Aplikace matematiky

Andrei Ripianu

Přibližný výpočet koeficientu Fourierovy řady periodické funkce

*Aplikace matematiky*, Vol. 6 (1961), No. 2, 135–159

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102747

# PŘIBLIŽNÝ VÝPOČET KOEFICIENTŮ FOURIEROVY ŘADY PERIODICKÉ FUNKCE

ANDREI RIPIANU

(Došlo dne 28. října 1959.)

V článku se odvozují vzorce, které vyjadřují koeficienty Fourierova rozvoje periodické funkce odpovídající dělení periody na velký počet úseků pomocí koeficientů odpovídajících dělení periody na menší počet úseků, avšak s posunutým počátkem periody. Na dvou numerických příkladech je pak ukázáno praktické provádění a výhodnost navrhované metody.

Harmonická analysa periodických funkcí má značnou důležitost v technice kmitání. Určení přesných hodnot koeficientů rozvoje periodické funkce ve Fourierovu řadu je však možné jen v tom případě, kdy dovedeme danou periodickou funkci vyjádřit analyticky výrazem $y = f(x)$. Ve většině případů, jež se vyskytují v technice, takové vyjádření není možné. Proto se v praxi určují koeficienty rozvoje periodické funkce ve Fourierovu řadu přibližně, a to tak, že se celá perioda rozdělí na $s$ stejných úseků a pak se použije některého ze známých schémat výpočtu (Zipperer, Runge). Při Zippererově metodě je $s = 24$, při Rungeově metodě je $s = 4k$, kde $k$ je celé kladné číslo.

Chyba, jíž jsou tyto přibližné hodnoty koeficientů zatíženy, roste s řádem harmonické. Je možno ji snížit zvýšením počtu úseků, na které je perioda rozdělena: klesá rychle s rostoucím počtem úseků.

V této práci se snažíme nalézti početní postup pro zvýšení přesnosti hodnot koeficientů Fourierova rozvoje získaných některou ze známých metod, při čemž perioda je rozdělena na $s$ stejných úseků. K tomuto cíli se snažíme získati matematické vztahy vyjadřující Fourierovy koeficienty $\binom{a_0}{ks}, \binom{a_i}{ks}, \binom{b_i}{ks}$ při dělení periody na $ks$ stejných úseků pomocí koeficientů $\binom{a_0}{s}, \binom{a_i}{s}, \binom{b_i}{s}$ odpovídajících dělení periody na $s$ stejných úseků.

Zvolili jsme obecný případ $k = p^n$, takže určujeme koeficienty $\binom{a_0}{p^n s}, \binom{a_i}{p^n s}, \binom{b_i}{p^n s}$

jako funkce koeficientů $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_i}{s}$, $\binom{b_i}{s}$, přičemž přemisťujeme vhodným způsobem interval $(0, 2\pi)$ po ose $u$.

Ve velmi zajímavém článku prof. LAVINY [1] je tento problém řešen pro speciální případ $k = 2^n$ tak, že se koeficienty $\binom{a_0}{2^n s}$, $\binom{a_i}{2^n s}$, $\binom{b_i}{2^n s}$ vyjadřují pomocí koeficientů $\binom{a_0}{2^{n-1}s}$, $\binom{a_i}{2^{n-1}s}$, $\binom{b_i}{2^{n-1}s}$.

Abychom mohli určit koeficienty $\binom{a_0}{2^n s}$, $\binom{a_i}{2^n s}$, $\binom{b_i}{2^n s}$, známe-li koeficienty $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_i}{s}$, $\binom{b_i}{s}$, musíme určiti postupně hodnoty všech mezilehlých koeficientů $\binom{a_0}{2^j s}$, $\binom{a_i}{2^j s}$, $\binom{b_i}{2^j s}$, pro $j = 1, 2, \ldots, n - 1$, což je nevýhodné.

V konečných vzorcích, jež jsme odvodili, jsou vyjádřeny koeficienty $\binom{a_0}{p^n s}$, $\binom{a_i}{p^n s}$, $\binom{b_i}{p^n s}$ přímo jako funkce $\binom{a_0}{s}$, $\binom{a_i}{s}$, $\binom{b_i}{s}$, přičemž interval $(0, 2\pi)$ je vhodným způsobem posunut po ose $u$.

Metoda, které jsme zde použili, je zcela odlišná od metody prof. Laviny. Aplikací naší metody na speciální případ studovaný prof. Lavinou dostali jsme stejné vzorce jako on.

**1.** Mějme periodickou funkci $f(x)$ s periodou $l$. Transformací $x = \dfrac{l}{2\pi} u$ dostaneme periodickou funkci

$$\phi(u) = f\left(\frac{l}{2\pi} u\right) = f(x) \tag{1}$$

s periodou $2\pi$. Rozvineme funkci $\phi(u)$ ve Fourierovu řadu

$$\phi(u) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos iu + b_i \sin iu)\,, \tag{2}$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u)\, du\,; \quad a_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u) \cos iu\, du\,; \tag{3}$$

$$b_i = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \phi(u) \sin iu\, du\,.$$

Z (1) a (2) dostaneme

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \left(a_i \cos i\frac{2\pi}{l} x + b_i \sin i\frac{2\pi}{l} x\right),$$

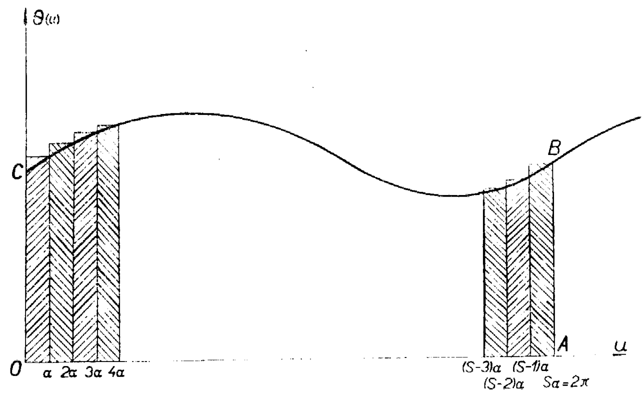
z čehož vyplývá, že koeficienty $a_0$, $a_i$, $b_i$ z (2) přísluší Fourierovu rozvoji funkce $f(x)$.

Při praktickém výpočtu hodnot funkce $\phi(u)$ podle vzorce (2) se dopouštíme dvojí nepřesnosti:

a) omezujeme rozvoj na $2m + 1$ členů ($i = 1, 2, \ldots, m$),

b) při výpočtu $a_0$, $a_i$, $b_i$ podle (3) používáme vzorce pro přibližnou kvadraturu

(4) $$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta(u)\,\mathrm{d}u \doteq \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \Theta(h\alpha),$$




Obr. 1.

kde $\Theta(u)$ je periodická funkce s periodou $2\pi$, t. j. nahrazujeme přesnou hodnotu integrálu $\int_0^{2\pi} \Theta(u)\,du$ plochou $OABC$ (obr. 1), rovnou ploše vzniklé sečtením vyčárkovaných obdélníčků na obr. 1 o základně

(5) $$\alpha = \frac{2\pi}{s},$$

tedy

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Theta(u)\,\mathrm{d}u \doteq \frac{\alpha}{2\pi}\sum_{h=1}^{s} \Theta(h\alpha) = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} \Theta(h\alpha).$$

Položme

($5_1$) $$\phi(h\alpha) = y_h^{|s}.$$

Z (3) a (4) dostaneme

(6) $$a_0 \doteq \binom{a_0}{s} = \frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} y_h^{|s}\,; \quad a_i \doteq \binom{a_i}{s} = \frac{2}{s}\sum_{h=1}^{s} y_h^{|s} \cos ih\alpha\,;$$

$$b_i \doteq \binom{b_i}{s} = \frac{2}{s}\sum_{h=1}^{s} y_h^{|s} \sin ih\alpha.$$

Ze vzorců (2) a (6) dostaneme pak přibližnou hodnotu

$$\phi(u) \doteq \binom{a_0}{s} + \sum_{i=1}^{m} \left[ \binom{a_i}{s} \cos iu + \binom{b_i}{s} \sin iu \right]. \tag{7}$$

Naše práce obsahuje dvě části:

V prvé z nich odvozujeme vyjádření koeficientů $\binom{a_0}{2^n s}$, $\binom{a_i}{2^n s}$, $\binom{b_i}{2^n s}$ – odpovídajících dělení intervalu $(0, 2\pi)$ na $2^n s$ stejných úseků – pomocí koeficientů odpovídajících dělení intervalu $(0, 2\pi)$ na $s$ stejných úseků, ale tak, že za pořadnice bereme hodnoty získané vhodným posunutím intervalu $(0, 2\pi)$ na ose $u$.

V druhé části se odvozuje vyjádření koeficientů $\binom{a_0}{p^n s}$, $\binom{a_i}{p^n s}$, $\binom{b_i}{p^n s}$ odpovídajících dělení intervalu $(0, 2\pi)$ na $p^n s$ stejných úseků pomocí koeficientů odpovídajících dělení $(0, 2\pi)$ na $s$ stejných úseků, avšak rovněž při vhodném posunutí intervalu $(0,2\pi)$ po ose $u$.

**2.** Položme

$$y_h^{\underline{|s}} = \phi(h\alpha)\,; \quad y_h^{\underline{|s,[\beta]}} = \phi(h\alpha + \beta)\,; \quad \binom{a_0}{s}^{[\beta]} = \frac{1}{s} \sum_{h=1}^{s} y_h^{\underline{|s,[\beta]}}\,; \tag{8}$$

$$\binom{a_i}{s}^{[\beta]} = \frac{2}{s} \sum_{h=1}^{s} y_h^{\underline{|s,[\beta]}} \cos ih\alpha\,; \quad \binom{b_i}{s}^{[\beta]} = \frac{2}{s} \sum_{h=1}^{s} y_h^{\underline{|s,[\beta]}} \sin ih\alpha\,.$$

Výrazy $\binom{a_0}{s}^{[\beta]}$, $\binom{a_i}{s}^{[\beta]}$, $\binom{b_i}{s}^{[\beta]}$ budou pak přibližnými hodnotami koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$ určenými vzorcem (4) při dělení intervalu $(0, 2\pi)$ na $s$ stejných úseků, avšak tak, že za pořadnice bereme hodnoty získané posunutím intervalu $(0, 2\pi)$ po ose $u$ o délku $\beta$.

Pišme

$$\alpha_n = \frac{2\pi}{2^n s}\,. \tag{9}$$

Dosadíme-li do (8) $2^n s$ za $s$, dostaneme vzhledem k (9)

$$y_h^{\underline{|2^n s}} = \phi(h\alpha_n)\,; \quad y_h^{\underline{|2^n s,[\beta]}} = \phi(h\alpha_n + \beta)\,; \tag{10}$$

$$\binom{a_0}{2^n s}^{[\beta]} = \frac{1}{2^n s} \sum_{h=1}^{2^n s} y_h^{\underline{|2^n s,[\beta]}}\,; \quad \binom{a_i}{2^n s}^{[\beta]} = \frac{2}{2^n s} \sum_{h=1}^{2^n s} y_h^{\underline{|2^n s,[\beta]}} \cos ih\alpha_n\,;$$

$$\binom{b_i}{2^n s}^{[\beta]} = \frac{2}{2^n s} \sum_{h=1}^{2^n s} y_h^{\underline{|2^n s,[\beta]}} \sin ih\alpha_n\,.$$

Ježto $\phi(u)$ a $\cos u$ jsou periodické funkce s periodou $2\pi$, máme

$$y_{2^{n+1}s+1}^{|2^{n+1}s} = \phi[(2^{n+1}s + 1)\,\alpha_{n+1}] = \phi(2\pi + \alpha_{n+1}) = \phi(\alpha_{n+1}) = y_1^{|2^{n+1}s},$$

$$\cos i(2^{n+1}s + 1)\,\alpha_{n+1} = \cos i\alpha_{n+1}\,.$$

Dosaďme do (6) $2^{n+1}s$ za $s$. Bude pak

$$\left(\frac{a_i}{2^{n+1}s}\right) = \frac{2}{2^{n+1}s}\sum_{h=1}^{2^{n+1}s} y_h^{|2^{n+1}s} \cos ih\alpha_{n+1} = \tag{11}$$

$$= \frac{2}{2^{n+1}s}\left[\sum_{h=1}^{2^ns} y_{2h}^{|2^{n+1}s} \cos ih\alpha_{n+1} + \sum_{h=1}^{2^ns} y_{2h+1}^{|2^{n+1}s} \cos i(2h+1)\,\alpha_{n+1}\right].$$

Uvážíme-li, že

$$2\alpha_{n+1} = \alpha_n\,; \quad y_{2h}^{|2^{n+1}s} = \phi(2h\alpha_{n+1}) = \phi(h\alpha_n) = y_h^{|2^ns}\,;$$

$$y_{2h+1}^{|2^{n+1}s} = \phi[(2h+1)\,\alpha_{n+1}] = \phi(2h\alpha_{n+1} + \alpha_{n+1}) = \phi(h\alpha_n + \alpha_{n+1}) = y_h^{|2^ns,[\alpha_{n+1}]},$$

přejde (11) v

$$\left(\frac{a_i}{2^{n+1}s}\right) = \frac{2}{2^{n+1}s}\left[\sum_{h=1}^{2^ns} y_h^{|2^ns} \cos ih\alpha_n + \cos i\alpha_{n+1}\sum_{h=1}^{2^ns} y_h^{|2^ns,[\alpha_{n+1}]} \cos ih\alpha_n - \right.$$

$$\left. - \sin i\alpha_{n+1}\sum_{h=1}^{2^ns} y_h^{|2^ns,[\alpha_{n+1}]} \sin ih\alpha_n\right].$$

S použitím označení (10)

$$\left(\frac{a_i}{2^{n+1}s}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_i}{2^ns}\right) + \left(\frac{a_i}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]} \cos i\alpha_{n+1} - \left(\frac{b_i}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]} \sin i\alpha_{n+1}\right].$$

Stejně postupujeme v případě $\left(\frac{a_0}{2^{n+1}s}\right)$, $\left(\frac{b_i}{2^{n+1}s}\right)$ a dostaneme

$$\left(\frac{a_0}{2^{n+1}s}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_0}{2^ns}\right) + \left(\frac{a_0}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]}\right], \tag{12}$$

$$\left(\frac{a_i}{2^{n+1}s}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a_i}{2^ns}\right) + \left(\frac{a_i}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]} \cos i\alpha_{n+1} - \left(\frac{b_i}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]} \sin i\alpha_{n+1}\right],$$

$$\left(\frac{b_i}{2^{n+1}s}\right) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{b_i}{2^ns}\right) + \left(\frac{b_i}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]} \cos i\alpha_{n+1} + \left(\frac{a_i}{2^ns}\right)^{[\alpha_{n+1}]} \sin i\alpha_{n+1}\right].$$

Budeme předpokládati, že vztahy

$$\left(\frac{a_0}{2^ns}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a_0}{2^{n-1}s}\right) + \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{2^{n-1}-1}\left(\frac{a_0}{s}\right)^{[(2p+1)\alpha_n]}, \tag{13}$$

$$\binom{a_i}{2^n s} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^{n-1}s} + \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{2^{n-1}-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_n]}\cos i(2p+1)\,\alpha_n - \right.$$

$$\left. - \binom{b_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_n]}\sin i(2p+1)\,\alpha_n\right],$$

$$\binom{b_i}{2^n s} = \frac{1}{2}\binom{b_i}{2^{n-1}s} + \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^{2^{n-1}-1}\left[\binom{b_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_n]}\cos i(2p+1)\,\alpha_n + \right.$$

$$\left. + \binom{a_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_n]}\sin i(2p+1)\,\alpha_n\right],$$

jsou splněny pro $n = 1, 2, \ldots, m$. Dokážeme si, že (13) platí i pro $n = m + 1$.

Položme

(14) $$A^{[h\alpha_q]} = \binom{a_i}{s}^{[h\alpha_q]}\cos ih\alpha_q - \binom{b_i}{s}^{[h\alpha_q]}\sin ih\alpha_q\,,$$

$$B^{[h\alpha_q]} = \binom{b_i}{s}^{[h\alpha_q]}\cos ih\alpha_q + \binom{a_i}{s}^{[h\alpha_q]}\sin ih\alpha_q\,,$$

$$A^{[h\alpha_q]+[l\alpha_\lambda]} = \binom{a_i}{s}^{[h\alpha_q+l\alpha_\lambda]}\cos ih\alpha_q - \binom{b_i}{s}^{[h\alpha_q+l\alpha_\lambda]}\sin ih\alpha_q\,,$$

$$B^{[h\alpha_q]+[l\alpha_\lambda]} = \binom{b_i}{s}^{[h\alpha_q+l\alpha_\lambda]}\cos ih\alpha_q + \binom{a_i}{s}^{[h\alpha_q+l\alpha_\lambda]}\sin ih\alpha_q\,.$$

Vidíme, že

(15) $$A^{[h\alpha_q]+[l\alpha_\lambda]}\cos il\alpha_\lambda - B^{[h\alpha_q]+[l\alpha_\lambda]}\sin il\alpha_\lambda = A^{[h\alpha_q+l\alpha_\lambda]}\,.$$

Za předpokladu (13) plyne z prvého vztahu (12)

(16) $$\binom{a_i}{2^{m+1}s} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^m s} + \frac{1}{2}\left[\binom{a_i}{2^m s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^m s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^m s} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\binom{a_i}{2^{m-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} + \frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{2^{m-1}-1}A^{[(2p+1)\alpha_m]+[\alpha_{m+1}]}\right]\cos i\alpha_{m+1} -$$

$$- \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\binom{b_i}{2^{m-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} + \frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^{2^{m-1}-1}B^{[(2p+1)\alpha_m]+[\alpha_{m+1}]}\right]\sin i\alpha_{m+1}\,.$$

Pomocí (15) lze (16) napsati ve tvaru

(17)
$$\binom{a_i}{2^{m+1}s} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^m s} + \frac{1}{2^2}\left[\binom{a_i}{2^{m-1}s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-1}s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{p=0}^{2^{m-1}-1}A^{[(2^2p+3)\alpha_{m+1}]}\,.$$

Uvážíme-li, že $\alpha_{m-\phi} = 2^{\nu+1}\alpha_{m+1}$, plyne z (13)

$$\binom{a_i}{2^{m-\nu}s} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^{m-\nu-1}s} + \frac{1}{2^{m-\nu}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} \left[ \binom{a_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_{m-\nu}]} \cos i(2p+1)\,\alpha_{m-\nu} - \right.$$

$$\left. - \binom{b_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_{m-\nu}]} \sin i\,(2p+1)\,\alpha_{m-\nu} \right];$$

$$\binom{b_i}{2^{m-\nu}s} = \frac{1}{2}\binom{b_i}{2^{m-\nu-1}s} + \frac{1}{2^{m-\nu}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} \left[ \binom{b_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_{m-\nu}]} \cos i(2p+1)\,\alpha_{m-\nu} + \right.$$

$$\left. + \binom{a_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_{m-\nu}]} \sin i(2p+1)\,\alpha_{m-\nu} \right].$$

Avšak

$$(2p+1)\,\alpha_{m-\nu} = (2p+1)\,2^{\nu+1}\alpha_{m+1} = (2^{\nu+2}p + 2^{\nu+1})\,\alpha_{m+1}\,,$$

takže z předcházejících vztahů vychází

$$\binom{a_i}{2^{m-\nu}s}^{[\alpha_{m+1}]} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^{m-\nu-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} +$$

$$+ \frac{1}{2^{m-\nu}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} \left[ \binom{a_i}{s}^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1})\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}]} \cos i(2^{\nu+2}p + 2^{\nu+1})\,\alpha_{m+1} - \right.$$

$$\left. - \binom{b_i}{s}^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1})\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}]} \sin i(2^{\nu+2}p + 2^{\nu+1})\,\alpha_{m+1} \right];$$

$$\binom{b_i}{2^{m-\nu}s}^{[\alpha_{m+1}]} = \frac{1}{2}\binom{b_i}{2^{m-\nu-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} +$$

$$+ \frac{1}{2^{m-\nu}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} \left[ \binom{b_i}{s}^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1})\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}]} \cos i(2^{\nu+2}p + 2^{\nu+1})\,\alpha_{m+1} + \right.$$

$$\left. + \binom{a_i}{s}^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1})\alpha_{m+1}+\alpha_{m+1}]} \sin i(2^{\nu+2}p + 2^{\nu+1})\,\alpha_{m+1} \right].$$

Pomocí označení (14) dostaneme

$$\binom{a_i}{2^{m-\nu}s}^{[\alpha_{m+1}]} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^{m-\nu-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} + \frac{1}{2^{m-\nu}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} A^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1})\alpha_{m+1}]+[\alpha_{m+1}]}\,,$$

$$\binom{b_i}{2^{m-\nu}s}^{[\alpha_{m+1}]} = \frac{1}{2}\binom{b_i}{2^{m-\nu-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} + \frac{1}{2^{m-\nu}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} B^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1})\alpha_{m+1}]+[\alpha_{m+1}]}$$

a odtud vzhledem k (15) plyne

$$\frac{1}{2^{\nu+1}}\left[\binom{a_i}{2^{m-\nu}s}^{[\alpha_{m+1}]} \cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-\nu}s}^{[\alpha_{m+1}]} \sin i\alpha_{m+1}\right] = \tag{18}$$

$$= \frac{1}{2^{\nu+2}}\left[\binom{a_i}{2^{m-\nu-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} \cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-\nu-1}s}^{[\alpha_{m+1}]} \sin i\alpha_{m+1}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} A^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1}+1)\alpha_{m+1}]}\,.$$

Klademe-li v (18) za $\nu$ postupně 1, 2, ..., $m - 1$, dostaneme

$$(19)\qquad \frac{1}{2^2}\left[\binom{a_i}{2^{m-1}s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-1}s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^3}\left[\binom{a_i}{2^{m-2}s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-2}s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{p=0}^{2^{m-2}-1} A^{[(2^3p+2^2+1)\alpha_{m+1}]},$$

$$\frac{1}{2^3}\left[\binom{a_i}{2^{m-2}s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-2}s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^4}\left[\binom{a_i}{2^{m-3}s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2^{m-3}s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] +$$

$$+ \frac{1}{2^{m+1}}\sum_{p=0}^{2^{m-3}-1} A^{[(2^4p+2^3+1)\alpha_{m+1}]},$$

$$\frac{1}{2^m}\left[\binom{a_i}{2s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{2s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}}\left[\binom{a_i}{s}^{[\alpha_{m+1}]}\cos i\alpha_{m+1} - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_{m+1}]}\sin i\alpha_{m+1}\right] + \frac{1}{2^{m+1}} A^{[(2^m+1)\alpha_{m+1}]}.$$

Sečtením (17) a (19) dostaneme

$$(20)\qquad \binom{a_i}{2^{m+1}s} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^m s} + \frac{1}{2^{m+1}}\left[\sum_{\nu=0}^{m-1}\sum_{p=0}^{2^{m-\nu-1}-1} A^{[(2^{\nu+2}p+2^{\nu+1}+1)\alpha_{m+1}]} + A^{[m+1]}\right].$$

Uvažujme nyní funkci

$$M(\nu, p) = 2^{\nu+2}p + 2^{\nu+1} + 1.$$

Položíme $M(\nu, p) = 2q + 1$ a máme pak

$$q = N(\nu, p) = 2^\nu(2p + 1).$$

Celkový počet hodnot $q = N(\nu, p)$, jež dostaneme, když $\nu$ nabývá postupně hodnot $\nu = 0, 1, \ldots, m - 1$, a $p$ hodnot $p = 0, 1, \ldots, 2^{m-\nu-1} - 1$, je dán výrazem

$$\sum_{\nu=0}^{m-1} 2^{m-\nu-1} = 2^m - 1.$$

$N$ roste úměrně s $\nu$ a $p$ a

$$\max N(\nu, p) = 2^\nu(2^{m-\nu} - 2 + 1) = 2^m - 2^\nu, \quad 0 \leqq p \leqq 2^{m-\nu-1} - 1,$$

$$\max_{0 \leqq \nu \leqq m-1} (2^m - 2^\nu) = 2^m - 1,$$

$$\min N(\nu, p) = 1, \quad (\nu = 0, p = 0),$$

takže

$$1 \leqq N(\nu, p) \leqq 2^m - 1.$$

Avšak čísla $N(v, p)$ jsou navzájem různá. Skutečně, kdyby pro $0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq m-1$ bylo $N(\alpha, a) = N(\beta, b)$, pak by odtud plynulo $2a + 1 = 2^{\beta-\alpha}(2b + 1)$, což není možné, neboť na levé straně je číslo liché a na pravé straně sudé. Jestliže však $N(v, a) = N(v, b)$, potom $a = b$. Ježto tedy jsou čísla $q = N(v, p)$, v počtu $2^m - 1$, všechna navzájem různá a obsažená v mezích $1, 2^m - 1$, jsou to právě čísla $q = 1, 2, \ldots, \ldots, 2^m - 1$. Funkce $M(v, p) = 2q + 1$ nabývá tedy právě hodnot

$$2q + 1 = 3, 5, 7, \ldots, 2^{m+1} - 1 .$$

Vztah (20) lze pak psáti jako

$$(21) \qquad \binom{a_i}{2^{m+1}s} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^m s} + \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{q=0}^{2^m-1} A^{[(2q+1)\alpha_{m+1}]} = \frac{1}{2}\binom{a_i}{2^m s} +$$
$$+ \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{p=0}^{2^m-1} \left[ \binom{a_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_{m+1}]} \cos i(2p+1)\,\alpha_{m+1} - \right.$$
$$\left. - \binom{b_i}{s}^{[(2p+1)\alpha_{m+1}]} \sin i(2p+1)\,\alpha_{m+1} \right].$$

Z (13) a (21) plyne, že z platnosti druhého vztahu (13) pro $n = 1, 2, \ldots, m$ vyplývá i jeho platnost pro $n = m + 1$. Analogicky lze totéž dokázati i pro prvou a třetí rovnost (13). Pro $n = 0$ dostáváme z (12)

$$(12a) \qquad \binom{a_0}{2s} = \frac{1}{2}\left[\binom{a_0}{s} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1]}\right],$$
$$\binom{a_i}{2s} = \frac{1}{2}\left[\binom{a_i}{s} + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1]} \cos i\alpha_1 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1]} \sin i\alpha_1\right],$$
$$\binom{b_i}{2s} = \frac{1}{2}\left[\binom{b_i}{s} + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1]} \cos i\alpha_1 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1]} \sin i\alpha_1\right].$$

Vidíme, že pro $n = 1$, přecházejí vztahy (13) v (12a). Avšak platí-li (13) pro $n = 1$, platí také pro $n = 2$, tedy také pro $n = 3$, atd., platí tedy zcela obecně pro celá $n \geqq 0$.

**3.** Přejdeme nyní k přibližnému výpočtu koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$ při dělení intervalu $(0,2\pi)$ na $p^n s$ stejných úseků. V tomto paragrafu položíme

$$(22) \qquad \alpha = \frac{2\pi}{s}, \quad \alpha_n = \frac{2\pi}{p^n s}.$$

Dosazením $ps$ za $s$ v (6) dostaneme

$$(23) \qquad \binom{a_0}{ps} = \frac{1}{ps} \sum_{h=1}^{ps} y_h^{|ps}; \quad \binom{a_i}{ps} = \frac{2}{ps} \sum_{h=1}^{ps} y_h^{|ps} \cos ih\alpha_1 ;$$
$$\binom{b_i}{ps} = \frac{2}{ps} \sum_{h=1}^{ps} y_h^{|ps} \sin ih\alpha_1 ,$$

kde

$$y_h^{|ps} = \phi(h\alpha_1) .$$

Zachováme označení $(5_1)$ a (8) a zavedeme navíc nová označení

$$(24)\qquad y_h^{|p^n s} = \phi(h\alpha_n)\,;\quad y_h^{|p^n s,[\beta]} = \phi(h\alpha_n + \beta)\,;\quad \binom{a_0}{p^n s}^{[\beta]} = \frac{1}{p^n s}\sum_{h=1}^{p^n s} y_h^{|p^n s,[\beta]}\,;$$

$$\binom{a_i}{p^n s}^{[\beta]} = \frac{2}{p^n s}\sum_{h=1}^{p^n s} y_h^{|p^n s,[\beta]} \cos ih\alpha_n\,;\qquad \binom{b_i}{p^n s}^{[\beta]} = \frac{2}{p^n s}\sum_{h=1}^{p^n s} y_h^{|p^n s,[\beta]} \sin ih\alpha_n\,.$$

Z (23) pak plyne

$$(25)\qquad \binom{a_i}{ps} = \frac{2}{ps}\left[\sum_{h=1}^{s} y_{ph}^{|ps} \cos iph\alpha_1 + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\sum_{h=1}^{s} y_{ph+\sigma}^{|ps} \cos i(ph+\sigma)\,\alpha_1\right].$$

Avšak

$$y_{ph}^{|ps} = \phi\left(ph\frac{2\pi}{ps}\right) = \phi\left(h\frac{2\pi}{s}\right) = \phi(h\alpha) = y_h^{|s}\,,$$

$$y_{ph+\sigma}^{|ps} = \phi\left[(ph+\sigma)\frac{2\pi}{ps}\right] = \phi(h\alpha + \sigma\alpha_1) = y_h^{|s,[\sigma\alpha_1]}\,.$$

Vztah (25) tak přejde v

$$\binom{a_i}{ps} = \frac{1}{p}\left[\frac{1}{s}\sum_{h=1}^{s} y_h^{|s} \cos ih\alpha + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\cos i\sigma\alpha_1\,.\,\frac{2}{s}\sum_{h=1}^{s} y_h^{|s,[\sigma\alpha_1]}\cos ih\alpha - \right.$$

$$\left. - \sum_{\sigma=1}^{p-1}\sin i\sigma\alpha_1\,.\,\frac{2}{s}\sum_{h=1}^{s} y_h^{|s,[\sigma\alpha_1]}\sin ih\alpha_1\right],$$

což v označení (6) a (8) dává

$$(26)\qquad \binom{a_i}{ps} = \frac{1}{p}\left\{\binom{a_i}{s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma\alpha_1]}\cos i\sigma\alpha_1 - \binom{b_i}{s}^{[\sigma\alpha_1]}\sin i\sigma\alpha_1\right]\right\}.$$

Podobně dostaneme

$$(26a)\qquad \binom{a_0}{ps} = \frac{1}{p}\left[\binom{a_0}{s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\binom{a_0}{s}^{[\sigma\alpha_1]}\right],$$

$$(26b)\qquad \binom{b_i}{ps} = \frac{1}{p}\left\{\binom{b_i}{s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\left[\binom{b_i}{s}^{[\sigma\alpha_1]}\cos i\sigma\alpha_1 + \binom{a_i}{s}^{[\sigma\alpha_1]}\sin i\sigma\alpha_1\right]\right\}.$$

S přihlédnutím k (14) můžeme psáti

$$(26_1)\qquad \binom{a_i}{ps} = \frac{1}{p}\left[\binom{a_i}{s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1} A^{[\sigma\alpha_1]}\right],$$

$$(26b)\qquad \binom{b_i}{ps} = \frac{1}{p}\left[\binom{b_i}{s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1} B^{[\sigma\alpha_1]}\right].$$

Dosadíme v (6) $p^{n+1}s$ za $s$ a máme

$$\binom{a_i}{p^{n+1}s} = \frac{2}{p^{n+1}s}\sum_{h=1}^{p^{n+1}s} y_h^{|p^{n+1}s}\cos ih\alpha_{n+1}\,,$$

neboli

$$(27)\quad \binom{a_i}{p^{n+1}s} = \frac{2}{p^{n+1}s}\left[\sum_{h=1}^{p^ns} y_{ph}^{|p^{n+1}s} \cos iph\alpha_{n+1} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\sum_{h=1}^{p^ns} y_{ph+\sigma}^{|p^{n+1}s} \cos i(ph+\sigma)\,\alpha_{n+1}\right].$$

Avšak

$$y_{ph}^{|p^{n+1}s} = \phi(ph\alpha_{n+1}) = \phi\left(ph\,\frac{\alpha_n}{p}\right) = \phi(h\alpha_n) = y_h^{|p^ns},$$

$$y_{ph+\sigma}^{|p^{n+1}s} = \phi[(ph+\sigma)\,\alpha_{n+1}] = \phi(h\alpha_n + \sigma\alpha_{n+1}) = y_h^{|p^ns,[\sigma\alpha_{n+1}]}.$$

Z (27) tak vychází

$$\binom{a_i}{p^{n+1}s} = \frac{1}{p}\left[\frac{2}{p^ns}\sum_{h=1}^{p^ns} y_h^{|p^ns} \cos ih\alpha_n + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \cos i\sigma\alpha_{n+1}\,.\,\frac{2}{p^ns}\sum_{h=1}^{p^ns} y_h^{|p^ns,[\sigma\alpha_{n+1}]} \cos ih\alpha_n - \right.$$
$$\left. - \sum_{\sigma=1}^{p-1} \sin i\sigma\alpha_{n+1}\,.\,\frac{2}{p^ns}\sum_{h=1}^{p^ns} y_h^{|p^ns,[\sigma\alpha_{n+1}]} \sin ih\alpha_n\right],$$

což v označení (23) a (24) dává

$$(28)\quad \binom{a_i}{p^{n+1}s} = \frac{1}{p}\left\{\binom{a_i}{p^ns} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{p^ns}^{[\sigma\alpha_{n+1}]} \cos i\sigma\alpha_{n+1} - \binom{b_i}{p^ns}^{[\sigma\alpha_{n+1}]} \sin i\sigma\alpha_{n+1}\right]\right\}$$

Podobně odvodíme

$$(29)\quad \binom{a_0}{p^{n+1}s} = \frac{1}{p}\left[\binom{a_0}{p^ns} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\binom{a_0}{p^ns}^{[\sigma\alpha_{n+1}]}\right],$$

$$\binom{b_i}{p^{n+1}s} = \frac{1}{p}\left\{\binom{b_i}{p^ns} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\left[\binom{b_i}{p^ns}^{[\sigma\alpha_{n+1}]} \cos i\sigma\alpha_{n+1} + \binom{a_i}{p^ns}^{[\alpha\sigma_{n+1}]} \sin i\sigma\alpha_{n+1}\right]\right\}.$$

Položme v (28) $n = 1$, bude pak

$$\binom{a_i}{p^2s} = \frac{1}{p}\left\{\binom{a_i}{ps} + \sum_{\sigma=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{ps}^{[\sigma\alpha_2]} \cos i\sigma\alpha_2 - \binom{b_i}{ps}^{[\sigma\alpha_2]} \sin i\sigma\alpha_2\right]\right\}.$$

Vzhledem k (26) a (14) máme

$$\binom{a_i}{p^2s} = \frac{1}{p^2}\left\{\binom{a_i}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1]} \cos i\sigma_1\alpha_1 - \binom{b_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1]} \sin i\sigma_1\alpha_1\right]\right\} +$$
$$+ \frac{1}{p^2}\sum_{\sigma_2=1}^{p-1}\left(\left\{\binom{a_i}{s}^{[\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]} \cos i\sigma_1\alpha_1 - \right.\right.\right.$$
$$\left.\left. - \binom{b_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]} \sin i\sigma_1\alpha_1\right]\right\} \cos i\sigma_2\alpha_2 -$$
$$- \left\{\binom{b_i}{s}^{[\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1}\left[\binom{b_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]} \cos i\sigma_1\alpha_1 + \right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \binom{a_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]} \sin i\sigma_1\alpha_1\right]\right\} \sin i\sigma_2\alpha_2\right),$$

nebo-li

$$\binom{a_i}{p^2 s} = \frac{1}{p^2}\left\{\binom{a_i}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1]}\cos i\sigma_1\alpha_1 - \binom{b_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1]}\sin i\sigma_1\alpha_1\right] + \right.$$

$$+ \sum_{\sigma_2=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma_2\alpha_2]}\cos i\sigma_2\alpha_2 - \binom{b_i}{s}^{[\sigma_2\alpha_2]}\sin i\sigma_2\alpha_2\right] +$$

$$+ \sum_{\sigma_1=1,\sigma_2=1}^{p-1}\left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]}\cos i(\sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\alpha_2) - \right.$$

$$\left.\left. - \binom{b_i}{s}^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]}\sin i(\sigma_1\alpha_1 + \sigma_2\alpha_2)\right]\right\}.$$

Vzhledem k (14) a (15) jest

$$(30)\quad \binom{a_i}{p^2 s} = \frac{1}{p^2}\left[\binom{a_i}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} A^{[\sigma_1\alpha_1]} + \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} A^{[\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_1=1,\sigma_2=1}^{p-1} A^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]}\right].$$

Podobně dostaneme

$$(31)\quad \binom{b_i}{p^2 s} = \frac{1}{p^2}\left[\binom{b_i}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} B^{[\sigma_1\alpha_1]} + \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} B^{[\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_1=1,\sigma_2=1}^{p-1} B^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]}\right].$$

Předpokládejme, že vztahy

$$(32)\quad \binom{a_i}{p^n s} = \frac{1}{p^n}\left[\binom{a_i}{s} + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)_n}\sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]}\right],$$

$$\binom{b_i}{p^n s} = \frac{1}{p^n}\left[\binom{b_i}{s} + \sum_{\nu=1}^{n}\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)_n}\sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} B^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]}\right],$$

platí pro $n = m$, a dokážeme, že potom platí i pro $n = m + 1$. Ve vztazích (32) značí symbol

$$\sum_{(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu)_n} a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu},$$

kde

$$a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu} = \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]},$$

součet hodnot $a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu}$, kde skupinu indexů $\lambda_1, \ldots, \lambda_\nu$, necháme probíhati množinu všech $\binom{n}{\nu}$ $\nu$-tic utvořených z čísel $1, 2, \ldots, n$; tedy celkem součet $\binom{n}{\nu}$ členů. Symbol

$$\sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} b_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}},$$

kde

$$b_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}} = A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]},$$

značí součet hodnot $b_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}}$, kde indexy $\sigma_{\lambda_1}, \ldots, \sigma_{\lambda_\nu}$ nabývají nezávisle hodnot $1, 2, \ldots, (p-1)$, tedy celkem součet $(p-1)^\nu$ členů.

Jako dříve položme

$$\alpha_1 = \frac{2\pi}{ps}, \quad \alpha_2 = \frac{2\pi}{p^2 s}, \ldots, \alpha_\nu = \frac{2\pi}{p^\nu s}.$$

Z (28) a (32) pak dostáváme

$$(33) \quad \binom{a_i}{p^{m+1}s} = \frac{1}{p}\binom{a_i}{p^m s} + \frac{1}{p^{m+1}} \sum_{\sigma_{m+1}=1}^{p-1} \Bigg[ \binom{a_i}{s}^{[\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} \cos i\sigma_{m+1}\alpha_{m+1} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_m} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]+[\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} \cos i\sigma_{m+1}\alpha_{m+1} -$$

$$- \binom{b_i}{s}^{[\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} \sin i\sigma_{m+1}\alpha_{m+1} -$$

$$- \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_m} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} B^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]+[\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} \sin i\sigma_{m+1}\alpha_{m+1} \Bigg].$$

S přihlédnutím k (15) můžeme psáti

$$(34) \quad \binom{a_i}{p^{m+1}s} = \frac{1}{p^{m+1}} \Bigg[ \binom{a_i}{s} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_m} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]} + \sum_{\sigma_{m+1}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} +$$

$$+ \sum_{\sigma_{m+1}=1}^{p-1} \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_m} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}+\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} \Bigg].$$

Ježto

$$\sum_{\nu_{m+1}=1}^{p-1} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}+\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} =$$

$$= \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu},\sigma_{m+1}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}+\sigma_{m+1}\alpha_{m+1}]} = a_{\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_\nu,\lambda_{m+1}},$$

a

$$a_{m+1} + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_m} a_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu} + \sum_{\nu=1}^{m} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_m} a_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu,\lambda_{m+1}} =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_{m+1}} a_{\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu},$$

přejde (34) v

$$(35) \quad \binom{a_i}{p^{m+1}s} = \frac{1}{p^{m+1}} \Bigg[ \binom{a_i}{s} + \sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_{m+1}} \sum_{\sigma\lambda_1,\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} A^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]} \Bigg].$$

Stejně dostaneme

$$(36)\qquad \binom{b_i}{p^{m+1}s} = \frac{1}{p^{m+1}}\left[\binom{b_i}{s} + \sum_{\nu=1}^{m+1} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_{m+1}} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} B^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]}\right].$$

Z (32), (35) a (36) vidíme, že platnost vztahů (32) pro $n = m$ implikuje jejich platnost i pro $n = m + 1$. Položíme-li v (32) $n = 1$, dostaneme vztahy ($26_1$) a ($26_1$b). Odtud plyne, že (32) platí pro $n = 1$, tedy také pro $n = 2$, $n = 3$, atd., platí tedy obecně pro $n \geqq 1$. Pomocí označení (14) přejdou vztahy (32) v

$$(32a)\qquad \binom{a_i}{p^n s} = \frac{1}{p^n}\left\{\binom{a_i}{s} + \right.$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_n} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} \left[\binom{a_i}{s}^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]} \cos i(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1} + \ldots + \sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}) - \right.$$

$$\left.\left. - \binom{b_i}{s}^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]} \sin i(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1} + \ldots + \sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu})\right]\right\},$$

$$\binom{b_i}{p^n s} = \frac{1}{p^n}\left\{\binom{b_i}{s} + \right.$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} \sum_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_\nu)_n} \sum_{\sigma_{\lambda_1},\ldots,\sigma_{\lambda_\nu}=1}^{p-1} \left[\binom{b_i}{s}^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]} \cos i(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1} + \ldots + \sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}) + \right.$$

$$\left.\left. + \binom{a_i}{s}^{[\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1}+\ldots+\sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu}]} \sin i(\sigma_{\lambda_1}\alpha_{\lambda_1} + \ldots + \sigma_{\lambda_\nu}\alpha_{\lambda_\nu})\right]\right\}.$$

Pro $n = 3$ dostaneme z (32)

$$(32b)\qquad \binom{a_i}{p^3 s} = \frac{1}{p^3}\left[\binom{a_i}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} A^{[\sigma_1\alpha_1]} + \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} A^{[\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_3=1}^{p-1} A^{[\sigma_3\alpha_3]} + \right.$$

$$+ \sum_{\sigma_1,\sigma_2=1}^{p-1} A^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_2,\sigma_3=1}^{p-1} A^{[\sigma_2\alpha_2+\sigma_3\alpha_3]} + \sum_{\sigma_3,\sigma_1=1}^{p-1} A^{[\sigma_3\alpha_3+\sigma_1\alpha_1]} +$$

$$\left. + \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=1}^{p-1} A^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2+\sigma_3\alpha_3]}\right];$$

$$\binom{b_i}{p^3 s} = \frac{1}{p^3}\left[\binom{b_i}{s} + \sum_{\sigma_1=1}^{p-1} B^{[\sigma_1\alpha_1]} + \sum_{\sigma_2=1}^{p-1} B^{[\sigma_2\alpha_2]} + \sum_{\sigma_3=1}^{p-1} B^{[\sigma_3\alpha_3]} + \sum_{\sigma_1,\sigma_2=1}^{p-1} B^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2]} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\sigma_2,\sigma_3=1}^{p-1} B^{[\sigma_2\alpha_2+\sigma_3\alpha_3]} + \sum_{\sigma_3,\sigma_1=1}^{p-1} B^{[\sigma_3\alpha_3+\sigma_1\alpha_1]} + \sum_{\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3=1}^{p-1} B^{[\sigma_1\alpha_1+\sigma_2\alpha_2+\sigma_3\alpha_3]}\right].$$

Podobným způsobem odvodíme výraz pro $\binom{a_0}{p^n s}$ vycházejíce ze vztahu (29), bude to

$$(37)\qquad \binom{a_0}{p^n s} = \frac{1}{p}\left[\binom{a_0}{p^{n-1}s} + \sum_{\sigma=1}^{p-1} \binom{a_0}{p^{n-1}s}^{[\sigma\alpha_n]}\right].$$

Z (22) pak plyne

$$\alpha_\lambda = \frac{2\pi}{p^\lambda s}; \quad \alpha_\mu = \frac{2\pi}{p^\mu s}; \quad \alpha^\lambda = p^{\mu-\lambda}\alpha^\mu, \quad (\lambda < \mu). \tag{38}$$

Pomocí tohoto vztahu lze vyjádřit hodnoty $\alpha_{\lambda_1}, \ldots, \alpha_{\lambda_\phi}$ v (32) jako funkce nejmenší z nich, tj. té, která má největší index.

Na základě vzorců (32) můžeme získati přibližné hodnoty koeficientů $\begin{pmatrix} a_i \\ p^n s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_i \\ p^n s \end{pmatrix}$ odpovídajících dělení periody na $p^n s$ úseků, známe-li hodnoty koeficientů $\begin{pmatrix} a_i \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_i \\ s \end{pmatrix}$ odpovídajících dělení periody na $s$ úseků, počínajíc od různých počátečních bodů na ose $u$.

Naše metoda přibližného určování koeficientů Fourierova rozvoje přináší ve srovnání s ostatními známými metodami následující výhody:

a) Použití známých výpočtových schémat pro přibližné hodnoty koeficientů Fourierovy řady (RUNGE, ZIPPERER) vyžaduje velmi pracných výpočtů, požadujeme-li větší přesnost hodnot koeficientů, kdy musíme rozdělit periodu na velký počet stejných úseků.

Použitím vztahů (32) lze se značnou přesností odvoditi hodnoty koeficientů Fourierovy řady, známe-li přibližné hodnoty získané snadno a rychle pomocí známých metod (Runge, Zipperer) při menším počtu úseků, na něž dělíme základní periodu.

Vzorce (32) a (37) dovolují odvodit přibližné hodnoty koeficientů Fourierovy řady pro mnohem širší stupnici hodnot počtu úseků, na něž je dělena perioda, než to dovolovaly dosud známé metody. V důsledku toho umožňují tyto vzorce určiti přibližné hodnoty koeficientů Fourierovy řady s libovolným stupněm přiblížení.

Čím větší je počet stejných úseků $p^n s$, tím přesnější jsou hodnoty koeficientů $\begin{pmatrix} a_0 \\ p^n s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_i \\ p^n s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_i \\ p^n s \end{pmatrix}$ získané pomocí vzorců (32) a (37). Počet úseků roste rychle s $p$ i s $n$, takže přesnost hodnot koeficientů Fourierovy řady získaných ze vzorců (32) a (37) rovněž rychle vzrůstá.

## NUMERICKÉ PŘÍKLADY

Ukážeme si nyní na dvou numerických příkladech, jak je třeba postupovati při používání vzorců (32) a (37).

**1.** Budiž $p = 2$, $n = 3$. Podle vzorce (37) můžeme psáti

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ 2^3 s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a_0 \\ 2^2 s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 2^2 s \end{pmatrix}^{[\alpha_3]}\right].$$

Pro $p = 2$, $n = 2$ jest

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ 2^2 s \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} a_0 \\ 2s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 2s \end{pmatrix}^{[\alpha_2]}\right]$$

a pro $p = 2, n = 1$

$$\binom{a_0}{2s} = \frac{1}{2}\left[\binom{a_0}{s} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1]}\right].$$

Odtud

$$\binom{a_0}{2^2 s} = \frac{1}{2^2}\left[\binom{a_0}{s} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]}\right]$$

a

$$(39) \quad \binom{a_0}{2^3 s} = \frac{1}{2^3}\left[\binom{a_0}{s} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_3]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} + \right.$$
$$\left. + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_3+\alpha_1]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]}\right].$$

Pro $p = 2, n = 3$ můžeme psáti podle vzorců (32) nebo (32a)

$$(40) \quad \binom{a_i}{2^3 s} = \frac{1}{2^3}\left[\binom{a_i}{s} + A^{[\alpha_1]} + A^{[\alpha_2]} + A^{[\alpha_3]} + A^{[\alpha_1+\alpha_2]} + A^{[\alpha_2+\alpha_3]} + \right.$$
$$\left. + A^{[\alpha_3+\alpha_1]} + A^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]}\right];$$

$$\binom{b_i}{2^3 s} = \frac{1}{2^3}\left[\binom{b_i}{s} + B^{[\alpha_1]} + B^{[\alpha_2]} + B^{[\alpha_3]} + B^{[\alpha_1+\alpha_2]} + B^{[\alpha_2+\alpha_3]} + \right.$$
$$\left. + B^{[\alpha_3+\alpha_1]} + B^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]}\right].$$

Pro $h = 1$ dostaneme ze vzorců (14)

$$(41) \quad A^{[\alpha_q]} = \binom{a_i}{s}^{[\alpha_q]} \cos i\alpha_q - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_q]} \sin i\alpha_q ;$$

$$B^{[\alpha_q]} = \binom{b_i}{s}^{[\alpha_q]} \cos i\alpha_q + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_q]} \sin i\alpha_q .$$

Ze vztahů (40) a (41) pak plyne

$$(42) \quad \binom{a_i}{2^3 s} = \frac{1}{2^3}\left[\binom{a_i}{s} + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1]} \cos i\alpha_1 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1]} \sin i\alpha_1 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2]} \cos i\alpha_2 - \right.$$
$$- \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2]} \sin i\alpha_2 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3]} \cos i\alpha_3 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3]} \sin i\alpha_3 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2) -$$
$$- \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} \cos i(\alpha_2 + \alpha_3) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} \sin i(\alpha_2 + \alpha_3) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_1]} \cos i(\alpha_3 + \alpha_1) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_1]} \sin i(\alpha_3 + \alpha_1) +$$
$$\left. + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\right],$$

$$(42a)\quad \binom{b_i}{2^3 s} = \frac{1}{2^3}\left[\binom{b_i}{s} + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1]} \cos i\alpha_1 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1]} \sin i\alpha_1 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2]} \cos i\alpha_2 + \right.$$

$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2]} \sin i\alpha_2 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3]} \cos i\alpha_3 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3]} \sin i\alpha_3 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2) +$$

$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} \cos i(\alpha_2 + \alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} \sin i(\alpha_2 + \alpha_3) +$$

$$+ \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_1]} \cos i(\alpha_3 + \alpha_1) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_1]} \sin i(\alpha_3 + \alpha_1) +$$

$$\left. + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)\right].$$

Budiž $s = 12$ počet stejných úseků, na něž byla perioda původně rozdělena. Pro $p = 2$; $s = 12$; $\lambda = 1, 2, 3$, dostaneme z (38)

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{12},\ \alpha_2 = \frac{\pi}{24},\ \alpha_3 = \frac{\pi}{48},\ \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{8},$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = \frac{\pi}{16},\ \alpha_3 + \alpha_1 = \frac{5\pi}{48},\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{7\pi}{48}.$$

Dosadíme-li tyto numerické hodnoty do vzorců (39), (42) a (42a), bude

$$(43)\quad \binom{a_0}{96} = \frac{1}{8}\left[\binom{a_0}{12} + \binom{a_0}{12}^{[\pi/12]} + \binom{a_0}{12}^{[\pi/24]} + \binom{a_0}{12}^{[\pi/48]} + \binom{a_0}{12}^{[\pi/8]} + \right.$$

$$\left. + \binom{a_0}{12}^{[\pi/16]} + \binom{a_0}{12}^{[5\pi/48]} + \binom{a_0}{12}^{[7\pi/48]}\right],$$

$$(44)\quad \binom{a_i}{96} = \frac{1}{8}\left[\binom{a_i}{12} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/12]} \cos i\frac{\pi}{12} - \binom{b_i}{12}^{[\pi/12]} \sin i\frac{\pi}{12} + \right.$$

$$+ \binom{a_i}{12}^{[\pi/24]} \cos i\frac{\pi}{24} - \binom{b_i}{12}^{[\pi/24]} \sin i\frac{\pi}{24} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/48]} \cos i\frac{\pi}{48} -$$

$$- \binom{b_i}{12}^{[\pi/48]} \sin i\frac{\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/8]} \cos i\frac{\pi}{8} - \binom{b_i}{12}^{[\pi/8]} \sin i\frac{\pi}{8} +$$

$$+ \binom{a_i}{12}^{[\pi/16]} \cos i\frac{\pi}{16} - \binom{b_i}{12}^{[\pi/16]} \sin i\frac{\pi}{16} + \binom{a_i}{12}^{[5\pi/48]} \cos i\frac{5\pi}{48} -$$

$$\left. - \binom{b_i}{12}^{[5\pi/48]} \sin i\frac{5\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{[7\pi/48]} \cos i\frac{7\pi}{48} - \binom{b_i}{12}^{[7\pi/48]} \sin i\frac{7\pi}{48}\right],$$

$$(45)\quad \binom{b_i}{96} = \frac{1}{8}\Bigg[\binom{b_i}{12} + \binom{b_i}{12}^{[\pi/12]} \cos i\frac{\pi}{12} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/12]} \sin i\frac{\pi}{12} +$$

$$+ \binom{b_i}{12}^{[\pi/24]} \cos i\frac{\pi}{24} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/24]} \sin i\frac{\pi}{24} + \binom{b_i}{12}^{[\pi/48]} \cos i\frac{\pi}{48} +$$

$$+ \binom{a_i}{12}^{[\pi/48]} \sin i\frac{\pi}{48} + \binom{b_i}{12}^{[\pi/8]} \cos i\frac{\pi}{8} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/8]} \sin i\frac{\pi}{8} +$$

$$+ \binom{b_i}{12}^{[\pi/16]} \cos i\frac{\pi}{16} + \binom{a_i}{12}^{[\pi/16]} \sin i\frac{\pi}{16} + \binom{b_i}{12}^{[5\pi/48]} \cos i\frac{5\pi}{48} +$$

$$+ \binom{a_i}{12}^{[5\pi/48]} \sin i\frac{5\pi}{48} + \binom{b_i}{12}^{[7\pi/48]} \cos i\frac{7\pi}{48} + \binom{a_i}{12}^{[7\pi/48]} \sin i\frac{7\pi}{48}\Bigg].$$

Pomocí Zippererovy šablony nebo Rungeových tabulek spočítáme hodnoty koeficientů $\binom{a_0}{12}, \binom{a_i}{12}, \binom{b_i}{12}$, pro libovolnou hodnotu $i = 1, 2, \ldots$, při pevně zvoleném počátku periody $(0, 2\pi)$ dané periodické funkce a potom počítáme – rovněž Zippererovou metodou – hodnoty týchž koeficientů, avšak s intervalem $(0, 2\pi)$ posunutým postupně o $\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{24}, \frac{\pi}{48}; \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{5\pi}{48}, \frac{7\pi}{48}$ po ose úseček. Tyto koeficienty byly v předcházejících formulích označeny symboly

$$(46)\quad \binom{a_0}{12}^{[\pi/12]}, \binom{a_0}{12}^{[\pi/24]}, \binom{a_0}{12}^{[\pi/48]}, \binom{a_0}{12}^{\pi/8]}, \binom{a_0}{12}^{[\pi/16]}, \binom{a_0}{12}^{[5\pi/48]},$$

$$\binom{a_0}{12}^{[7\pi/48]}, \binom{a_i}{12}^{[\pi/12]}, \binom{a_i}{12}^{[\pi/24]}, \binom{a_i}{12}^{[\pi/48]}, \binom{a_i}{12}^{[\pi/8]}, \binom{a_i}{12}^{[\pi/16]},$$

$$\binom{a_i}{12}^{[5\pi/48]}, \binom{a_i}{12}^{[7\pi/48]}; \binom{b_i}{12}^{[\pi/12]}, \binom{b_i}{12}^{[\pi/24]}, \binom{b_i}{12}^{[\pi/48]}, \binom{b_i}{12}^{[\pi/8]},$$

$$\binom{b_i}{12}^{[\pi/16]}, \binom{b_i}{12}^{[5\pi/48]}, \binom{b_i}{12}^{[7\pi/48]}.$$

Tyto hodnoty jsou velmi přibližné, neboť byly určeny při dělení periody na poměrně malý počet úseků, totiž 12. V důsledku toho byl však právě výpočet celkem snadný. Dosazením takto získaných hodnot (46) do vzorců (43), (44) a (45) dostaneme velmi přesné hodnoty koeficientů téhož řádu $i$, označených $\binom{a_0}{96}, \binom{a_i}{96}, \binom{b_i}{96}$, odpovídajících dělení periody na velký počet $p^n s = 96$ úseků.

**2.** Budiž $p = 2$, $n = 4$. Z (37) dostáváme

$$(47)\quad \binom{a_0}{2^4 s} = \frac{1}{2^4}\Bigg[\binom{a_0}{s} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_3]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2+\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_3+\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]} + \binom{a_0}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]}\Bigg].$$

Z (32) pak plyne

$$(48)\quad \binom{a_i}{2^4 s} = \frac{1}{2^4}\Bigg[\binom{a_i}{s} + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1]} \cos i\alpha_1 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1]} \sin i\alpha_1 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2]} \cos i\alpha_2 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2]} \sin i\alpha_2 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3]} \cos i\alpha_3 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3]} \sin i\alpha_3 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_4]} \cos i\alpha_4 - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_4]} \sin i\alpha_4 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_3) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_4]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_4]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} \cos i(\alpha_2 + \alpha_3) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]} \sin i(\alpha_2 + \alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_4]} \cos i(\alpha_2 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_4]} \sin i(\alpha_2 + \alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_4]} \cos i(\alpha_3 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_4]} \sin i(\alpha_3 + \alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]} \cos i(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]} \sin i(\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]} \cos i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) - \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]} \sin i(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)\Bigg].$$

$$(49)\quad \binom{b_i}{2^4 s} = \frac{1}{2^4}\Bigg[\binom{b_i}{s} + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1]}\cos i\alpha_1 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1]}\sin i\alpha_1 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2]}\cos i\alpha_2 +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2]}\sin i\alpha_2 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3]}\cos i\alpha_3 + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3]}\sin i\alpha_3 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_4]}\cos i\alpha_4 +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_4]}\sin i\alpha_4 + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]}\cos i(\alpha_1+\alpha_2) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2]}\sin i(\alpha_1+\alpha_2) +$$
$$+ \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3]}\cos i(\alpha_1+\alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3]}\sin i(\alpha_1+\alpha_3) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_4]}\cos i(\alpha_1+\alpha_4) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_4]}\sin i(\alpha_1+\alpha_4) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]}\cos i(\alpha_2+\alpha_3) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3]}\sin i(\alpha_2+\alpha_3) +$$
$$+ \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_4]}\cos i(\alpha_2+\alpha_4) + \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_4]}\sin i(\alpha_2+\alpha_4) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_4]}\cos i(\alpha_3+\alpha_4) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_3+\alpha_4]}\sin i(\alpha_3+\alpha_4) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]}\cos i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3]}\sin i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4]}\cos i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4]}\sin i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4]}\cos i(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4]}\sin i(\alpha_1+\alpha_3+\alpha_4) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]}\cos i(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]}\sin i(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) + \binom{b_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]}\cos i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4) +$$
$$+ \binom{a_i}{s}^{[\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4]}\sin i(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)\Bigg].$$

Budiž $s = 8$. Z (38) máme pro $p = 2$, $s = 8$, $\lambda = 1, 2, 3, 4$

$$\alpha_1 = \frac{\pi}{8},\ \alpha_2 = \frac{\pi}{16},\ \alpha_3 = \frac{\pi}{32},\ \alpha_4 = \frac{\pi}{64},\ \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{3\pi}{16},\ \alpha_1 + \alpha_3 = \frac{5\pi}{32},$$
$$\alpha_1 + \alpha_4 = \frac{9\pi}{64},\ \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{3\pi}{32},\ \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{5\pi}{64},\ \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{3\pi}{64},$$
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \frac{7\pi}{32},\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 = \frac{13\pi}{64},\ \alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{11\pi}{64},$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{7\pi}{64},\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = \frac{15\pi}{64}.$$

Dosazením těchto numerických hodnot do vzorců (47), (48) a (49) dostaneme

$$
\begin{aligned}
(50)\quad \begin{pmatrix} a_0 \\ 128 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\Bigg[ & \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/8]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/16]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/32]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/64]} + \\
& + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/16]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[5\pi/32]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[9\pi/64]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/32]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[5\pi/64]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/64]} + \\
& + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[7\pi/32]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[13\pi/64]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[11\pi/64]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[7\pi/64]} + \begin{pmatrix} a_0 \\ 8 \end{pmatrix}^{[15\pi/64]} \Bigg];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(51)\quad \begin{pmatrix} a_i \\ 128 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\Bigg[ & \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/8]} \cos i\frac{\pi}{8} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/8]} \sin i\frac{\pi}{8} + \\
& + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/16]} \cos i\frac{\pi}{16} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/16]} \sin i\frac{\pi}{16} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/32]} \cos i\frac{\pi}{32} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/32]} \sin i\frac{\pi}{32} + \\
& + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/64]} \cos i\frac{\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/64]} \sin i\frac{\pi}{64} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/16]} \cos i\frac{3\pi}{16} - \\
& - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/16]} \sin i\frac{3\pi}{16} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[5\pi/32]} \cos i\frac{5\pi}{32} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[5\pi/32]} \sin i\frac{5\pi}{32} + \\
& + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[9\pi/64]} \cos i\frac{9\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[9\pi/64]} \sin i\frac{9\pi}{64} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/32]} \cos i\frac{3\pi}{32} - \\
& - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/32]} \sin i\frac{3\pi}{32} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[5\pi/64]} \cos i\frac{5\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[5\pi/64]} \sin i\frac{5\pi}{64} + \\
& + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/64]} \cos i\frac{3\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/64]} \sin i\frac{3\pi}{64} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[7\pi/32]} \cos i\frac{7\pi}{32} - \\
& - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[7\pi/32]} \sin i\frac{7\pi}{32} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[13\pi/64]} \cos i\frac{13\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[13\pi/64]} \sin i\frac{13\pi}{64} + \\
& + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[11\pi/64]} \cos i\frac{11\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[11\pi/64]} \sin i\frac{11\pi}{64} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[7\pi/64]} \cos i\frac{7\pi}{64} - \\
& - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[7\pi/64]} \sin i\frac{7\pi}{64} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[15\pi/64]} \cos i\frac{15\pi}{64} - \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[15\pi/64]} \sin i\frac{15\pi}{64} \Bigg],
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(52)\quad \begin{pmatrix} b_i \\ 128 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\Bigg[ & \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/8]} \cos i\frac{\pi}{8} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/8]} \sin i\frac{\pi}{8} + \\
& + \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/16]} \cos i\frac{\pi}{16} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/16]} \sin i\frac{\pi}{16} + \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/32]} \cos i\frac{\pi}{32} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/32]} \sin i\frac{\pi}{32} + \\
& + \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/64]} \cos i\frac{\pi}{64} + \begin{pmatrix} a_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[\pi/64]} \sin i\frac{\pi}{64} + \begin{pmatrix} b_i \\ 8 \end{pmatrix}^{[3\pi/16]} \cos i\frac{3\pi}{16} +
\end{aligned}
$$

$$+\binom{a_i}{8}^{[3\pi/16]}\sin i\frac{3\pi}{16}+\binom{b_i}{8}^{[5\pi/32]}\cos i\frac{5\pi}{32}+\binom{a_i}{8}^{[5\pi/32]}\sin i\frac{5\pi}{32}+$$
$$+\binom{b_i}{8}^{[9\pi/64]}\cos i\frac{9\pi}{64}+\binom{a_i}{8}^{[9\pi/64]}\sin i\frac{9\pi}{64}+\binom{b_i}{8}^{[3\pi/32]}\cos i\frac{3\pi}{32}+$$
$$+\binom{a_i}{8}^{[3\pi/32]}\sin i\frac{3\pi}{32}+\binom{b_i}{8}^{[5\pi/64]}\cos i\frac{5\pi}{64}+\binom{a_i}{8}^{[5\pi/64]}\sin i\frac{5\pi}{64}+$$
$$+\binom{b_i}{8}^{[3\pi/64]}\cos i\frac{3\pi}{64}+\binom{a_i}{8}^{[3\pi/64]}\sin i\frac{3\pi}{64}+\binom{b_i}{8}^{[7\pi/32]}\cos i\frac{7\pi}{32}+$$
$$+\binom{a_i}{8}^{[7\pi/32]}\sin i\frac{7\pi}{32}+\binom{b_i}{8}^{[13\pi/64]}\cos i\frac{13\pi}{64}+\binom{a_i}{8}^{[13\pi/64]}\sin i\frac{13\pi}{64}+$$
$$+\binom{b_i}{8}^{[11\pi/64]}\cos i\frac{11\pi}{64}+\binom{a_i}{8}^{[11\pi/64]}\sin i\frac{11\pi}{64}+\binom{b_i}{8}^{[7\pi/64]}\cos i\frac{7\pi}{64}+$$
$$\left.+\binom{a_i}{8}^{[7\pi/64]}\sin i\frac{7\pi}{64}+\binom{b_i}{8}^{[15\pi/64]}\cos i\frac{15\pi}{64}+\binom{a_i}{8}^{[15\pi/64]}\sin i\frac{15\pi}{64}\right].$$

Zippererovou metodou vypočítáme hodnoty koeficientů

$$\binom{a_0}{8},\binom{a_0}{8}^{[\pi/8]},\binom{a_0}{8}^{[\pi/16]},\binom{a_0}{8}^{[\pi/32]},\binom{a_0}{8}^{[\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[3\pi/16]},\binom{a_0}{8}^{[5\pi/32]},$$
$$\binom{a_0}{8}^{[9\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[3\pi/32]},\binom{a_0}{8}^{[5\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[3\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[7\pi/32]},$$
$$\binom{a_0}{8}^{[13\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[11\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[7\pi/64]},\binom{a_0}{8}^{[15\pi/64]};$$

$$\binom{a_i}{8},\binom{a_i}{8}^{[\pi/8]},\binom{a_i}{8}^{[\pi/16]},\binom{a_i}{8}^{[\pi/32]},\binom{a_i}{8}^{[\pi/64]},\binom{a_i}{8}^{[3\pi/16]},\binom{a_i}{8}^{[5\pi/32]},\binom{a_i}{8}^{[9\pi/64]},$$
$$\binom{a_i}{8}^{[3\pi/32]},\binom{a_i}{8}^{[5\pi/64]},\binom{a_i}{8}^{[3\pi/64]},\binom{a_i}{8}^{[7\pi/32]},\binom{a_i}{8}^{[13\pi/64]},\binom{a_i}{8}^{[11\pi/64]},$$
$$\left.\binom{a_i}{8}^{[7\pi/64]},\binom{a_i}{8}^{[15\pi/64]}\right];$$

$$\binom{b_i}{8},\binom{b_i}{8}^{[\pi/8]},\binom{b_i}{8}^{[\pi/16]},\binom{b_i}{8}^{[\pi/32]},\binom{b_i}{8}^{[\pi/64]},\binom{b_i}{8}^{[3\pi/16]},\binom{b_i}{8}^{[5\pi/32]},$$
$$\binom{b_i}{8}^{[9\pi/64]},\binom{b_i}{8}^{[3\pi/32]},\binom{b_i}{8}^{[5\pi/64]},\binom{b_i}{8}^{[3\pi/64]},\binom{b_i}{8}^{[7\pi/32]},\binom{b_i}{8}^{[13\pi/64]},$$
$$\binom{b_i}{8}^{[11\pi/64]},\binom{b_i}{8}^{[7\pi/64]},\binom{b_i}{8}^{[15\pi/64]},$$

odpovídající dělení periody na 8 stejných úseků, přičemž počátek periody je postupně v bodech

$$0, \frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{16}, \frac{\pi}{32}, \frac{\pi}{64}, \frac{3\pi}{16}, \frac{5\pi}{32}, \frac{9\pi}{64}, \frac{3\pi}{32}, \frac{5\pi}{64}, \frac{3\pi}{64}, \frac{7\pi}{32}, \frac{13\pi}{64}, \frac{11\pi}{64}, \frac{7\pi}{64}, \frac{15\pi}{64}.$$

Tyto hodnoty lze počítati celkem snadno, neboť počet úseků $s = 8$ není velký. Dostaneme tak velmi přibližné hodnoty koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$. Jejich dosazením do vzorců (50), (51) a (52) dostaneme velmi přesné hodnoty koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$, odpovídajících dělení periody na velký počet $p^n s = 128$ úseků.

Pro určování koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$ Fourierova rozvoje periodické funkce pomocí vzorců (32) a (37) je tedy možno doporučiti následující metodu:

Zvolíme $s$ tj. počet úseků, na něž rozdělíme periodu dané funkce, a to tak, abychom mohli snadno vypočísti velmi přibližné hodnoty koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$ buď Zippererovým schématem nebo s Rungeovými tabulkami.

Zvolíme čísla $p$ a $n$ tak, abychom dostali potřebné číslo $p^n s$, a pak vyčíslíme výrazy pro $\left(\frac{a_0}{p^n s}\right)$, $\left(\frac{a_i}{p^n s}\right)$, $\left(\frac{b_i}{p^n s}\right)$ udané vzorci (37) a (32).

Pro dané $s$ a $p$ vypočítáme hodnoty $\alpha_\lambda$ udané vzorcem (38).

Pro dané $s$ vypočítáme hodnoty koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$ odpovídající dělení periody na $s$ úseků, při čemž periodu posouváme po ose úseček postupně o hodnoty vyplývající ze vzorce (38) pro $\alpha_\lambda$.

Takto určené hodnoty koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$ a $\alpha_\lambda$ dosadíme do výrazů pro $\left(\frac{a_0}{p^n s}\right)$, $\left(\frac{a_i}{p^n s}\right)$, $\left(\frac{b_i}{p^n s}\right)$ podle vzorců (37) a (32). Dostaneme tak velmi přesné hodnoty koeficientů $a_0$, $a_i$, $b_i$, odpovídajících dělení periody na $p^n s$ úseků.

Tento postup lze aplikovati při libovolném $i = 1, 2, \ldots$.

*Literatura*

[1] *G. Scotto Lavina:* Sul calcolo dei coefficienti approximatti nell' analisi armonica delle funzioni peridioche; Revista di Ingegneria, Nr. 10, 1952.

[2] *L. Zipperer:* Technische Schwingungslehre; Verlag de Gruyter, Berlin, Sammlung Göschen Nr. 953, 1953.

[3] *L. Zipperer:* Torsionschwingungen in Maschinenanlagen; Verlag De Gruyter, Berlin, Sammlung Göschen Nr. 961, 961a, 1955.

## Резюме

# ПРИБЛИЖЕННОЕ ВЫЧИСЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ РЯДА ФУРЬЕ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ

АНДРЕЙ РИПИАНУ (André Ripianu)

Гармонический анализ периодических функций имеет большое значение для техники, особенно для техники колебаний.

Установить точные значения коэффициентов разложения в ряд Фурье возможно только тогда, когда периодическую функцию можно представить аналитически в виде $y = f(x)$.

В большинстве случаев технической практики такое представление не возможно. Поэтому установление коэффициентов производится приближенно путем разделения периода на определенное число одинаковых частей и применением некоторого из известных методов.

При применении метода Ципперера период делится на 24 равных частей.

Погрешность полученного значени коэффициента тем больше, чем высше порядок гармонической. Она может быть понижена путем увеличения числа частей, на которые разделен период. С возрастающим числом частей погрешность быстро уменьшается.

В статье выведены соотношения (32) и (37) для установления значений коэффициентов ряда Фурье при делении периода на $p^n s$ равных частей в зависимости от значений коэффициентов, полученных при делении периода на $s$ равных частей. Эти соотношения позволяют производить вычисления методом Ципперера с меньшей погрешностью, чем при непосредственном применении схемы Ципперера.

С этой целью вводятся значения коэффициентов, полученные при помощи вычислительной схемы Ципперера в уравнениях (32) и (37), и устанавливаются значения коэффициентов ряда Фурье, соответствующие числу $p^n s = 24 p^n$ равных частей периода.



## Résumé

# LE CALCUL APPROXIMATIF DEC COEFFICIENTS DE LA SÉRIE DE FOURIER D'UNE FONCTION PÉRIODIQUE

ANDREI RIPIANU

L'analyse harmonique des fonctions périodiques présente pour la technique et spécialement pour la technique des vibrations une importance très grande.

La détermination des valeurs exactes des coefficients qui interviennent dans le développement en série de Fourier d'une fonction périodique est seulement alors possible, lorsque la fonction périodique peut être exprimée sous une forme analytique par l'expression $y = f(x)$.

Dans la majorité des cas qui apparaissent dans la technique, une telle expression de la fonction périodique n'est pas possible.

C'est pourqoi la détermination des coefficients du développement en série de la fonction se fait d'une manière approximative, en fractionnant la période en un nombre de $s$ parties égales et en utilisant un des systèmes de calcul existant.

Dans le cas de l'utilisation du schéme de calcul de Zipperer la période se fractionne en $s = 24$ parties égales.

L'erreur qui affecte les valeurs obtenues des coefficients est d'autant plus grande que l'ordre de l'harmonique est plus grand.

Cette erreur peut être diminuée par la majoration du nombre de parties dans lesquelles on a divisé la période, l'érreur diminuant rapidement lorsque le nombre de divisions croît.

Dans le présent ouvrage, on a déduit les relations (32) et (37) qui rendent possible la détermination des valeurs des coefficients de la série de Fourier dans le cas du fractionnement de la période en $p''s$ parties égales en fonction des valeurs des coefficients obtenus dans le cas du fractionnement de la période en $s$ parties égales.

Ces relations permettent d'utiliser le schéma de calcul de Zipperer pour la détermination des valeurs des coefficients de la série de Fourier avec une erreur moindre que dans le cas du calcul direct des coefficients par le schéma de Zipperer.

A ces fins, on introduit les valeurs de coefficients obtenus à l'aide du schéma de calcul de Zipperer dans les formules (32) et (37) et l'on obtient les valeurs des coefficients de la série de Fourier correspondant à un nombre de $p''s = 24p''$ parties égales dans lesquelles on a divisé la période.