Aplikace matematiky

Alois Kufner

О зависимости решения задачи Дирихле от изменения области определения

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 4, 263–273

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102759

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1961

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

О ЗАВИСИМОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ОТ ИЗМЕНЕНИЯ ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

АЛОИС КУФНЕР (Alois Kufner)

(Поступило в редакцию 20/VI 1960 г.)

В работе исследована задача Дирихле на области, близкой кругу. Рассматриваются свойства решения в зависимости от параметра λ, которым характеризировано отклонение границы области от окружности.

1. Вопрос зависимости решения граничной задачи от изменения области определения был до сих пор сравнительно мало исследован. Известны результаты М. А. Лаврентьева [1], касающиеся вариационных принципов конформного отображения; далее занимались такими проблемами, например, В. А. Кронберг в статье [2] для задачи Неймана и за последнее время И. Бабушка в работе [3] для общих эллиптических дифференциальных операторов с точки зрения функционального анализа.

В настоящей статье исследуется задача Дирихле на звездной плоской области близкой кругу, причем отклонение границы области от окружности характеризировано значением параметра λ. Доказывается, что плотность интеграла Коши (потенциала двойного слоя), в виде которого можно представить решение задачи Дирихле, есть аналитическая (в некотором обобщенном смысле) функция переменной λ. Результаты статьи имеют значение тоже для численного решения задачи Дирихле.

2. Пусть $\{r, \varphi\}$ — полярные координаты в плоскости. Пусть Ω — ограниченная односвязная плоская область, звездная относительно начала координат, которое является внутренней точкой области Ω. Пусть граница области Ω определена положительной, периодической с периодом 2π и непрерывной вместе с первой и второй производной функцией $r = r(\varphi)$.

Определим теперь для $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ функцию

$$r_\lambda(\varphi) = 1 - \lambda f(\varphi)\,,$$

где $f(\varphi) = 1 - r(\varphi)$. Функция $r_\lambda(\varphi)$ положительна для любого $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$; потому совокупность точек плоскости, определенных полярными координатами $\{r = r_\lambda(\varphi); \varphi\}$, составляет для фиксированного λ простую замкнутую кривую с непрерывной кривизной. Обозначим эту кривую через S_λ; ее внутренность, которую обозначим через Ω_λ, есть область, звездная относительно начала координат.

Пусть теперь λ — фиксированная точка отрезка $\langle 0, 1 \rangle$; определим на кривой S_λ функцию $\tilde{F}_\lambda(\zeta)$ ($\zeta \in S_\lambda$), которая обладает непрерывной первой производной. Решим на области Ω_λ классическую задачу Дирихле с граничным условием $\tilde{F}_\lambda$, т. е. найдем функцию $\tilde{U}_\lambda(z)$ ($z = z_1 + iz_2$), которая определена и непрерывна на $\bar{\Omega}_\lambda = \Omega_\lambda + S_\lambda$, имеет на Ω_λ непрерывные вторые производные по z_1 и z_2, удовлетворяет на Ω_λ уравнению $\Delta \tilde{U}_\lambda = 0$ и достигает для $z \in S_\lambda$ значения $\tilde{F}_\lambda(z)$.

Гармоническую на Ω_λ функцию $\tilde{U}_\lambda$ будем искать в виде интеграла Коши с неизвестной плотностью $\tilde{u}_\lambda$:

$$\tilde{U}_\lambda(z) = \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{S_\lambda}\frac{\tilde{u}_\lambda(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta\right\}, \quad z \in \Omega_\lambda\,, \tag{1}$$

где $\tilde{u}_\lambda(\zeta)$ — вещественная функция, определенная на кривой S_λ. Таким образом можно задачу Дирихле свести к задаче — найти неизвестную функцию $\tilde{u}_\lambda(z)$ из интегрального уравнения

$$\tilde{u}_\lambda(z) - \frac{1}{\pi}\int_{S_\lambda}\tilde{u}_\lambda(\zeta)\,\frac{\cos(\bar{v}, \bar{r})}{r}\,\mathrm{d}\sigma = 2\tilde{F}_\lambda(z)\,, \quad z \in S_\lambda\,,$$

где $\mathrm{d}\sigma$ — элемент длины кривой S_λ, $\bar{r}$ — вектор, направленный от точки $\zeta \in S_\lambda$ к точке $z \in S_\lambda$, и $\bar{v}$ — внешняя нормаль к S_λ в точке ζ. Ввиду наших предположений о функции $r(\varphi)$ кривая S_λ обладает непрерывной кривизной и ядро $\cos(\bar{v}, \bar{r})/r$ непрерывно для всех ζ и z из S_λ (см. [4], стр. 241). Таким образом, последнее уравнение является уравнением Фредгольма и имеет одно и только одно решение для произвольного непрерывно дифференцируемого свободного члена (см. [5], стр. 137).

Ввиду наших обозначений имеем $z = r_\lambda(x)\,\mathrm{e}^{ix}$ и $\zeta = r_\lambda(y)\,\mathrm{e}^{iy}$, где $x, y \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Пишем теперь $\tilde{u}_\lambda(z) = u_\lambda(x)$, $\tilde{u}_\lambda(\zeta) = u_\lambda(y)$, $\tilde{F}_\lambda(z) = F_\lambda(x)$. Последнее уравнение можем после некоторых приспособлений писать в форме

$$u_\lambda(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\lambda, x, y)\,u_\lambda(y)\,\mathrm{d}y = 2F_\lambda(x)\,, \tag{2}$$

где

$$K(\lambda, x, y) = \tag{3}$$

$$= \frac{[1 - \lambda f(y)]^2 - [1 - \lambda f(x)]\,[1 - \lambda f(y)]\cos(x - y) - \lambda f'(y)\,[1 - \lambda f(x)]\sin(x - y)}{[1 - \lambda f(x)]^2 + [1 - \lambda f(y)]^2 - 2[1 - \lambda f(x)][1 - \lambda f(y)]\cos(x - y)}$$

$$\text{для} \quad x \neq y\,;$$

$$K(\lambda, x, x) = \frac{\lambda^2[f^2(x) + 2f'^2(x) - f(x)\,f''(x)] + \lambda[f''(x) - 2f(x)] + 1}{2\{\lambda^2[f^2(x) + f'^2(x)] - 2\lambda f(x) + 1\}}\,.$$

Очевидно, что $K(0, x, y) \equiv \frac{1}{2}$; это значит, что для $\lambda = 0$ уравнение (2) значительно упрощается, и вследствие этого функцию $u_0(x)$ можно легко найти.

Предположим теперь, что в уравнении (2) можно любое число раз дифференцировать по переменной λ; мы получили бы тогда нетрудным путем функции $[\partial^k u_\lambda/\partial\lambda^k]_{\lambda=0}$ и могли бы писать искомую функцию $u_\lambda(x)$ в виде ряда Тейлора. Это и будет нашей целью; уточним теперь предыдущие рассуждения.

3. Мы до сих пор рассматривали только такие функции $F_\lambda(x)$, которые обладали непрерывной первой производной. Теперь расширим множество граничных условий из пространства $C^{(1)}(0, 2\pi)$ на комплексное пространство $L_2(0, 2\pi)$. Уравнение (2) имеет одно и только одно решение для произвольного суммируемого с квадратом свободного члена; это решение будет также элементом пространства $L_2(0, 2\pi)$, и соответствующую функцию $\tilde{U}_\lambda(z)$, определенную формулой (1), будем называть решением обобщенной задачи Дирихле.[1])

Предшествующие утверждения, касающиеся разрешимости уравнения (2), остаются в силе для каждого фиксированного $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Покажем, что они верны тоже для некоторых комплексных значений параметра λ. Итак, пусть λ — комплексное число. О свойствах функции $K(\lambda, x, y)$ говорит

Теорема 1. *Пусть функция* $K(\lambda, x, y)$ *определена формулой* (3), *где* $f(x) = 1 - r(x)$, $x \in \langle 0, 2\pi\rangle$, $r(x)$ *непрерывна вместе с ее производными первого и второго порядков. Тогда существует плоская область* G, *содержащая в своей внутренности отрезок* $\langle 0, 1\rangle$ *и такая, что функции* $\partial^n K/\partial\lambda^n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *являются непрерывными функциями всех своих переменных в множестве* $\{\lambda \in \bar{G}; x, y \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$.

Доказательство. Делим числителя и знаменателя функции $K(\lambda, x, y)$ в (3) для $x \neq y$ на выражение $[1 - \cos(x - y)]$, и преобразованные таким образом числитель и знаменатель определим для $x = y$ при помощи значений числителя и знаменателя функции $K(\lambda, x, x)$ из (3) (т. е. их пределами для $x \to y$). Тогда будет функция $K(\lambda, x, y)$ для всех x и y частным двух многочленов в переменной λ, коэффициенты которых являются, в силу предположений о функции $r(x)$, непрерывными функциями переменных x и y. Обозначим многочлен в знаменателе через $J(\lambda, x, y)$. Частные производные функции $K(\lambda, x, y)$ по переменной λ будут опять рациональными функциями переменной λ с непрерывными по x и y коэффициентами, знаменатели которых равны степени функции $J(\lambda, x, y)$. Итак, остается доказать существование области G такой, что для $\lambda \in \bar{G}$ будет функция $J(\lambda, x, y)$ отлична от нуля для всех значений $x, y \in \langle 0, 2\pi\rangle$.

Во-первых, будем рассматривать случай $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$. Тогда функция $J(\lambda, x, y)$, очевидно, отлична от нуля, если $x \neq y$, так как в этом случае отличен от нуля знаменатель функции $K(\lambda, x, y)$ в (3). Если $x = y, f(x) = 0, f'(x) = 0$, то имеем: $J(\lambda, x, x) \equiv 2$. Если $x = y, f(x) \neq 0, f'(x) = 0$, то вещественный корень квадратного в переменной λ уравнения $J(\lambda, x, x) = 0$ имеет вид $\lambda = 1/f(x)$, т. е.

[1]) Можно показать, что это обобщенное решение совпадает например с обобщенным решением, введенным Г. Чиммино в статье [6].

или $\lambda > 1$ (если $r(x) < 1$ и, следовательно, $0 < f(x) < 1$) или $\lambda < 0$ (если $r(x) > 1$ и, следовательно, $f(x) < 0$). В остальных случаях корни функции $J(\lambda, x, x)$ — мнимые.

Итак, это значит, что функция $J(\lambda, x, y)$ отлична от нуля для всех $\lambda \in \langle 0, 1\rangle$ и $x, y \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Отсюда следует, что функция $|J(\lambda_1 + i\lambda_2, x, y)|^2$, которая является непрерывной функцией переменных λ_1, λ_2, x и y, положительна на замкнутом множестве $M = E\{\lambda_1, \lambda_2, x, y; \lambda_1 \in \langle 0, 1\rangle; \lambda_2 = 0; x, y \in \langle 0, 2\pi\rangle\}$; следовательно, она в силу непрерывности положительна также в некоторой открытой окрестности этого множества и, очевидно, существует в плоскости $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ достаточно маленькая область G такая, что упомянутая окрестность будет содержать в себе замкнутый „цилиндр" над $\bar{G}$, т. е. множество $\bar{G} \times \langle 0, 2\pi\rangle \times \langle 0, 2\pi\rangle$, причем G будет заключать в себе отрезок $\langle 0, 1\rangle$. Итак, этим теорема доказана.

О разрешимости уравнения (2) имеет затем место

Теорема 2. *В предположениях теоремы* 1 *существует область* $G_0 \subset G$, *заключающая в себе отрезок* $\langle 0, 1\rangle$ *и такая, что уравнение* (2) *имеет одно и только одно решение для каждого* $\lambda \in G_0$ *и* $F_\lambda \in L_2(0, 2\pi)$.

Доказательство. Пусть $\lambda \in G$; определим оператор $\mathbf{K}_\lambda$ формулой

$$\mathbf{K}_\lambda u = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\lambda, x, y)\, u(y)\, \mathrm{d}y\,, \quad u \in L_2(0, 2\pi)\,.$$

Пусть, далее, λ_0 — фиксированная точка отрезка $\langle 0, 1\rangle$. Уравнение (2) можно теперь писать в виде

$$(2') \qquad u_\lambda + \mathbf{K}_{\lambda_0} u_\lambda + [\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{K}_{\lambda_0}]\, u_\lambda = \varphi_\lambda \quad (\varphi_\lambda = 2F_\lambda)\,.$$

Так как для $\lambda_0 \in \langle 0, 1\rangle$ уравнение (2) разрешимо, существует ограниченный оператор $[\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\lambda_0}]^{-1}$, применением которого к уравнению (2') получим уравнение

$$(2'') \qquad u_\lambda + \mathbf{B}u_\lambda = [\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\lambda_0}]^{-1}\, \varphi_\lambda\,,$$

где $\mathbf{B} = [\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\lambda_0}]^{-1}[\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{K}_{\lambda_0}]$. В силу теоремы 1 оператор $\mathbf{K}_\lambda$ вполне непрерывен для любого $\lambda \in G$, и потому тоже $\mathbf{B}$ является вполне непрерывным оператором; таким образом, уравнение (2") является опять уравнением Фредгольма.

В силу теоремы 1 ядро $K(\lambda, x, y)$ есть аналитическая функция переменной λ в области G. Это значит, что к данному $\lambda_0 \in \langle 0, 1\rangle$ можно найти такое положительное число $R(\lambda_0)$, что для $|\lambda - \lambda_0| \leqq R(\lambda_0)$ будет

$$\|\mathbf{K}_\lambda - \mathbf{K}_{\lambda_0}\| < \frac{1}{\|[\mathbf{E} + \mathbf{K}_{\lambda_0}]^{-1}\|}$$

Но тогда $\|\mathbf{B}\| < 1$, следовательно, уравнение (2") разрешимо и имеет только одно решение для $|\lambda - \lambda_0| \leqq R(\lambda_0)$. То же самое утверждение будет верно также для уравнения $u_\lambda + \boldsymbol{K}_\lambda u_\lambda = \varphi_\lambda$, т. е. для уравнения (2), так как уравнения (2) и (2″) равносильны.

Предыдущие рассуждения можно провести для каждого $\lambda_0 \in \langle 0, 1 \rangle$; так получим покрытие отрезка $\langle 0, 1 \rangle$ окрестностями $|\lambda - \lambda_0| \leqq R(\lambda_0)$, на которых имеет уравнение (2) одно и только одно решение. Из этого покрытия можно выбрать конечное покрытие P ($P \subset G$) и в конце концов можно найти область G_0, заключающую в себе отрезок $\langle 0, 1 \rangle$ и такую, что $G_0 \subset P$. Итак, теорема 2 доказана.

4. Теперь мы будем исследовать свойства решения уравнения (2) для $\lambda \in G_0$.

Определение 1. *Пусть D — область в плоскости комплексных чисел λ. Пусть каждому $\lambda \in D$ поставлена в соответствие функция из пространства $L_2(0, 2\pi)$ — эту функцию обозначим через $f_\lambda(x)$. Мы скажем, что функция $f_\lambda(x)$ является* Н-*аналитической в области D, если для любой функции $p(x)$ из $L_2(0, 2\pi)$ соответствующая функция*

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{2\pi} f_\lambda(x)\, \overline{p(x)}\, \mathrm{d}x$$

является аналитической (в обычном смысле) функцией переменной λ в области D.

Замечание 1. Функцию $f_\lambda(x)$ можно понимать как функцию двух переменных λ и x ($\lambda \in D$, $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$). Функция, которая является Н-аналитической в области D, будет одновременно сильно дифференцируемой в D, т. е. существует функция $v_\lambda \in L_2(0, 2\pi)$ такая, что

$$\lim_{h \to 0} \left\| \frac{f_{\lambda+h} - f_\lambda}{h} - v_\lambda \right\| = 0$$

(h — комплексное и такое, чтобы $\lambda + h \in D$; см. [7], стр. 53). Функцию $v_\lambda(x)$ будем называть первой Н-производной функции $f_\lambda(x)$.

В дальнейшем будем Н-производные функции $f_\lambda(x)$ обозначать через $f_\lambda^{(1)}(x)$, $f_\lambda^{(2)}(x)$ и т. д., производные в обычном смысле обыкновенными символами $\mathrm{d}/\mathrm{d}\lambda$ или же $\partial/\partial\lambda$ и т. д. Имеет место формула (см. [7], стр. 57)

$$\int_0^{2\pi} f_\lambda^{(n)}(x)\, \overline{p(x)}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}^n \varphi}{\mathrm{d}\lambda^n}\,. \tag{4}$$

Теорема 3. *Пусть функция $F_\lambda(x)$ —* Н-*аналитическая в области G_0, введенной в теореме 2. Тогда и решение $u_\lambda(x)$ уравнения* (2) *есть функция* Н-*аналитическая в области G_0.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in G_0$ и пусть h — комплексное и такое, чтобы $\lambda + h \in G_0$. Уравнение

$$u_{\lambda+h}(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(\lambda + h, x, y)\, u_{\lambda+h}(y)\, \mathrm{d}y = 2F_{\lambda+h}(x) \tag{5}$$

имеет тогда в силу теоремы 2 одно и только одно решение. Из формул (2) и (5) получим после несложных преобразований интегральное уравнение

$$u_{\lambda,h}(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\lambda + h, x, y)\, u_{\lambda,h}(y)\, \mathrm{d}y = \Phi_{\lambda,h}(x)\,, \tag{6}$$

где

$$u_{\lambda,h}(x) = \frac{u_{\lambda+h}(x) - u_\lambda(x)}{h}\,,$$

$$\Phi_{\lambda,h}(x) = 2\,\frac{F_{\lambda+h}(x) - F_\lambda(x)}{h} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{K(\lambda + h, x, y) - K(\lambda, x, y)}{h}\, u_\lambda(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Обозначая

$$\Phi_\lambda(x) = 2F_\lambda^{(1)}(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\partial K(\lambda, x, y)}{\partial\lambda}\, u_\lambda(y)\, \mathrm{d}y\,,$$

получим затем

$$\lim_{h\to 0}\|\Phi_{\lambda,h} - \Phi_\lambda\| = 0\,,$$

так как функция $F_\lambda(x)$ есть Н-аналитическая, и в силу теоремы 1

$$\lim_{h\to 0}\int_0^{2\pi}\left|\int_0^{2\pi}\left[\frac{K(\lambda + h, x, y) - K(\lambda, x, y)}{h} - \frac{\partial K(\lambda, x, y)}{\partial\lambda}\right] u_\lambda(y)\, \mathrm{d}y\right|^2 \mathrm{d}x = 0\,.$$

Пишем уравнение (6) в форме

$$u_{\lambda,h} + \mathbf{K}_{\lambda+h} u_{\lambda,h} = \Phi_{\lambda,h} \tag{6'}$$

и рассмотрим еще уравнение

$$v_\lambda + \mathbf{K}_\lambda v_\lambda = \Phi_\lambda\,. \tag{7}$$

Ввиду свойств функции $K(\lambda, x, y)$ имеет место:

$$\|\mathbf{K}_{\lambda+h} - \mathbf{K}_\lambda\| \to 0 \quad \text{для} \quad h \to 0\,.$$

В силу теоремы 2 оператор $[\mathbf{E} + \mathbf{K}_\lambda]^{-1}$ ограничен, и его областью определения является все пространство $L_2(0, 2\pi)$; отсюда следует (см. [8], стр. 96) существование решения $v_\lambda(x)$ уравнения (7), причем для $h \to 0$

$$\|u_{\lambda,h} - v_\lambda\| \to 0$$

для любого $\lambda \in G_0$. Но это значит, что функция

$$\varphi(\lambda) = \int_0^{2\pi} u_\lambda(x)\,\overline{p(x)}\, \mathrm{d}x\,, \tag{8}$$

где $p(x)$ — произвольная фиксированная функция из $L_2(0, 2\pi)$, является аналитической функцией переменной λ в области G_0, потому что из неравенства Шварца следует, что ее разностное отношение имеет пределом функцию

$$\psi(\lambda) = \int_0^{2\pi} v_\lambda(x)\,\overline{p(x)}\, \mathrm{d}x\,.$$

Согласно определению 1 функция $u_\lambda(x)$ является Н-аналитической в области G_0 и теорема 3 доказана.

Функция $v_\lambda(x)$ — решение уравнения (7) — является первой Н-производной функции $u_\lambda(x)$, т. е. $v_\lambda(x) = u_\lambda^{(1)}(x)$. Таким образом мы показали в теореме 3, что первая Н-производная функции $u_\lambda(x)$ является решением уравнения

$$u_\lambda^{(1)}(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\lambda, x, y)\, u_\lambda^{(1)}(y)\, \mathrm{d}y = 2F_\lambda^{(1)}(x) - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\partial K(\lambda, x, y)}{\partial \lambda}\, u_\lambda(y)\, \mathrm{d}y\,.$$

Этот процесс можно аналогично применить также для нахождения дальнейших Н-производных, так что вообще мы получим n-тую Н-производную функции $u_\lambda(x)$ как решение уравнения

$$u_\lambda^{(n)}(x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(\lambda, x, y)\, u_\lambda^{(n)}(y)\, \mathrm{d}y = f_n(\lambda, x)\,, \tag{9}$$

где

$$f_n(\lambda, x) = 2F_\lambda^{(n)}(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\int_0^{2\pi} \frac{\partial^k K(\lambda, x, y)}{\partial \lambda^k}\, u_\lambda^{(n-k)}(y)\, \mathrm{d}y$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots\,; \quad u_\lambda^{(0)}(x) = u_\lambda(x))\,.$$

Замечание 2. Мы не будем здесь заниматься исследованием свойств функции $\tilde{U}_\lambda(z)$, определенной интегралом (1), как функции переменной λ. Заметим только, что можно показать, что для любого $z \in \Omega$ существует некоторая окрестность точки $\lambda = 1$ такая, что в этой окрестности $\tilde{U}_\lambda(z)$ является при фиксированном z аналитической функцией переменной λ. Диаметр этой окрестности зависит, конечно, от точки z.

5. Покажем теперь, как можно использовать Н-аналитичность функции $u_\lambda(x)$ для построения приближенного решения задачи Дирихле.

Пусть $\lambda = \omega(v)$ — конформное отображение единичного круга в плоскости комплексных чисел v на область G_0 или на ее часть, содержащую отрезок $\langle 0, 1\rangle$, и пусть $\omega(0) = 0$. Образ единичного круга в отображении ω обозначим через G_1. Так как функция $\varphi(\lambda)$, определенная формулой (8), — аналитическая в области G_1, то функция

$$\psi(v) = \varphi[\omega(v)]$$

будет аналитической функцией переменной v в единичном круге. Отсюда следует, что функция

$$w_v(x) = u_{\omega(v)}(x)$$

Н-аналитическая в единичном круге, и ввиду (4) имеют для ее Н-производных место формулы

$$w_v^{(1)}(x) = u_{\omega(v)}^{(1)}(x)\,\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}v}\,, \tag{10}$$

$$w_v^{(2)}(x) = u_{\omega(v)}^{(2)}(x)\left(\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}v}\right)^2 + u_{\omega(v)}^{(1)}(x)\,\frac{\mathrm{d}^2\omega}{\mathrm{d}v^2} \quad \text{и т. д.,}$$

т. е. функции $w_v^{(k)}(x)$ можно выразить через решения уравнений (9).

Далее, для $|v| < 1$ можно рассматривать ряд Тейлора функции $w_v(x)$, так что верно (см. [7], стр. 57)

$$\left\| \sum_{k=0}^{n} \frac{v^k}{k!} w_0^{(k)} - w_v \right\| \to 0 \quad \text{для} \quad n \to \infty .$$

В силу (10) и вследствие условия $\omega(0) = 0$ имеют место формулы

$$(10') \qquad w_0(x) = u_0(x) \; ; \quad w_0^{(1)}(x) = u_0^{(1)}(x) \left. \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}v} \right|_{v=0} \quad \text{и т. д.}$$

Но функции $u_0^{(k)}(x)$ мы сможем легко построить, потому что для $\lambda = 0$ имеют уравнения (9) простой вид

$$u_0^{(k)}(x) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_0^{(k)}(y) \, \mathrm{d}y = f_k(0, x)$$

(в силу того, что $K(0, x, y) \equiv \frac{1}{2}$), и решение последнего уравнения мы знаем:

$$u_0^{(k)}(x) = f_k(0, x) - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f_k(0, y) \, \mathrm{d}y .$$

Итак, с помощью формул (10′) мы можем выразить тоже функции $w_0^{(k)}(x)$, так что для любого $\lambda_0 \in G_1$ мы знаем приближенное выражение для решения $u_{\lambda_0}(x)$ уравнения (2):

$$(11) \qquad u_N(\lambda_0, x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{v_0^k}{k!} w_0^{(k)}(x) , \quad v_0 = \omega^{-1}(\lambda_0) ;$$

это приближенное решение сходится в среднем к точному решению.

Предыдущие рассуждения позволяют определить приближенное решение (обобщенной) задачи Дирихле: Рассмотрим опять $\lambda_0 \in \langle 0, 1 \rangle$. Формула (11) дает приближенное выражение плотности в потенциале двойного слоя (1) и тем самым также приближенное выражение решения задачи Дирихле на области Ω_{λ_0}. В частном случае для $\lambda_0 = 1$ получим таким образом приближенное решение задачи Дирихле на исходной области Ω.

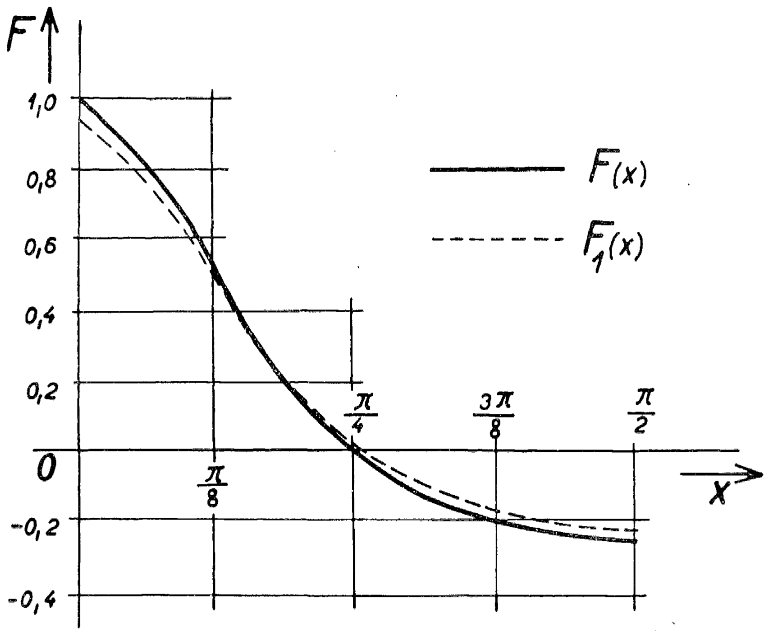
6. Вышеупомянутый процесс был применен к решению задачи Дирихле на области, ограниченной эллипсом с полуосями $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ при граничном условии

$$F(x) = \frac{2 \cos 2x}{5 - 3 \cos 2x} , \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

(при предположении, что достаточно применить тождественное конформное отображение $\omega(v) = v$). На рис. 1 приведен график значений на границе точного решения (т. е. график функции $F(x)$) и график значений на границе первого приближения — функции $F_1(x)$ (для функции $F_1(x)$ имеет место:

$$2F_1(x) = u_1(1, x) + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} K(1, x, y)\, u_1(1, y)\, \mathrm{d}y\,,$$

где $u_1(1, x)$ — функция из (11) для $N = 1$ и $\lambda_0 = 1$).



В заключение выражаю благодарность И. Нечасу *за советы и побуждение к этой работе.*

Литература

[1] *М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат*: Методы теории функций комплексного переменного. Москва 1958.

[2] *В. А. Кронберг*: О первой вариации решения задач теории потенциала при вариации граничной поверхности. Прикладная математика и механика, том XIX, 1955, 463—470.

[3] *И. Бабушка*: Устойчивость областей определения по отношению к основным задачам теории дифференциальных уравнений в частных производных, главным образом в связи с теорией упругости. Чехословацкий математический журнал, том 11 (86), 1961.

[4] *I. G. Petrovskij*: Parciální diferenciální rovnice. Praha 1952.

[5] *S. G. Michlin*: Integrální rovnice. Praha 1952.

[6] *G. Cimmino*: Nuovo tipo di condizione al contorno e nuovo metodo di trattazione per il problema generalizzato di Dirichlet. Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. LXI (1937 — XVI).

[7] *E. Hille*: Functional Analysis and Semi-Groups. American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. XXXI, 1948.

[8] *K. Maurin*: Metody przestrzeni Hilberta. Warszawa 1959.

Souhrn

O ZÁVISLOSTI ŘEŠENÍ DIRICHLETOVA PROBLÉMU NA ZMĚNĚ DEFINIČNÍ OBLASTI

Alois Kufner

V práci se vyšetřuje Dirichletův problém na hvězdovité oblasti blízké kruhu, přičemž odchylka hranice oblasti od kružnice je charakterizována hodnotou parametru λ. O oblasti se předpokládá, že má spojitou křivost.

Dirichletův problém na oblasti Ω_λ ($\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$) se převádí na řešení Fredholmovy integrální rovnice (2) pro neznámou hustotu $\tilde{u}_\lambda(\zeta)$ potenciálu dvojvrstvy (1). Rovnice (2) se pak zkoumá pro komplexní hodnoty parametru λ a dokazuje se, že její řešení $u_\lambda(x)$, jež je — jako funkce proměnné x — prvkem prostoru $L_2(0, 2\pi)$, je H-analytickou funkcí proměnné λ v oblasti G_0 obsahující úsečku $\langle 0, 1 \rangle$, tj. že funkce (8) je pro každou funkci $p(x)$ z $L_2(0, 2\pi)$ analytickou funkcí proměnné λ v oblasti G_0.

Dále se ukazuje, jak lze H-analytičnosti funkce $u_\lambda(x)$ využít k sestrojení výrazu (11), jenž je částečným součtem Taylorovy řady (v proměnné ν) jisté funkce $w_\nu(x)$. Výraz (11) je současně přibližným řešením rovnice (2), které konverguje k přesnému řešení v průměru.

Uvedená metoda je ilustrována na příkladu, kde je řešen Dirichletův problém na oblasti ohraničené elipsou o poloosách $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$.

Zusammenfassung

ÜBER DIE ABHÄNGIGKEIT DER LÖSUNG DES DIRICHLETSCHEN PROBLEMS VON DER VERÄNDERUNG DES DEFINITIONSGEBIETES

Alois Kufner

In der Arbeit wird das Dirichletsche Problem auf einem dem Kreise nahestehenden Gebiete untersucht, wobei die Abweichung der Grenze des Gebietes von der Kreislinie durch einen Wert des Parameters λ charakterisiert ist. Von der Grenze des Gebietes wird vorausgesetzt, dass sie eine stetige Krümmung hat.

Das Dirichletsche Problem auf dem Gebiet Ω_λ ($\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$) wird auf die Lösung der Fredholmschen Integralgleichung (2) für die unbekannte Dichte $\tilde{u}_\lambda(\zeta)$ des Potenzials der Doppelschicht (1) zurückgeführt. Die Gleichung (2) wird dann auch für komplexe Werte des Parameters λ untersucht und es wird bewiesen, dass die Lösung $u_\lambda(x)$ dieser Gleichung, welche als Funktion der Variablen x dem Raume $L_2(0, 2\pi)$ angehört, eine H-analytische Funktion der Veränderlichen λ im Gebiet G_0 ist, d. h. dass die Funktion

(8) für jede Funktion $p(x)$ aus $L_2(0, 2\pi)$ analytisch in G_0 ist. Dabei enthält das Gebiet G_0 den Abschnitt $\langle 0, 1 \rangle$.

Im weiteren wird gezeigt, wie man mit Hilfe der H-Analytizität der Funktion $u_\lambda(x)$ den Ausdruck (11) — die Teilsumme der Taylorschen Reihe (in der Veränderlichen ν) einer bestimmten Funktion $w_\nu(x)$ — konstruieren kann. Durch diesen Ausdruck ist gleichzeitig eine Näherungslösung der Gleichung (2) bestimmt, welche im Mittel zur genauen Lösung konvergiert.

Die angeführte Methode wird an einem Beispiel illustriert, in dem das Dirichletsche Problem auf einem durch die Ellipse mit den Halbachsen $a = 1$, $b = \frac{1}{2}$ begrenzten Gebiet gelöst wird.