0$, $i = 1, 2$. Значит, также $\dot{\sigma}(t) = 0$. Поэтому

$$\sigma(t, \sigma_1) = \sigma_1 \quad \text{и} \quad \sigma(t, \sigma_2) = \sigma_2\,.$$

Так как функции $\dot{\varepsilon}(t)$ и $f_1(\sigma, \varepsilon)$ непрерывны, будет $f_1(\sigma_2, \varepsilon) = 0$ для всех $M_2 \leqq \varepsilon \leqq M_1$, где $M_1 = \underset{-\infty<t<\infty}{\operatorname{Max}} \varepsilon(t)$, $M_2 = \underset{-\infty<t<\infty}{\operatorname{Min}} \varepsilon(t)$. Так же докажем, что и $f_2(\sigma_1, \varepsilon) = 0$ для всех $M_2 \leqq \varepsilon \leqq M_1$. Ввиду того, что периодическая функция $\varepsilon(t)$ не является постоянной, $M_2 < M_1$. Согласно свойству Vf функций внутреннего трения, следовательно, будет $f_1(\sigma, \varepsilon) = 0$ на $R_1 = \underset{(\sigma,\varepsilon)}{\mathrm{E}}\, [\sigma \geqq \sigma_2, M_2 \leqq \varepsilon \leqq M_1]$ и $f_2(\sigma, \varepsilon) = 0$ на $R_2 = \underset{(\sigma,\varepsilon)}{\mathrm{E}}\, [\sigma \leqq \sigma_1, M_2 \leqq \varepsilon \leqq M_1]$. Но $R_1 \cap R_2 \neq 0$ ввиду того, что $\sigma_2 < \sigma_1$; в этом и заключается противоречие.

Итак мы доказали, что не может существовать больше одного периодического решения и что оно не может быть постоянным.

Теперь докажем, что решение существует. Пусть l — период функции $\varepsilon(t)$. Фиксируем число $-D_2 < \sigma_0 < D_1$. По теореме 1 существует решение $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$ для всех $t > 0$.

Обозначим

$$\xi(t) = \sigma(t + l, \sigma_0, \varepsilon) - \sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)\,.$$

Если $\xi(0) = 0$, то $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$ есть периодическое решение. Итак, предположим, что $\xi(0) \neq 0$. Допустим, что $\xi(0) > 0$. Второй случай можно было бы изучать совершенно аналогично.

Прежде всего докажем, что $\xi(t) > 0$ для всех t. Пусть, наоборот, существует t^* так, что $\xi(t) \leqq 0$; тогда существует $\bar{t}^* \leqq t^*$ так, что $\xi(\bar{t}^*) = 0$. Но в этом случае из теоремы об однозначности вытекает, что $\xi(t) = 0$ для всех $t \geqq \bar{t}^*$. Возьмем $n > 0$, n — целое, так, чтобы было $nl > \bar{t}^*$; пусть еще будет $\sigma_1 = \sigma(nl, \sigma_0, \varepsilon)$. Тогда $\sigma(t, \sigma_1, \varepsilon)$ будет периодической функцией.

Значит, можем предполагать, что $\xi(t) > 0$ для всех t. Функция $\xi(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}\dot{\xi}(t) = \dot{\varepsilon}_+(t)[f_1(\sigma(t) + \xi(t), \varepsilon(t)) - f_1(\sigma(t), \varepsilon(t))] +\\ + \dot{\varepsilon}_-(t)[f_2(\sigma(t) + \xi(t), \varepsilon(t)) - f_2(\sigma(t), \varepsilon(t))]\,.\end{aligned}$$

Из свойств функций внутреннего трения сразу же вытекает, что $\dot{\xi}(t) \leqq 0$. Следовательно, $\xi(t)$ является невозрастающей, снизу ограниченной функцией. Значит, существует $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = b$.

Докажем, что $b = 0$. Пусть наоборот, $b > 0$; тогда получим

$$\sigma((n+1)\,l, \sigma_0, \varepsilon) - \sigma(nl, \sigma_0, \varepsilon) \geqq b > 0\,,$$

следовательно,

$$\sigma((n+1)\,l, \sigma_0, \varepsilon) > \sigma(0, \sigma_0, \varepsilon) + nb\,.$$

Но по теореме 2

$$\sigma((n+1)\,l, \sigma_0, \varepsilon) \leqq D_1\,.$$

В этом заключается противоречие, потому что выбрав достаточно большое n, можем, очевидно, добиться того, чтобы было $\sigma((n+1)\,l, \sigma_0, \varepsilon) > D_1$. Следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} \xi(t) = 0$.

Теперь обозначим $\sigma_n = \sigma(nl, \sigma_0, \varepsilon)$, $n = 1, 2, \ldots$ Так как $\xi(t) > 0$, то последовательность σ_n возрастает. По теореме 2 $\sigma_n \leqq D_1$ для всех n. Следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \bar{\sigma}$.

Докажем, что функция $\sigma(t, \bar{\sigma}, \varepsilon)$ является периодической. Для этого достаточно показать, что

$$\sigma(l, \bar{\sigma}, \varepsilon) = \sigma(0, \bar{\sigma}, \varepsilon)\,.$$

По теореме 3

$$\sigma(l, \bar{\sigma}, \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \sigma(l, \sigma_n, \varepsilon)$$

и

$$\sigma(0, \bar{\sigma}, \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \sigma(0, \sigma_n, \varepsilon)\,.$$

Следовательно, $\sigma(l, \bar{\sigma}, \varepsilon) - \sigma(0, \bar{\sigma}, \varepsilon) = \lim\limits_{n\to\infty} (\sigma(l, \sigma_n, \varepsilon) - \sigma(0, \sigma_n, \varepsilon))$. Но справедливы равенства

$$\sigma(0, \sigma_n, \varepsilon) = \sigma(nl, \sigma_0, \varepsilon) = \sigma_n\,,$$

$$\sigma(l, \sigma_n, \varepsilon) = \sigma((n+1)\,l, \sigma_0, \varepsilon) = \sigma_{n+1}\,.$$

Поэтому

$$\sigma(l, \bar{\sigma}, \varepsilon) - \sigma(0, \bar{\sigma}, \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \xi(nl) = 0\,,$$

ч. т. д.

Теорема 5. *Пусть $\varepsilon(t)$ — непостоянная периодическая функция с непрерывной производной, Пусть $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$ — периодическое решение уравнения внутреннего трения. Пусть σ_1 — произвольное число. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} (\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon) - \sigma(t, \sigma_1, \varepsilon)) = 0\,.$$

Доказательство. Сначала предположим, что $-D_2 \leqq \sigma_1 \leqq D_1$. Предыдущую теорему мы доказали таким образом, что нам удалось показать, что функция $\sigma(t, \sigma_1, \varepsilon)$ при $t \to \infty$ сходится к некоторому периодическому решению. Но $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$ является по предположению периодическим решением, а согласно теореме 4 существует лишь одно периодическое решение; итак теорема доказана при условии $-D_2 \leqq \sigma_1 \leqq D_1$. Если $\sigma_1 > D_1$ или $\sigma_1 <$

$< -D_2$, то в определении 1 можем, очевидно, постоянные D_1 и D_2 заменить большими постоянными. Из этого следует, что наша теорема полностью доказана.

Замечание 1. Смысл теоремы 4 и теоремы 5 заключается в том, что периодической зависимости деформации после достаточно большого числа колебаний соответствует периодическая зависимость напряжения. Поэтому получается здесь своего рода „наматывание" на кривую гистерезиса. Каждой периодической зависимости деформации соответствует при этом одна кривая гистерезиса. Несмотря на то, из какого положения мы исходим, решение всегда устанавливается на одной и той же кривой гистерезиса. Это весьма хорошо соответствует действительности, потому что в случае периодических колебаний напряжение действительно „наматывается" на кривую гистерезиса.

Замечание 2. В определении 1 мы предполагали существование постоянных D_1 и D_2; это понадобилось нам только тогда, когда мы говорили об ограниченности решения. Итак, например, в том случае, когда мы умели бы как-нибудь доказать ограниченность, предположение о постоянных D_1 и D_2 можно было бы выпустить.

Замечание 3. Теорема 5 выражает то обстоятельство, что уравнение внутреннего трения асимптотически устойчиво.

Теорема 6. *Пусть функция $\varepsilon(t)$ имеет непрерывную производную. Пусть $\sigma(t, \sigma_0, \varepsilon)$ — решение уравнения внутреннего трения по определению* 1. *Тогда функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет уравнению*

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{f_1(\sigma, \varepsilon)}\, \dot{\sigma}_+(t) + \frac{1}{f_2(\sigma, \varepsilon)}\, \dot{\sigma}_-(t)$$

во всех точках, где $f_1(\sigma, \varepsilon) \neq 0 \neq f_2(\sigma, \varepsilon)$.

Доказательство. По предположению

$$\dot{\sigma}(t) = f_1(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_+(t) + f_2(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_-(t)\,.$$

Следовательно,

$$\dot{\sigma}_+(t) = f_1(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_+(t)\,, \quad \dot{\sigma}_- = f_2(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_-(t)\,.$$

Потому что $\dot{\varepsilon}(t) = \dot{\varepsilon}_+(t) + \dot{\varepsilon}_-(t)$ и $f_1(\sigma, \varepsilon) \neq 0 \neq f_2(\sigma, \varepsilon)$, получаем из этого утверждение теоремы.

Теорема 7. *Пусть $f_1(\sigma, \varepsilon)$, $f_2(\sigma, \varepsilon)$ — функции внутреннего трения по определению* 1. *Через Ω обозначим область плоскости (σ, ε), где $f_1(\sigma, \varepsilon) > 0$, $f_2(\sigma, \varepsilon) > 0$. Пусть задана непрерывная функция с непрерывной справа $\sigma(t)$, определенная в $\langle 0, T \rangle$, и число ε_0 такое, что $\sigma((0), \varepsilon_0) \in \Omega$. Тогда в области Ω существует в точности одно решение $\varepsilon(t)$ такое, что $\sigma(t) = \sigma(t, \sigma(0), \varepsilon)$ и $\varepsilon(0) = \varepsilon_0$.*

Доказательство. По теореме 6 функция $\varepsilon(t)$ является решением уравнения

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{1}{f_1(\sigma, \varepsilon)}\, \dot{\sigma}_+(t) + \frac{1}{f_2(\sigma, \varepsilon)}\, \dot{\sigma}_-(t)\,.$$

Существование и единственность решения этого уравнения доказывается совершенно так же, как в теореме 1. (Ввиду свойств функций внутреннего трения.)

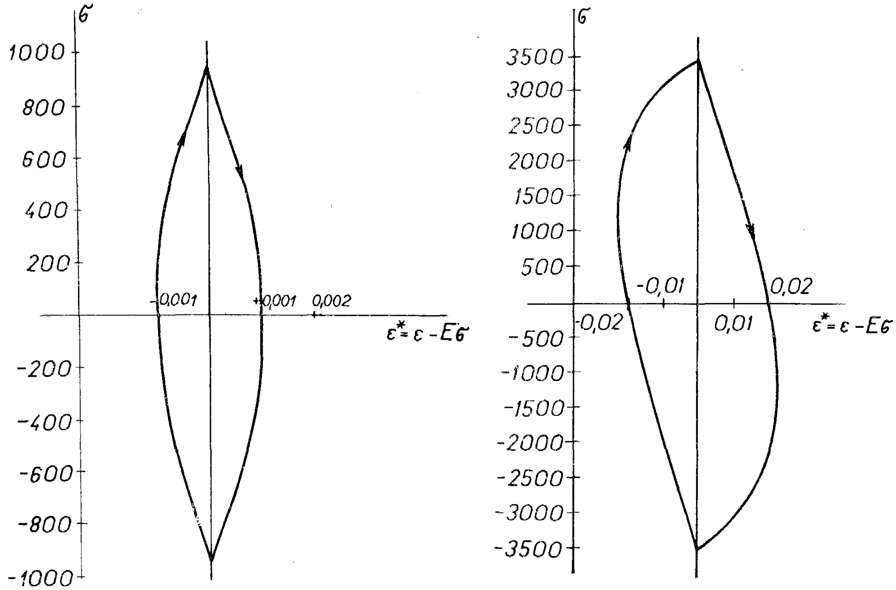

Рис. 2а. Кривая гистерезиса для амплитуды 1000 кг.
ρ — напряжение, ε^* — неупругая деформация.

Рис. 2b. Кривая гистерезиса для амплитуды 3500 кг.
σ — напряжение, ε^* — неупругая деформация.

Замечание 1. Вполне соответствует действительности, что к каждой $\varepsilon(t)$ существует во всем интервале напряжение $\sigma(t)$, но не наоборот. Если мы, то есть, перешагнем предел текучести, то напряжению уже нельзя поставить однозначно в соответствие никакою деформацию.

Замечание 2. Свойство Ve функции внутреннего трения было отмечено только для того, чтобы можно было доказать однозначность решения уравнения 3. В других теоремах нам условие Vc не понадобилось.

Замечание 3. Как только функция $\varepsilon(t)$, соответствующая периодической функции $\sigma(t)$, обладает тем свойством, что решение (ε, σ) не выйдет за пределы области Ω, то, очевидно, существует только одно единственное периодическое решение $\varepsilon(t)$, торое является устойчивым.

3. ПРИМЕР ГИПОТЕЗЫ ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ

В настоящем отделе дадим конкретный пример гипотезы и приведем некоторые численные результаты. Функцию внутреннего трения определимм по приеру 1. Положим

$$f_1(\sigma, \varepsilon) = 2 \,.\, 10^3 e^{0,1\varepsilon} \; (4000 - \sigma)^{0,12} \,,$$

$$f_2(\sigma, \varepsilon) = 2 \,.\, 10^3 e^{-0,1\varepsilon} (4000 + \sigma)^{0,12} \,.$$

На рис. 2 изображены кривые гистерезиса для гармонической зависимости

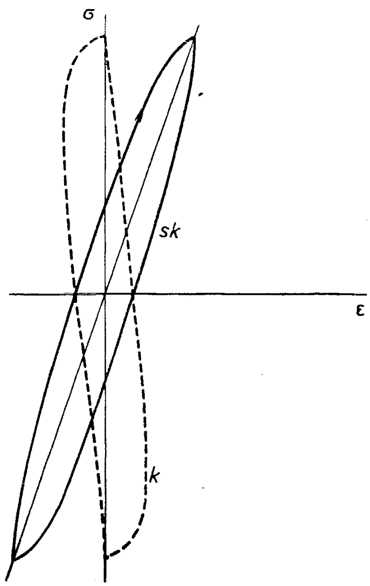

Рис. 2с. Схема настоящей кривой гистерезиса и кривой гистерезиса в случае неупру гой деформации. sk — настоящая кривая гистерезиса, k — кривая гистерезиса в случае неупругой деформации.

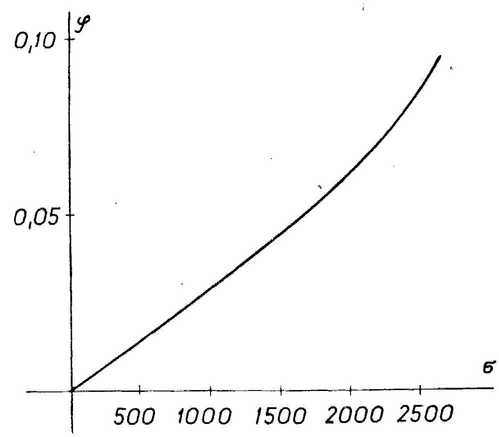

Рис. 3. Зависимость коэффициента затухания от амплитуды. φ — коэффициент затухания, σ — напряжение.

деформации при различных амплитудах деформации. Рисунок нарисован в системе (σ, ε). Ради большей наглядности не изображена, собственно, кривая гистерезиса, но петля гистерезиса, возникшая после вычитания упругой деформации $E\sigma$, где E выбрано так, чтобы в вершинах неупругая деформация равнялась нулю. На рис. 2с схематически изображена настоящая кривая гистерезиса и ее вид после вычитания деформации. На рис. 2а амплитуда напряжения равна 956,53, а на рис. 2b 3479,23.

На рис. 3 изображен график зависимости коэффициента затухания ψ от амплитуды напряжения. При этом коэффициентом затухания мы называем отношение $\psi = \dfrac{\Delta W}{W}$, где ΔW — энергия, растраченная в течение одного цикла (превратившаяся в тепло), а W — упругая энергия, соответствующая амплитуде деформации $\varepsilon = \varepsilon_{max}$.

На рис. 4 показано постепенное „наматывание" на кривую гистерезиса в течение отдельных циклов. Опять-таки изображены только неупругие деформации, как на рис. 2. На рис. 4 изображена кривая гистерезиса и график неупругой деформации после отдельных нагрузочных циклов. Рассматривается случай циклической зависимости напряжения с амплитудой 3479,23, как на рис. 2.

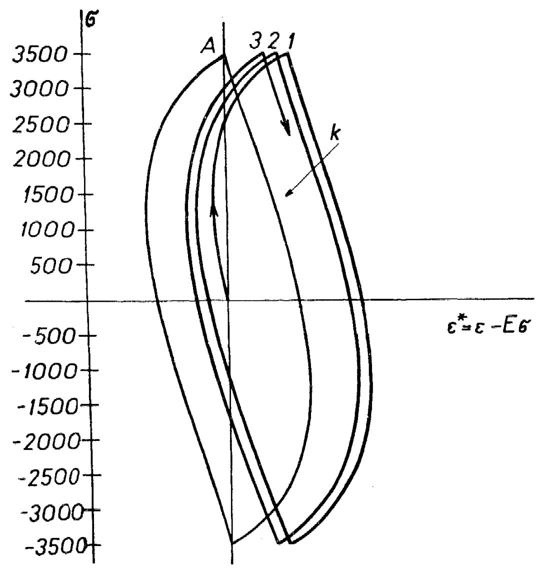

Рис. 4. „Наматывание" на кривую гистерезиса.
σ — напряжение, ε^* — неупругая деформация, k — кривая гистерезиса.

На рис. 5 изображена скорость „наматывания" на кривую гистерезиса при большем количестве нагрузочных циклов. Рассматривается тот же случай, как на рис. 4. На рис. 5 отрезок означает число циклов, ордината — разность между кривой гистерезиса (для неупругих деформаций) и криволинейной деформацией. Связь между рис. 4 и 5 заключается в том, что в цикле 2, соотв. 1, ордината на рис. 5 для участка 1, соотв. 2, равна отрезку $\overline{A1}$, или же $\overline{A2}$ на рис. 4. По рис. 5 видно, что приблизительно после 20 циклов колебания совершаются почти по кривой гистерезиса.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В предыдущих отделах мы развили нелинейную теорию внутреннего трения. Теперь можно решить задачу о свободных и вынужденных колебаниях. Дифференциальные уравнения системы с одной степенью свободы (и единичной массой) имеют вид

$$\ddot{\varepsilon}(t) + \sigma(t) = g(t)\,,$$
$$\dot{\sigma}(t) = f_1\dot{\varepsilon}_+ + f_2\dot{\varepsilon}_-\,.$$

Можно свести их к системе трех уравнений первого порядка. И здесь характерно то, что опять не достаточно поставить начальные условия

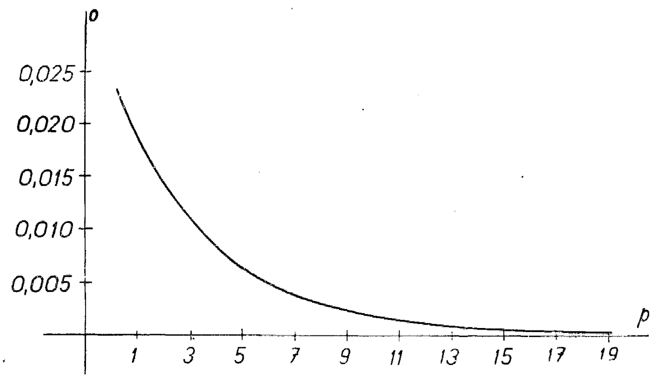

Рис. 5. Скорость „наматывания" на кривую гистерезиса.
o — отклонение от кривой гистерезиса, p — число циклов.

только для деформации ε, т. е. $\varepsilon(0)$ и $\dot{\varepsilon}(0)$, но необходимо определить также $\sigma(0)$. Это полностью соответствует основным положениям нашей теории. При этом, однако, разность между решениями для различных $\sigma(0)$ и одних и тех же $\varepsilon(0)$, $\dot{\varepsilon}(0)$ в течение нескольких циклов становится практически нулевой соответственно тому, как осуществляется „наматывание" на кривую гистерезиса (см. рис. 5).

Этот результат весьма хорошо постигает действительность и является, например, одной из существенных основ мешающих элементов при испытаниях затухания. Так, например, хорошо известно, что при крутильных колебаниях того же материала и с теми же начальными деформациями $\varepsilon(0)$ и $\dot{\varepsilon}(0)$ всегда в начале замечаем разницу, которая постепенно исчезает. Это, в смысле нашей теории, можно объяснить именно так, что в обоих сравниваемых испытаниях были, правда, одинаковые начальные условия для деформации, но отличались начальные условия для $\sigma(0)$. Это начальное условие, конечно, трудно поддается управлению.

В другой работе применим эту гипотезу к механической системе с одной степенью свободы и произведем также анализ этой проблемы. Наша гипотеза позволяет также решать задачу затухающих колебаний итд.

Приложимость идей, которые мы развили в предыдущих отделах, гораздо шире, чем мы отметили.

Так, напр., можно ожидать, что она приведет нас к удовлетворительным результатам и в некоторых случаях пластической нагрузки грунтов и т. д. Далее, эта гипотеза применима, очевидно, в электротехнике, при изучении влияний магнитного гистерезиса и т. д. Ясно, конечно, что в каждом из указанных случаев функции внутреннего трения будут иметь различные виды, которые можно феноменологически определить.

Широкая формулировка основных свойств функций внутреннего трения по определению 1 охватывает большой класс проблем. Однако, учитывая некоторые конкретные случаи, можно этот класс еще расширить. В этом отделе мы наметили ряд возможных приложений. Некоторыми из них будем заниматься в дальнейших работах.

Литература

[1] *Zener C.:* Elasticity and anelasticity of Metal, Chicago 1948.

[2] *Постников В. С.:* Успехи физических наук 53 (1954), 1, 87.

[3] *Бабушка И., Колоушек В.:* Линейная теория внутреннего поглощения при колебаниях упругих систем. (В печати).

[4] *Бабушка И.:* Aplikace matematiky 4 (1959), 177—201.

[5] *Давиденков Н. Н.:* Журнал технической физики 8 (1938), 483.

[6] *Писаренко Г. С.:* Колебания упругих систем с учетом рассеяния энергии в материале, Киев 1955.

[7] *Pisarenko G. S.:* Aplikace matematiky 2 (1957), 424.

Souhrn

NELINEÁRNÍ TEORIE VNITŘNÍHO TŘENÍ

IVO BABUŠKA

(Došlo dne 25. srpna 1958.)

V práci je podrobně analysována nelineární teorie vnitřního tření. Fysikálně se vychází v podstatě z hypothesy Davidenkovovy [5], avšak v jistém zobecněném tvaru. Matematicky vede tato hypothesa ke vztahu mezi deformací $\varepsilon(t)$ a příslušným napětím $\sigma(t)$ k diferenciálnímu vztahu

$$\dot{\sigma}(t) = f_1(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_+(t) + f_2(\sigma, \varepsilon)\, \dot{\varepsilon}_-(t)\,, \tag{1}$$

kde značí

$$\dot\sigma(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad \dot\varepsilon(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

$$\dot\varepsilon_+(t) = \text{Max}\,(0, \dot\varepsilon(t)), \quad \dot\varepsilon_-(t) = \text{Min}\,(0, \dot\varepsilon(t)).$$

Funkce $f_1(\sigma, \varepsilon)$ a $f_2(\sigma, \varepsilon)$ jsou funkcemi, vyjadřujícími mechanické vlastnosti materiálu.

V definici 1 jsou přesně vysloveny vlastnosti těchto funkcí a v poznámkách naznačen jejich fysikální význam.

Diferenciální rovnice (1) je podrobně studována a je dokázána existence a unicita řešení, jeho spojitá závislost na počátečních podmínkách a stabilita řešení.

V naznačené teorii nezávisí útlum při harmonickém kmitání na frekvenci, závisí pouze na amplitudě. Teorie vyjadřuje však nejen chování materiálu při ustálených periodických kmitech, ale i při kmitech neperiodických a vyjadřuje i zjev „nabíhání" na hysteresní křivku při periodické deformaci.

Na závěr je uveden numerický příklad.

Zusammenfassung

DIE NICHTLINEARE THEORIE DER INNEREN REIBUNG

IVO BABUŠKA

(Eingegangen am 25. August 1958.)

In der vorgelegten Arbeit wird die nichtlineare Theorie der inneren Reibung ausführlich untersucht. Physikalisch wird im wesentlichen von der Hypothese von Davidenkov ausgegangen, die jedoch in einer bestimmten verallgemeinerten Form vorgelegt wird. Mathematisch führt diese Hypothese zu einer Beziehung zwischen der Deformation $\varepsilon(t)$ und der entsprechenden Spannung $\sigma(t)$, welche durch die Differentialgleichung

$$\dot\sigma(t) = f_1(\sigma, \varepsilon)\, \dot\varepsilon_+(t) + f_2(\sigma, \varepsilon)\, \dot\varepsilon_-(t) \tag{1}$$

beschrieben wird, wobei

$$\dot\sigma(t) = \frac{d\sigma(t)}{dt}, \quad \dot\varepsilon(t) = \frac{d\varepsilon(t)}{dt},$$

$$\dot\varepsilon_+(t) = \text{Max}\,(0, \dot\varepsilon(t)), \quad \dot\varepsilon_-(t) = \text{Min}\,(0, \dot\varepsilon(t)),$$

ist.

Die Funktionen $f_1(\sigma, \varepsilon)$ und $f_2(\sigma, \varepsilon)$ geben die mechanischen Eigenschaften des Materials an. In der Definition 1 werden die Eigenschaften dieser Funktio-

nen genau ausgedruckt und in den folgenden Anmerkungen ihre physikalische Bedeutung erlautert. Die Differentialgleichung (1) wird genau untersucht. Es wird die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, die stetige Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen und die Stabilität der Lösung bewiesen.

In der angeführten Theorie hängt die Dampfung für die harmonischen Schwingungen nicht von der Frequenz ab, sondern nur von der Amplitude. Die Theorie gibt nicht nur das Verhalten der stationären periodischen Schwingungen an, sondern auch der nichtperiodischen und die Erscheinung des „Einschwingens" auf die Hysteresis-Schleife bei periodischer Deformation. Zum Schluss wird ein numerisches Beispiel angeführt.