Jan Polášek

Eine Bemerkung zum Artikel von František Slepička: Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Schaufelgitter

Aplikace matematiky, Vol. 4 (1959), No. 5, 291 (391)–294 (394)

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102677

EINE BEMERKUNG ZUM ARTIKEL VON FRANTIŠEK SLEPIČKA: BERECHNUNG DER POTENTIALSTRÖMUNG FÜR EIN EBENES SPALT-SCHAUFELGITTER

JAN POLÁŠEK

(Eingegangen am 1. November 1958.)

DT: 621.165-253
533.1:532.5

In der Bemerkung wird gezeigt, dass durch konsequente Anwendung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen einige Gedanken der Arbeit von F. Slepička sehr vereinfacht werden.

Im obenerwähnten Artikel beschreibt F. SLEPIČKA ein Verfahren zur Berechnung von Auftriebsbeiwerten und einigen weiteren aerodynamischen Beiwerten für ein ebenes Spalt-Schaufelgitter. Den Mittelpunkt der Arbeit von F. Slepička bildet die Ableitung von Näherungsformeln für die Berechnung der induzierten Geschwindigkeit (Abschnitt 4). In folgender Bemerkung beabsichtige ich auf die Möglichkeit hinzuweisen, durch eine konsequente Anwendung von Funktionen einer komplexen Veränderlichen das Ableiten der Formeln zu vereinfachen und den resultierenden Formeln eine einfache allgemeine Form zu geben.

Die Geschwindigkeit, die im Punkte z_μ von den an der ν-ten Schaufel verteilten Wirbeln induziert wird, ist mit dem Ausdruck (vergl. [1], Gl. (7))

$$w = \frac{i}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma(s)\, \mathrm{d}s}{z_\mu - se^{i\lambda} - i\nu t} \tag{1}$$

gegeben.

In den Ausdruck (1) setzt man die trigonometrische Veränderliche φ (vergl. [1], Gl. (4)) und für die Zirkulationsdichte die Glauertsche Reihe (vergl. [1], Gl. (2)) ein. Nach unbedeutenden Umformungen ergibt sich:

$$\frac{w}{w_\infty} = \frac{ie^{-i\lambda}}{\pi} \int_0^\pi \frac{A_0(1 + \cos\varphi) + \frac{1}{2} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n[\cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi]}{\cos\varphi - 1 - 2e^{-i\lambda}\left(i\frac{\nu t}{l} - \frac{z_\mu}{l}\right)}\, \mathrm{d}\varphi\,; \tag{2}$$

gleichfalls wird noch die Bezeichnung

$$a = 1 + 2e^{-i\lambda}\left(i\frac{\nu t}{l} - \frac{z_\mu}{l}\right) \tag{3}$$

und

$$D_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi - a}\,\mathrm{d}\varphi \tag{4}$$

eingeführt.

Jetzt kann man schreiben:

$$r_{n\nu} + ij_{n\nu} = e^{-i\lambda}(D_{n+1} - D_{n-1})\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{5}$$

und

$$r_{0\nu} + ij_{0\nu} = -\,2e^{-i\lambda}(D_0 + D_1)\,. \tag{6}$$

Es bleibt noch übrig, das Integral in der Gleichung (4) zu bestimmen. Mit Bezug darauf, dass der Kosinus eine gerade Funktion ist, kann man schreiben:

$$D_n = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\varphi}{\cos\varphi - a}\,\mathrm{d}\varphi\,. \tag{7}$$

Wird noch statt der Veränderlichen φ die komplexe Veränderliche ζ eingeführt:

$$\zeta = e^{i\varphi}\,, \tag{8}$$

so gilt

$$\cos n\varphi = \tfrac{1}{2}(\zeta^n + \zeta^{-n})\,, \quad \mathrm{d}\varphi = -\,i\,\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta} \tag{9}$$

und das Integral (7) geht in das Integral

$$D_n = -\frac{i}{4\pi}\oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n + \zeta^{-n}}{\zeta^2 - 2a\zeta + 1}\,\mathrm{d}\zeta = -\frac{i}{2\pi}\oint_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^n}{\zeta^2 - 2a\zeta + 1}\,\mathrm{d}\zeta \tag{10}$$

über, wobei der Integrationsweg der im positiven Sinn durchlaufene Einheitskreis ist. Die Wurzeln des Nenners im Integranden sind

$$\zeta_{1,2} = a \mp \sqrt{a^2 - 1}\,, \tag{11}$$

wobei

$$|\zeta_1| < 1\,, \quad |\zeta_2| > 1 \tag{12}$$

ist.

Innerhalb des Integrationsweges hat der Integrand einen Pol erster Ordnung, so dass im Sinne des Residuumsatzes gilt:

$$D_n = \frac{\zeta_1^n}{\zeta_1 - \zeta_2}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{13}$$

Werden diese Ausdrücke in die Gleichung (5) eingesetzt, ergibt sich

$$r_{n\nu} + ij_{n\nu} = e^{-i\lambda} \frac{\zeta_1^{n+1} - \zeta_1^{n-1}}{\zeta_1 - \zeta_2} = e^{-i\lambda} \zeta^{n-1} \frac{\zeta_1^2 - 1}{\zeta_1 - \zeta_2} \tag{14}$$

und da

$$1 = \zeta_1 \, . \, \zeta_2 \, ,$$

gilt endlich

$$r_{n\nu} + ij_{n\nu} = e^{-i\lambda} \zeta_1^n \, , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Setzt man in die Gleichung (6) ein, ergibt sich

$$r_{0\nu} + ij_{0\nu} = - 2e^{-i\lambda} \frac{1 + \zeta_1}{\zeta_1 - \zeta_2} \, , \tag{16}$$

oder

$$r_{0\nu} + ij_{0\nu} = e^{-i\lambda} \frac{1 + \zeta_1}{\sqrt{a^2 - 1}} \, , \tag{17}$$

wo man für die Wurzel denjenigen von beiden Werten nehmen muss, für den

$$|a - \sqrt{a^2 - 1}| < 1$$

gilt.

Literaturverzeichnis

[1] *F. Slepička:* Die Berechnung der Potentialströmung für ein ebenes Spalt-Schaufelgitter. Aplikace matematiky 4 (1959), No 5,

Souhrn

POZNÁMKA K ČLÁNKU FRANTIŠKA SLEPIČKY: ŘEŠENÍ POTENCIÁLNÍHO OBTÉKÁNÍ ŠTĚRBINOVÉ LOPATKOVÉ MŘÍŽE

Jan Polášek

(Došlo dne 1. listopadu 1958.)

V poznámce je ukázáno, jak je možno důsledným užitím funkcí komplexní proměnné podstatně zjednodušit odvození vzorců a dát konečným vzorcům pro $r_{n\nu}$ a $j_{n\nu}$ (rov. (15) a (17)) jednoduchý obecný tvar.

Резюме

ПРИМЕЧАНИЕ К СТАТЬЕ ФРАНТИШКА СЛЕПИЧКИ: РАСЧЕТ ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ОБТЕКАНИЯ ЩЕЛЕВОЙ ЛОПАТОЧНОЙ РЕШЕТКИ

ЯН ПОЛАШЕК

(Поступило в редакцию 1/XI 1958 г.)

В примечании показано, что последовательным применением функций комплексного переменного можно существенно упростить вывод формул и окончательным формулам для $r_{n\nu}$ и $j_{n\nu}$ (урав. (15) и (17)) придать простой общий вид.