Aplikace matematiky

Jindřich L. Klapka
Teorie šíření přechodných dějů ve vlnovodech

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 5, 339–358

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102768`

TEORIE ŠÍŘENÍ PŘECHODNÝCH DĚJŮ VE VLNOVODECH

JINDŘICH KLAPKA

(Došlo dne 7. listopadu 1960.)

Práce se zabývá problematikou šíření přechodných dějů ve vlnovodech a je zaměřena na studium stavu elektromagnetického vlnění od okamžiku příchodu vlnového čela do doby, kdy se asymptoticky ustavuje ustálený stav, representovaný monochromatickou vlnou. První část přináší přehled, srovnání a zhodnocení výsledků nejtypičtějších metod, použitých při zkoumání uvedeného děje v dokonalých vlnovodech, ve druhé části jsou odvozeny nové vzorce, popisující přechodné děje ve vlnovodech s malými ztrátami.

ÚVOD

Studium přechodných dějů ve vlnovodech nabývá v poslední době na důležitosti zvláště po příchodu milimikrosekundové pulsové techniky, kdy se počíná výrazněji projevovat zkreslení pulsů, přenášených vlnovodem, způsobené následkem disperse. Při tomto studiu se používá matematických metod, které nacházejí široké uplatnění i v případech zkoumání přechodných dějů v jiných dispersních prostředích. Týká se to např. problémů šíření odděleného sledu de Broglieových vln [1], časově omezeného šíření zvukových vln v trubicích [2] a časově omezeného elektromagnetického vlnění v ionosféře [3]. Ve všech těchto případech byly získány výsledky z matematického hlediska velmi podobné těm, které popisují přechodné děje ve vlnovodu.

V této práci, která se zabývá přechodnými ději, spojenými s ustalováním monochromatického elektromagnetického vlnění ve vlnovodech s homogenními kovovými stěnami, předpokládám, že čtenář je zhruba seznámen s problematikou, týkající se ustálených dějů ve vlnovodech, vyloženou např. v pracích [4], [5], [6]. První část obsahuje přehled, srovnání a zhodnocení nejzávažnějších výsledků, dosažených v teorii přechodných dějů a popisujících vlnění pro idealisovaný případ vlnovodů o nekonečně velké vodivosti stěn (vlnovody bezztrátové, čili dokonalé). Jsou to jednak přesné vzorce, vyjádřené ve tvaru konvergentních nekonečných řad Besselových funkcí, jednak přibližné vzorce, získané různými variantami tzv. metody sedlového bodu. V druhé části jsou odvozeny nové přibližné vzorce, popisující přechodné děje ve vlnovodech, u nichž se vyskytuje útlum vlnění následkem konečné vodivosti stěn (vlnovody ztrátové čili nedokonalé). V celé práci je použito Gaussovy soustavy jednotek.

Kapitola 1

PŘECHODNÉ DĚJE V DOKONALÝCH VLNOVODECH

1.1. VŠEOBECNÝ PŘEHLED

Přechodný děj ve vlnovodu je charakterisován časově omezeným vyzařováním zdroje, umístěného ve vlnovodu. Je-li zdrojem např. dipól, který vyzařuje puls sinusových kmitů (tj. vyzařování monochromatické vlny v určitém okamžiku začíná a v některém z následujících okamžiků končí), pak mohou být kmity dipólu vyjádřeny např. Fourierovým integrálem jako superposice kmitů o různých frekvencích a nekonečně dlouhé době trvání, jejichž amplitudy závisí na frekvenci. Z tohoto hlediska lze chápat přechodný děj ve vlnovodu jako superposici nekonečného množství ustálených stavů pro různé frekvence. Puls dostatečně dlouhého trvání, šířící se vlnovodem, můžeme studovat tak, že jej aproximativně nahradíme pulsem, který v určitém okamžiku začíná být vyzařován a jehož vyzařování trvá nekonečně dlouho. Takto můžeme v libovolném bodě uvnitř vlnovodu zkoumat stav vlnění od okamžiku příchodu vlnového čela do doby, kdy se asymptoticky ustavuje ustálený stav, representovaný monochromatickou vlnou. V této práci se omezíme na zkoumání právě uvedeného problému. Aplikace některých výsledků, získaných řešením tohoto problému, na šíření pulsů, které jsou oboustranně časově omezeny, nalezne čtenář v pracích [7], [8].

Přechodnými ději v dokonalých vlnovodech se zabýval Cotte [9], [10], který vyšetřoval případ, kdy na vstup vlnovodu obdélníkového průřezu je přiváděn signál, který lze vyjádřit Heavisideovou jednotkovou funkcí. Namiki a Horiuchi [11] vyšetřovali metodou sedlového bodu (viz [12], str. 472) přechodný děj, způsobený vyzařováním dipólu ve vlnovodu. Teprve však Rubinowicz [13] vytvořil přesnou a ucelenou metodu dosti obecného zkoumání přechodných dějů ve vlnovodech. Vyšetřoval šíření vln typu H ve vlnovodu libovolného průřezu, jehož dokonale vodivé stěny mají tvar pláště kolmého válce o podstavě v rovině $z = 0$, neomezeného v kladném směru osy z. Vlnovod je vyplněn homogenním dielektrikem. Rubinowicz zkoumal elektromagnetické pole v libovolném bodě prostoru o souřadnici $z > 0$ uvnitř vlnovodu, v závislosti na čase t. Ve svých úvahách vycházel z Maxwellových rovnic a vyjádřil vektory $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ magnetických a elektrických intensit ve vlnovodu pomocí axiální složky H_z magnetické intensity. Za předpokladu, že tuto složku lze vyjádřit v závislosti na kartézských souřadnicích x, y, z a čase t ve tvaru součinu dvou funkcí

$$H_z = \Phi(x, y) \,.\, F(z, t)\,, \tag{1}$$

obdržel vyjádření závislosti vektorů $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ na z a t prostřednictvím funkce $F(z, t)$ a jejích prvních derivací podle z a t. Separací proměnných ve vlnové rovnici pro H_z obdržel dvě rovnice. První z nich,

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + k^2\Phi = 0\,, \tag{2}$$

se řeší za okrajové podmínky

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} = 0\,,\text{[1]} \tag{3}$$

platné na obvodu průřezu vlnovodu, kde N značí normálu k válcové ploše, ohraničující vnitřek vlnovodu. Tvar funkce $\Phi(x, y)$ tedy závisí na geometrickém tvaru a rozměrech průřezu vlnovodu. Ke druhé ze zmíněných rovnic,

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + k^2 F = 0\,, \tag{4}$$

je přiřazena okrajová podmínka

$$F(0, t) = I(t)\cos(\omega_0 t - \alpha)\,. \tag{5}$$

Přitom $I(t)$ je Heavisideova jednotková funkce ($I(t) = 1$ pro $t \geqq 0$, $I(t) = 0$ pro $t < 0$), α je fázový posuv, c je rychlost světla v prostředí, které vlnovod vyplňuje, ω_0 je kruhová frekvence signálu, který je do vlnovodu vyzařován. Ke každému vidu zkoumaného vlnění přísluší jedna z vlastních hodnot k rovnice (2), která určuje vztahem

$$\omega_1 = kc \tag{6}$$

minimální kruhovou frekvenci ω_1, kterou vlnovod pro vlny typu H a uvažovaného vidu propustí. V dalším mějme neustále na mysli případ $\omega_0 > \omega_1$. Sledujeme-li dále Rubinowiczův postup, dostáváme se k funkci

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_P e^{-i[\omega t - (z/c)\,.\,\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}]}\,\frac{d\omega}{\omega - \omega_0}\,, \tag{7}$$

kde definiční obor ω integrandu je rozštěpen na dva listy Riemannovy plochy řezem větvení, vedeným z $-\omega_1$ do $+\omega_1$ a integrace probíhá ve směru klesání $\mathrm{Re}\,\omega$ po přímce P, rovnoběžné s reálnou osou, umístěné v té polorovině komplexní roviny ω, v níž platí $\mathrm{Im}\,\omega > 0$ a na tom listu Riemannovy plochy definičního oboru ω, na němž pro $\omega \to \infty$ nabývá exponent v integrandu v (7) tvaru $-i\omega(t - z/c)$. Funkce (7) určuje hledané řešení $F(z, t)$ rovnice (4) vztahem

$$F(z, t) = \mathrm{Re}\, e^{i\alpha} f(z, t) \tag{8}$$

a pro $z = 0$ splňuje okrajovou podmínku

$$f(0, t) = I(t)\, e^{-i\omega_0 t}\,. \tag{9}$$

V práci [14] je dokázáno, že fysikální smysl mají pouze případy, kdy pro fázový posuv α v (5), (8) platí

$$\alpha = \pm \tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{9a}$$

[1]) Tato podmínka vyplynula ze skutečnosti, že u dokonalého vlnovodu vektor magnetické intensity v každém bodě stěny leží v tečné rovině ke stěně. Poněvadž je současně vektor intensity elektrického pole v každém bodě stěny kolmý ke stěně, pak jestliže aplikujeme Rubinowiczův postup na šíření vln typu E, tj. bude-li E_z na levé straně rovnice (1), pak na místo (3) použijeme podmínky $\Phi = 0$, platné v tomto případě na stěnách vlnovodu.

Ostatní případy by odpovídaly výskytu plošných elektrických proudů, resp. plošných magnetických toků ve vlnovém čele zkoumaného signálu.

Funkce $f(z, t)$ v (7) je důležitou charakteristikou přechodného děje ve vlnovodu. K funkci stejného tvaru došel rovněž GAJEWSKI v práci [15]. Zatím co Rubinowicz předepisuje okrajovou podmínku (5) pro $z = 0$ na celé ploše průřezu vlnovodu, představuje si zde Gajewski, že vlnění je vyzařováno elementárním dipólem o momentu

$$\mathbf{M} = \vec{m} l(t) \left(1 - e^{-\tau t}\right) \sin \omega_0 t \,, \tag{10}$$

umístěným uvnitř vlnovodu v počátku souřadnicové soustavy. $\vec{m}$ je zde vektor amplitudy momentu dipólu za ustáleného stavu, veličina τ, charakterisující rychlost narůstání amplitudy kmitů, závisí na parametrech vysílacího zařízení. Přitom vlnovod je stejných vlastností, jako při Rubinowiczových úvahách a má navíc neomezenou délku v obou směrech osy z. Gajewski zde vychází z výsledků, získaných v [6] pro ustálené kmity dipólu ve vlnovodu a zkoumá přechodný děj jako superposici dějů ustálených[2]). Z jeho výsledků (viz vzorce (2.15), (2.19), (3.12), (3.13) v práci [15]) je patrno, že elektrické a magnetické intensity ve vlnovodu lze v tomto případě vyjádřit pomocí jistých funkcí $g(z, t)$, $h(z, t)$ a jejích prvních a druhých parciálních derivací podle z a t, přičemž platí

$$g(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}} \, e^{-i[\omega t - (z/c) \, . \, \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}]} \, \frac{d\omega}{\omega - (\omega_0 - i\tau)} \,, \tag{11}$$

$$h(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}} \, e^{-i[\omega t - (z/c) \, . \, \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}]} \, \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} \,. \tag{12}$$

Přitom integrace probíhá po stejné integrační cestě, jako v případě integrálu v (7). ω_1 zde značí minimální kruhovou frekvenci, která je vlnovodem propuštěna pro uvažovaný vid vln daného typu. V případě, že τ v (10) roste nade všechny meze (případ okamžitého vzrůstu kmitů dipólu na maximální amplitudu), pak ze zmíněných výsledků vymizí všechny členy, obsahující funkci $g(z, t)$ a její derivace podle z a t. Vztahy (3.12), (3.13) v [15] jsou principiálně vhodné k popisu pole, způsobeného ve vlnovodu vyzařováním tenké antény konečné délky a libovolného tvaru, neboť toto pole lze vyjádřit superposicí polí, pocházejících od jednotlivých elementárních dipólů.

Pro derivaci funkce $h(z, t)$ podle z platí

$$\frac{\partial h(z, t)}{\partial z} = \frac{i}{c} f(z, t) \,, \tag{13}$$

kde tvar funkce $f(z, t)$ je uveden v (7).

Zjišťujeme-li rozborem Rubinowiczových a Gajewského výsledků, pro který druh antény a pro kterou složku intensity má funkce $f(z, t)$ v pojetí Gajewského,

[2]) Poznamenejme, že přechodný děj, vzniklý při vyzařování dipólu ve vlnovodu, je z elementárního hlediska názorně popsán např. v práci [16].

jak jsme ji zavedli vztahem (13), stejný fysikální význam, jako táž funkce v pojetí Rubinowiczově, docházíme k závěru, že tak nastane v případě transversální antény (tj. antény, ležící v rovině průřezu vlnovodu), u které amplituda proudu na počátku vyzařování stoupne prakticky okamžitě na maximální hodnotu. Vycházíme-li z výsledků obou autorů, můžeme zjistit, že v daném případě určuje tato funkce závislost longitudinální složky E_z elektrické intensity vln typu E na z a t, přičemž platí vztah

$$E_z = P \cdot \Phi(x, y) \cdot F(z, t), \tag{14}$$

kde reálná konstanta P je v případě výsledků Gajewského určena tvarem, délkou a umístěním antény, v případě výsledků Rubinowiczových jest $P = 1$. Funkce $F(z, t)$ je dána vztahem (8) za předpokladu (9a). Přitom $\Phi(x, y)$ je vlastní funkce problému vlastních hodnot (2), řešeného pro okrajovou podmínku $\Phi(x, y) = 0$, platnou pro obvod průřezu vlnovodu. K této vlastní funkci přísluší vlastní hodnota $k = \omega_1/c$, určující minimální kruhovou frekvenci ω_1 vln daného vidu, typu E.

Ke vztahu (14) lze dojít za prvé aplikací Rubinowiczova postupu z [13] na vlny typu E a za druhé superposicí výsledků z [15] (vz. (2.15), (2.19), (3.12), (3.13)), odpovídajících elementárním dipólům, z nichž předpokládáme, že je uvažovaná transversální anténa složena. Pro ostatní složky intensit vln typu E, jakož i v případě vln typu H, jsou vztahy mezi výsledky obou autorů značně složitější a není účelné se jimi zde zabývati.

V dalším si všimneme hlavních výsledků, kterých bylo dosaženo při uvádění funkce (7) do tvaru, vhodného k praktickým výpočtům. Rubinowicz [1], [13] dokázal, že tato funkce je pro $t < z/c$ rovna nule a pro $t > z/c$ obdržel její rozvoj v konvergentní nekonečnou řadu Besselových funkcí

$$f(z, t) = J_0(\eta) + \sum_{n=1}^{\infty} (-i)^n J_n(\eta)\, \gamma^{-n}(\gamma_0^n + \gamma_0^{-n}), \tag{15}$$

kde $J_n(\eta)$ je Besselova funkce n-tého řádu argumentu η, přičemž

$$\eta = \omega_1 t \sqrt{1 - \beta^2}, \tag{16}$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \tag{16a}$$

$$\gamma_0 = \sqrt{\frac{1 + \beta_0}{1 - \beta_0}}. \tag{16b}$$

Dále jest

$$\beta = \frac{z}{ct}, \tag{17}$$

$$\beta_0 = \frac{z}{ct_0}, \tag{17a}$$

kde

$$t_0 = \frac{z}{c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}} = \frac{z}{v}. \tag{18}$$

v zde značí grupovou rychlost, příslušnou ve vlnovodu vyzařované kruhové frekvenci ω_0. Vidíme, že vztah (15) je nejlépe použitelný pro výpočet elektromagnetického pole v bodech blízkých čelu přenášeného signálu, tj. pro $t \sim z/c$, čili $\beta \sim 1$, neboť pak dle (16a) má γ značně velkou hodnotu, takže k výpočtu stačí pouze málo členů řady (15). Pro body vzdálenější od čela uvedená řada konverguje pomalu a vyvstává nutnost použití nějakého přibližného vzorce pro $f(z, t)$. K odvození takového vzorce použil Rubinowicz [1] metody stacionární fáze (viz např. [12], str. 474). Týž vzorec odvodil v [13] použitím přibližných vztahů pro Besselovy funkce [17]. Tento vzorec pro $f(z, t)$, který též odvodil Gajewski (viz [7], vztah (2.12)) Pearsonovou modifikací [2] metody sedlového bodu, obsahuje singularity pro $t = z/c$ a pro $t = t_0$. Singularitu pro $t = t_0$ odstranil Gajewski [7] dalším zdokonalením této metody podle Pearsona, přičemž došel ke vztahu

$$f(z, t) \doteq I_1 + I_2 + l(t - t_0)\, e^{-i[\omega_0 t - (z/c)\,.\,\sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}]}, \tag{19}$$

kde

$$I_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{-i[\eta + (\pi/2)d^2 + (\pi/4)]} \int_{|d|}^{\infty} e^{i(\pi/2)y^2}\, \mathrm{d}y \tag{20}$$

a

$$I_2 = \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\eta}} \cdot \frac{e^{i[\eta - (\pi/4)]}}{1 + \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{21}$$

přičemž

$$d = -\frac{1}{\beta}\sqrt{\frac{\eta}{\pi}}\left(1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{1 - \beta^2}\right) \tag{22}$$

a veličiny β, η jsou dány v (16), (17). Horní znamení v (20) platí pro $t < t_0$, dolní pro $t > t_0$. Přitom jest

$$\begin{aligned} d &> 0 \quad \text{pro} \quad t > t_0\,, \\ d &< 0 \quad \text{pro} \quad t < t_0\,, \\ d &= 0 \quad \text{pro} \quad t = t_0\,. \end{aligned} \tag{23}$$

Gajewski dokazuje, že hodnotu funkce I_2 lze s výjimkou těsné blízkosti vlnového čela ($t \approx z/c$) vždy zanedbat.

Karbowiak [8] studuje funkci $S(z, t)$, která odpovídá funkci (7) s tím rozdílem, že splňuje na rozdíl od (9) okrajovou podmínku

$$S(0, t) = l(t)\, e^{i\omega_0 t}. \tag{24}$$

Používá metody sedlového bodu způsobem, který vypracoval VAN DER WAERDEN [18] a dostává dva přibližné vzorce, z nichž jeden popisuje část vlnění, která prochází bodem o dané souřadnici z uvnitř vlnovodu v okamžiku t, dostatečně vzdáleném od okamžiku t_0, daného vztahem (18) a má tvar

$$(25) \qquad S(z, t)_B \doteq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \frac{\beta \sqrt{\omega_1}}{(\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} - \omega_1) \cdot (1 - \beta^2)^{1/4}} e^{i[\omega_1 t \sqrt{1 - \beta^2} - (\pi/4)]} + \\ + l(t - t_0)\, e^{-tr},$$

kde

$$(25a) \qquad r = i(-\omega_0 + \beta \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2})$$

a význam ostatních symbolů je zřejmý z předchozího výkladu. Jak lze snadno nahlédnout, vzorec (25) pozbývá platnosti též pro t blízká k z/c.

Druhý vzorec, platící jen pro hodnoty t, dostatečně blízké k t_0, jest

$$(26) \qquad S(z, t)_P \doteq \left[l(t - t_0) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc}(ib \sqrt{t}) \right] e^{-tr},$$

kde

$$(26a) \qquad \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty e^{-y^2}\, dy,$$

$$(26b) \qquad b = \sqrt{i[-\omega_0 + \beta \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} + \omega_1 \sqrt{1 - \beta^2}]}.$$

Přitom definiční obor odmocniny v (26b) je umístěn na příslušných listech Riemannovy plochy tak, že pro $t > t_0$ platí

$$(27a) \qquad b = |b| \cdot e^{i(3/4)\pi},$$

a pro $t < t_0$ jest

$$(27b) \qquad b = |b| \cdot e^{-i(\pi/4)}.$$ [3])

Výraz

$$(28) \qquad l(t - t_0)\, e^{-tr},$$

vystupující v (25), (26), označme jako *hlavní vlnu*. Přes tuto hlavní vlnu se překládají přechodné vlny. Je to jednak *přechodná vlna B*, daná vztahem

$$(29) \qquad S(z, t)_B^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot \frac{\beta \sqrt{\omega_1}}{(\omega_0 \sqrt{1 - \beta^2} - \omega_1) \cdot (1 - \beta^2)^{1/4}} \cdot e^{i[\omega_1 t \sqrt{1 - \beta^2} - (\pi/4)]},$$

[3]) Poznamenávám, že vzorce (25), (26) uvádím v poněkud názornějším tvaru, než v jakém je píše Karbowiak (srv. [8], vz. (30), (45)). Mimoto vzorec (45) v [8] je zřejmě uveden nesprávně, jak plyne z výpočtu a ze srovnání se vzorcem (51) v [8] s přihlédnutím k ostatnímu textu práce [8], jakož i ze srovnání vzorce (26), který zde předkládám, se vzorcem (19), které je provedeno v odstavci 1.2.

pro niž zaveďme označení *předchůdce B* v případě $t < t_0$ a *zadní přechodná vlna B* v případě $t > t_0$.

Dále je to *přechodná vlna P*

$$(30) \qquad S(z, t)_P^* = -e^{-tr} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{erfc}(ib\sqrt{t}),$$

kterou nazveme *předchůdce P* v případě $t < t_0$ a *zadní přechodná vlna P* v případě $t > t_0$.

Pro doplnění terminologie uveďme, že část vlnění, která přichází do bodu o souřadnici z ve vlnovodu v okamžiku $t = z/c$ se nazývá *vlnové čelo*, část vlnění, která do něj přijde v okamžiku $t = t_0$ (viz (18)), jest *čelo hlavní vlny*.

Popišme nyní průběh funkce $|S(z, t)|$, jak plyne z rozboru Karbowiakových výsledků (stejné vlastnosti vlnění zjistíme i z rozboru výsledků Gajewského, resp. Rubinowiczových pro funkci $f(z, t)$).

V bodě o souřadnici z uvnitř vlnovodu se nevyskytuje žádné vlnění až do okamžiku $t = z/c$, kdy přichází předchůdce B. Pro následující okamžiky t, dostatečně blízké k z/c, je vhodné počítat počátek předchůdce B z Rubinowiczova vzorce (15). Pro větší hodnoty t je vhodnější pro výpočet předchůdce B použít vzorce (29). Absolutní hodnota předchůdce B nejprve dosti rychle stoupne z 0 na 1, pak klesá a nastává oblast velmi slabé intensity pole, načež se dostaví předchůdce P, daný vztahem (30) pro $t < t_0$. Jeho amplituda roste stále rychleji, až dosáhne v okamžiku t_0 hodnoty $\frac{1}{2}$. Pak amplituda vlnění osciluje kolem střední hodnoty, rovné jedné, dané přítomností výrazu $\exp[-t \cdot r]$ v (25), (26), kteréžto střední hodnotě se asymptoticky blíží s rostoucím časem, což je způsobeno tím, že se zde přes hlavní vlnu překládají přechodné vlny. Je to nejprve zadní přechodná vlna P, daná vztahem (30) pro $t > t_0$, která pro větší hodnoty t přechází v zadní přechodnou vlnu B, danou v (29) pro $t > t_0$. Tato se s rostoucím časem prakticky utlumí a zbývá pouze hlavní vlna, představující ustálený stav.

Amplitudová funkce $|S(z, t)|$ je přenášena nosnou vlnou, jejíž kruhová frekvence se v bodě o dané souřadnici z mění s časem. V okamžiku příchodu vlnového čela je kruhová frekvence nosné vlny extrémně vysoká, ale s rostoucím časem se asymptoticky blíží hodnotě ω_0 kruhové frekvence signálu, který je do vlnovodu vyzařován. Fázová rychlost nosné vlny je v okamžiku příchodu vlnového čela rovna rychlosti c, kterou se šíří světlo v prostředí, které vlnovod vyplňuje, ale s rostoucím časem tato rychlost roste a asymptoticky se blíží hodnotě

$$u = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}},$$

odpovídající fázové rychlosti vyzařovaného signálu o kruhové frekvenci ω_0. Body konstantní fáze amplitudové funkce $|S(z, t)|$ se pohybují ve směru rostoucího z rychlostí, která pro dané z je v okamžiku příchodu vlnového čela rovna c, pak klesá a asymptoticky se blíží hodnotě

$$v = c \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2},$$

odpovídající grupové rychlosti vyzařovaného signálu o kruhové frekvenci ω_0. Následkem toho se tvar předchůdce B s rostoucím časem protahuje ve směru osy z. Po uplynutí okamžiku t_0 lze již prakticky považovat kruhovou frekvenci nosné vlny, jakož i fázovou a grupovou rychlost vlnění za ustálenou.

V předešlých partiích jsme uvedli vyjádření funkce $f(z, t)$ ve tvaru konvergentní řady Besselových funkcí, jakož i přibližné vzorce pro tuto funkci, získané metodou sedlového bodu, a popsali jsme chování této funkce.

Při popisu přechodného děje ve vlnovodu v Rubinowiczově pojetí potřebujeme též znát první parciální derivace této funkce podle z a t (viz text za vztahem (1) s přihlédnutím ke vztahu (8)). Rubinowicz v práci [13] odvodil vyjádření těchto derivací prostřednictvím konvergentních řad Besselových funkcí (srv. vztahy (4.2) citované práce). Z jeho výsledků lze lehce získat též přibližné vzorce pro tyto derivace.

Při popisu přechodného děje v pojetí Gajewského se používá funkcí $g(z, t)$ a $h(z, t)$ (viz (11), (12)) a jejích derivací podle z a t do druhého řádu včetně. Pro tyto funkce a jejich derivace odvodil Gajewski (srv. [15], vz. (4.34)) rozvoje v řady Besselových funkcí. Pro funkci $h(z, t)$ a její parciální derivace do druhého řádu včetně odvodil v [7] přibližné vzorce (srv. vztahy (2.17) cit. práce) metodou sedlového bodu a prohlásil, že jak tato funkce, tak i zmíněné její derivace, se v dostatečné vzdálenosti od vlnového čela chovají podobně, jako funkce $\partial h(z, t)/\partial z$. Přihlédneme-li k (13), vidíme, že totéž platí i o prvních parciálních derivacích funkce $f(z, t)$, které se vyskytují v popisu přechodného děje v Rubinowiczově pojetí.

Aby byl popis přechodného děje v pojetí Gajewského úplný, bude tedy v budoucnu nutno ještě nalézti přibližné vzorce pro funkci $g(z, t)$ a její parciální derivace do druhého řádu včetně.

1.2. SROVNÁNÍ VÝSLEDKŮ GAJEWSKÉHO S VÝSLEDKY KARBOWIAKOVÝMI

Karbowiakovo vyjádření (25), (26) funkce $S(z, t)$ srovnáme nyní s Gajewského výrazem (19) pro funkci $f(z, t)$. Přitom nebudeme brát ohled na různosti v těchto výsledcích, způsobené tím, že okrajové podmínky (9), (24) jsou navzájem v opačné fázi a nebudeme se zabývat tou částí vlnění, která je v bezprostřední blízkosti vlnového čela, pro níž lze tedy s výhodou použít Rubinowiczova vzorce (15).

Po dosazení za r z (25a) do (28) vidíme ihned, že Karbowiakova hlavní vlna je ekvivalentní třetímu členu součtu na pravé straně Gajewského vzorce (19). Zbývá tedy srovnat u obou autorů výrazy, charakterisující průběh přechodných vln, tj. srovnat vztahy (29) resp. (30) se součtem $I_1 + I_2$, vystupujícím v (19). Jak již bylo řečeno, lze výraz I_2, daný v (21), s výjimkou bezprostřední blízkosti vlnového čela vždy zanedbat. Stačí nám tedy srovnat Gajewského výraz I_1 s Karbowiakovými funkcemi $S(z, t)_B^*$ a $S(z, t)_P^*$.

Uvažujme nejprve o případu $t > t_0$. Zavedeme-li nyní v (30) s přihlédnutím k (26a), (26b), (27a) substituci

$$y = e^{-i(3/4)\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, u\,, \tag{31}$$

dostáváme vzhledem k (16)

$$S(z, t)_P^* = -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i[\eta + (\pi/2)D^2 - (3/4)\pi]} \int_{|D|}^{\infty} e^{-i(\pi/2)u^2}\, du\,, \tag{32}$$

kde

$$D = |D| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\omega_0 t - \frac{z}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} - \eta \right). \tag{32a}$$

Chceme-li nyní srovnat vzorce (20) a (32), musíme srovnat hodnotu d z (22) s hodnotou D, vystupující v (32a). Za tím účelem rozložíme součet prvních dvou členů v závorce v exponentu v (20) v Taylorovu řadu v okolí $t = t_0$ a omezíme se na její první tři členy. Tento rozvoj, vypočtený s přihlédnutím k (16), (17), (18), (22), lze po zjednodušení psát ve tvaru

$$\eta + \frac{\pi}{2} d^2 \doteq \omega_0 t - \frac{z}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2}\,. \tag{33}$$

Vyšší členy Taylorovy řady lze zanedbat za předpokladu

$$|t - t_0| \ll \frac{z}{c} \cdot \frac{1}{\dfrac{\omega_0}{\omega_1} \left(\dfrac{\omega_0^2}{\omega_1^2} - 1 \right)^{1/2}}\,. \tag{34}$$

Z (33) pak plyne

$$|d| \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\omega_0 t - \frac{z}{c} \sqrt{\omega_0^2 - \omega_1^2} - \eta \right),$$

tedy vzhledem k (32a) jest

$$|d| \doteq D\,.$$

Nepřihlížíme-li k fázovým rozdílům a k rozdílům ve znaménku v exponentech srovnávaných výsledků, kteréžto skutečnosti jsou způsobeny růzností okrajových podmínek pro $z = 0$, můžeme prohlásit, že v případě (34) je pro $t > t_0$ Gajewského výsledek (20) ekvivalentní Karbowiakovu výsledku (30).

Zkoumejme nyní případ $t < t_0$. Použijeme-li opět v (30) substituce (31), dostáváme vzhledem k (27b) na rozdíl od (32)

$$S(z, t)_P \doteq -\frac{1}{\sqrt{2}}\, e^{i[\eta + (\pi/2)D^2 - (3/4)\pi]} \int_{-|D|}^{-\infty} e^{-i(\pi/2)u^2}\, du\,,$$

což lze psát vzhledem k tomu, že integrand je zde sudou funkcí u, ve tvaru

$$S(z, t)_P \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i[\eta + (\pi/2)D^2 - (3/4)\pi]} \int_{|D|}^{\infty} e^{-i(\pi/2)u^2} \, du \,. \tag{35}$$

Srovnáme-li (20), (32) a (35), můžeme říci, že v obou případech, $t < t_0$ i $t > t_0$, je za předpokladu (34) Gajewského výraz pro přechodnou vlnu (20) ekvivalentní Karbowiakovu výrazu (30).

Provedeme-li jednoduchou úpravu ve vztahu (29), dostáváme vzhledem k (16)

$$S(z, t)_B^* = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \cdot \frac{\beta}{1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{1 - \beta^2}} e^{i[\eta + (3/4)\pi]} \,. \tag{36}$$

Tento výsledek je ekvivalentní vztahu (2.9) v [7], získanému Pearsonovou modifikací metody sedlového bodu. Stanovme, pro jaké hodnoty t lze tohoto vzorce použít, nezabýváme-li se tou částí vlnění, která je v bezprostřední blízkosti vlnového čela.

Zaveďme v (20) vztahem

$$\int_{|d|}^{\infty} e^{i(\pi/2)y^2} \, dy = \frac{1 + i}{2} - C(|d|) - iS(|d|) \tag{37}$$

výrazy pro Fresnelovy integrály $S(|d|)$, $C(|d|)$, pro něž platí

$$S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} y^2 \, dy \,, \tag{38}$$

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} y^2 \, dy \,.$$

Pro $x \gg 1$ platí přibližné vzorce

$$S(x) \doteq \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi x} \cos \frac{\pi}{2} x^2 \,, \tag{39}$$

$$C(x) \doteq \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi x} \sin \frac{\pi}{2} x^2 \,,$$

jejichž přesnost je pro $x \geqq 3$ větší než 1%. Dosadíme-li je do (37) a dále do (20) a dosadíme-li za d z (22), dostáváme po jednoduché úpravě s přihlédnutím k (23)

$$I_1 = -\frac{i}{\pi d}\left(\cos \frac{\pi}{2} d^2 + i \sin \frac{\pi}{2} d^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i[\eta + (\pi/2)d^2 + (\pi/4)]} = \tag{40}$$

$$= \frac{\beta}{\sqrt{2\pi\eta}} \cdot \frac{e^{-i[\eta - (\pi/4)]}}{1 - \frac{\omega_0}{\omega_1}\sqrt{1 - \beta^2}} \,,$$

což souhlasí (nepřihlížíme-li zde opět k fázovému posunutí a znaménku exponentu) se vzorcem (36). Současně je vztah (40) identický se vztahem (2.9) v [7].

Rozvineme-li veličinu d ze vztahu (22) v okolí $t = t_0$ v Taylorovu řadu a omezíme-li se za předpokladu (34) na její první tři členy, dostáváme

$$d \doteq \sqrt{\frac{\omega_0 c}{\pi z}} \cdot \frac{(m^2 - 1)^{3/4}}{m^{1/2}} (t - t_0), \tag{41}$$

kde

$$m = \frac{\omega_0}{\omega_1}. \tag{41a}$$

Chceme-li použít vzorců (39) pro $x = |d|$ s přesností, kterou jsme výše uvedli, užijeme vztahu (40) vzhl. k (41) pro

$$|t - t_0| \geqq 3 \sqrt{\frac{\pi z}{\omega_0 c}} \cdot \frac{m^{1/2}}{(m^2 - 1)^{3/4}}. \tag{42}$$

Můžeme tedy říci, že za předpokladu (42) lze vztah (20) nahradit vztahem (40), avšak v opačném případě, tj. pro $|d| < 3$, výraz (40) pro I_1 nedostačuje (roste v absolutní hodnotě nade všechny meze pro $t \to t_0$) a musí tam být nahrazen přesnějším vzorcem (20). Tím jsme současně stanovili oblast použitelnosti Karbowiakovy funkce $S(z, t)_B^*$ z (29). Oblast použitelnosti funkce $S(z, t)_P^*$ je omezena nerovností (34).

Docházíme tedy k závěru, že Karbowiakovy vzorce (29), (30) lze získat aproximacemi ze vzorce Gajewského (20) při splnění předpokladů, které jsou v této kapitole uvedeny. Přitom přesnějšího vzorce Gajewského (20) lze výhodně použít k numerickému výpočtu, jestliže užijeme vztahu (37) a tabulek Fresnelových integrálů.

Kapitola 2

PŘECHODNÉ DĚJE VE VLNOVODECH S MALÝMI ZTRÁTAMI

V této kapitole budeme uvažovat o přechodném ději, který byl pro dokonalé vlnovody zaveden vztahy (1)–(9), a zkoumat, jak se změní funkce $f(z, t)$, jestliže nahradíme dokonale vodivé stěny uvažovaného vlnovodu homogenními kovovými stěnami o dostatečně velké, avšak konečné vodivosti.

Vyjděme nejprve z úvahy o ustáleném stavu. Ustálený stav vlnění o frekvenci ω v dokonalém vlnovodu lze popsat, když k rovnici (4) přiřadíme místo (5) okrajovou podmínku

$$F(0, t) = \cos(\omega t - \alpha).$$

Jak se lze lehce přesvědčit, nabude pak funkce $f(z, t)$, vystupující v (7), (8), tvaru

$$f(z, t) = e^{-i[\omega t - (z/c) \cdot \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}]} = f(0, t)\, e^{\gamma_0 z}, \tag{43}$$

kde značí $\gamma_0 = (i/c)\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}$ komplexní konstantu přenosu pro dokonalý vlnovod, $\exp[\gamma_0 z]$ přenosovou funkci pro dokonalý vlnovod. Předpokládáme-li však, že náš vlnovod má homogenní kovové stěny o konečné, dostatečně velké vodivosti, pak na těchto stěnách neplatí okrajová podmínka (3), neboť vektor intensity elektrického pole na stěně vlnovodu není v tomto případě kolmý ke stěně. Je-li obvod průřezu vlnovodu tvořen dostatečně hladkou křivkou, pak lze pro náš případ použít Leontovičových přibližných okrajových podmínek, platných pro šíření vln podél neperfektního homogenního vodiče (viz např. [5], str. 243, 259), které můžeme napsat pro stěny vlnovodu ve tvaru

(44) $$[\boldsymbol{n}\boldsymbol{E}] = Z[\boldsymbol{n}[\boldsymbol{H}, \boldsymbol{n}]]\,,$$

kde

(44a) $$Z = \sqrt{\frac{\omega\,.\,\mu}{8\pi\sigma}}\,(1 + i)$$

je povrchová impedance stěn[4]).

Zde značí $\boldsymbol{n}$ jednotkový vektor, kolmý ke stěně, směřující dovnitř stěny (tj. ven z vnitřku vlnovodu), ω kruhovou frekvenci použitého vlnění, μ magnetickou permeabilitu stěn a σ specifickou vodivost stěny. Vztah (44) platí pro malou hloubku pronikání vln, která je v oboru vlnových délek, používaných ve vlnovodech, nepatrná. Neplatí pro extrémně vysoké frekvence, jaké se při přechodném ději ve vlnovodu vyskytují ve vlnovém čele.

Vzhledem k tomu, že elektrické pole na stěnách ztrátových vlnovodů není k těmto stěnám kolmé, spotřebuje se část energie elektromagnetického pole uvnitř vlnovodu na vznik elektrických proudů ve stěnách, způsobených tangenciální složkou elektrického pole. Tím je způsoben útlum vln. Označme vlastní hodnotu k rovnice (2), odpovídající bezztrátovému stavu, jako k_0. Následkem změny okrajových podmínek na stěnách vlnovodu, způsobené nedokonalou vodivostí stěn, změní se tato vlastní hodnota o komplexní přírůstek $\delta(k)$, jehož absolutní hodnota je malá pro dostatečně velkou vodivost stěn, dle vztahu

$$k = k_0 + \delta(k)\,.$$

Přihlížíme-li k závislosti (6), můžeme říci, že komplexní konstanta přenosu γ_0 se změní následkem toho na hodnotu

$$\gamma = \gamma_0 + \delta(\gamma)\,,$$

kde přibližnou hodnotu $\delta(\gamma)$ stanovíme po rozvinutí veličiny $\gamma = (i/c)\sqrt{\omega^2 - k^2c^2}$ v Taylorovu řadu v okolí $k = k_0$ a po zanedbání členů druhého a vyšších řádů vztahem

(45) $$\gamma - \gamma_0 = \delta(\gamma) = \frac{k_0}{\sqrt{k_0^2 - \dfrac{\omega^2}{c^2}}}\,\delta(k)\,.$$

4) Obecněji o tomto pojmu — viz [19].

Výpočtem hodnoty $\delta(k)$ pro případy šíření vln ve vlnovodech obdélníkového a kruhového průřezu se zabýval Karbowiak v práci [19]. Z jeho výsledků, získaných při zanedbání malých veličin druhého a vyšších řádů, je patrno, že v těchto případech je tato hodnota úměrná povrchové impedanci Z. Při těchto výpočtech bral Karbowiak též zřetel na skutečnost, že následkem nedokonalé vodivosti stěn vlnovodu se ke každému vlnění typu H, daného vidu, přidružuje ještě slabé vlnění typu E, téhož vidu, a naopak. Přihlédneme-li k obecnému tvaru jeho výsledků, můžeme pro tyto případy vzhledem k (44a) a (45) klásti

$$\delta(\gamma) = \varrho(\omega)\,(i - 1)\,, \tag{46}$$

kde reálná funkce $\varrho(\omega)$ kruhové frekvence je nepřímo úměrná druhé odmocnině z vodivosti stěn σ a její tvar závisí na geometrickém tvaru a rozměrech průřezu vlnovodu, magnetické permeabilitě jeho stěn, typu a vidu vln.

Další naše úvahy se týkají všech vlnovodů s homogenními isotropickými kovovými stěnami, pro něž lze použít vztahu (46).

V případě, že povrchová impedance Z z (44a) je různá od nuly (případ konečné vodivosti stěn), nabývá tedy funkce $f(z, t)$ ze (43) pro ustálený děj tvaru

$$f(z, t) = e^{-i[\omega t - (z/c)\,.\,\sqrt{\omega^2 - \omega_1{}^2}]}\, e^{i\varrho(\omega)z}\,.\,e^{-\varrho(\omega)z}\,, \tag{47}$$

kde z posledního faktoru je patrno, že $\varrho(\omega)$ má fysikální význam útlumu vlny.

Zkoumejme dále přechodný děj, charakterisovaný okrajovou podmínkou

$$f(0, t) = l(t)\,.\,e^{-i\omega_0 t}\,. \tag{48}$$

Provedeme-li druhé parciální derivace funkce $f(z, t)$ v (47) podle z a podle t, dostaneme při porovnání obou derivací, zanedbáme-li $\varrho^2(\omega)$, rovnici

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + [\omega_1^2 - 2c\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}\,.\,\varrho(\omega)\,.\,(1 + i)]\,.\,f\,. \tag{49}$$

Zavedeme-li substituci

$$\varphi(\omega) = \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}\,.\,\varrho(\omega)\,, \tag{50}$$

nabývá rovnice (49) tvaru

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + [\omega_1^2 - 2c\varphi(\omega)\,(1 + i)]\,.\,f\,. \tag{51}$$

Zavedeme-li dále v (51) transformaci

$$p = -i\omega \tag{52}$$

a označíme-li $\varphi(ip) = \psi(p)$, nabývá rovnice (51) tvaru

$$c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + [\omega_1^2 - 2c\psi(p)\,.\,(1 + i)]\,.\,f\,. \tag{53}$$

Tuto rovnici chceme nyní řešit za okrajové podmínky (48), k níž přibereme podmínku

$$\lim_{z \to \infty} f(z, t) = 0 . \tag{54}$$

Za tím účelem násobíme rovnici (53) výrazem $p . \exp[-pt]$ a integrujeme obě její strany podle t od 0 do ∞. Předpokládejme, že jsou zde splněny podmínky pro použití Laplaceovy transformace i jí odpovídající zpětné transformace. Označíme-li jako v Laplaceův obraz funkce $f(z, t)$, pak Laplaceův obraz rovnice (53) jest

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{p^2 + \omega_1^2 - 2c\psi(p)(1 + i)}{c^2} v . \tag{55}$$

V práci [20] je uvedeno řešení této transformované rovnice pro speciální případ $\psi(p) = 0$ (netlumené vlnění) za okrajových podmínek, vzniklých Laplaceovou transformací podmínek (48), (54). Výsledek, vyjádřený zpětnou Laplaceovou transformací, lze v tomto případě převést po opětném zavedení proměnné ω transformací (52) na tvar (7). Aplikujeme-li stejný postup na obecnější případ (55), dostáváme nakonec pro funkci $f(z, t)$ vyjádření

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{-i[\omega t - (z/c) . \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2 + 2c\varphi(\omega)(1 + i)}]} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} , \tag{56}$$

kde průběh integrační cesty P je stejný, jako v případě vztahu (7). Poněvadž útlum $\varrho(\omega)$ je nepřímo úměrný druhé odmocnině z vodivosti stěn σ, platí totéž vzhledem k (50) i pro $\varphi(\omega)$. Je-li σ dostatečně velké, pak lze změnu třetího členu pod odmocninou v (56) podél integrační cesty zanedbat vzhledem ke změně ω^2. Dále je patrno z tvaru integrálu v (56), že nejpodstatnější příspěvek k hodnotě funkce $f(z, t)$ způsobují hodnoty ω blízké k ω_0. Zaveďme tedy aproximaci $\varphi(\omega) \doteq \varphi(\omega_0)$. Označíme-li

$$\varphi(\omega_0) = R , \tag{57}$$

můžeme psát

$$f(z, t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{-i[\omega t - (z/c) . \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2 + 2cR(1 + i)}]} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} .$$

Vytkneme-li ve výraze pod odmocninou výraz $\omega^2 - \omega_1^2$ a použijeme Maclaurinova rozvoje, přičemž se omezíme na jeho první dva členy, neboť R^2 můžeme zanedbat, dostáváme

$$\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2 + 2cR(1 + i)} \doteq \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2} \left(1 + \frac{cR(1 + i)}{\omega^2 - \omega_1^2}\right) .$$

Odtud

$$f(z, t) \doteq \frac{1}{2\pi i} \int_P e^{-i[\omega t - (z/c) . \sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}]} . e^{iz . R(1 + i)/\sqrt{\omega^2 - \omega_1^2}} \frac{d\omega}{\omega - \omega_0} . \tag{58}$$

Dále platí

$$e^{iz\,.\,R(1+i)/\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}} \doteq 1 + iz\frac{R(1+i)}{\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}},$$

což dosazeno do (58) dává

$$(59)\qquad f(z,t) \doteq \frac{1}{2\pi i}\int_P e^{-i[\omega t-(z/c)\,.\,\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}]}\frac{d\omega}{\omega-\omega_0} + izR(1+i)\,.$$

$$.\,\frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{e^{-i[\omega t-(z/c)\,.\,\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}]}}{\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}}\,.\,\frac{d\omega}{\omega-\omega_0}\,.$$

První člen zde představuje funkci (7), vypočtenou pro dokonalé vlnovody, pro níž platí přibližné vztahy (19)–(22), druhý člen obsahuje funkci, k níž došel rovněž Gajewski [15] při studiu elektromagnetického pole v dokonalém vlnovodu, způsobeného vyzařováním dipólu (srv. (12)). Metodou sedlového bodu obdržel v [7] pro tuto funkci vyjádření

$$(60)\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_P \frac{e^{-i[\omega t-(z/c)\,.\,\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}]}}{\sqrt{\omega^2-\omega_1^2}}\,.\,\frac{d\omega}{\omega-\omega_0} \doteq$$

$$\doteq \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\omega_1\beta}(I_1-I_2) + \frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}}\,l(t-t_0)\,e^{-i[\omega_0 t-(z/c)\,.\,\sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}]},$$

kde I_1 je dáno v (20), I_2 v (21). Vzhledem k (19) a (60) můžeme psát vztah (59) ve tvaru

$$f(z,t) \doteq I_1\left[1 + zR(i-1)\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\omega_1\beta}\right] + I_2\left[1 - zR(i-1)\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\omega_1\beta}\right] +$$

$$+\, l(t-t_0)\,e^{-i[\omega_0 t-(z/c)\,.\,\sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}]}\left[1 + zR(i-1)\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}}\right].$$

Funkce I_2 nabývá, jak bylo uvedeno v kapitole 1, význačnější hodnoty pouze v bezprostřední blízkosti vlnového čela. V těchto místech má však vlnění extrémně vysokou frekvenci, neplatí tam tedy Leontovičovy okrajové podmínky. Proto nelze pro tuto oblast použitelnost našeho výsledku zaručit. Omezíme-li se na ostatní oblasti, můžeme I_2 zanedbat a konečný výsledek napsat ve tvaru

$$(61)\qquad f(z,t) \doteq I_1[1 + A] + l(t-t_0)\,e^{-i[\omega_0 t-(z/c)\,.\,\sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}]}\,[1 + B]\,,$$

kde I_1 je uvedeno v (20) s významem symbolů, patrným ze vztahů (22), (16), (17) a korekční veličiny A, B, pro něž platí vzhledem k (16) vztahy

$$(62)\qquad A = zR(i-1)\,.\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\omega_1\beta} = \frac{c}{\omega_1^2}\,\eta R(i-1)\,,$$

$$(63)\qquad B = zR(i-1)\,.\,\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\omega_1^2}}\,,$$

charakterisují změnu vlnění oproti případu bezztrátovému, kdy jest $\sigma \to \infty$, tedy $R \to 0$ a korekce A, B lze zanedbat. Jest patrno, že absolutní hodnota korekce A pro danou hodnotu souřadnice z narůstá s rostoucím časem t a pro dané t klesá s rostoucím z, zatím co B nezávisí na čase a narůstá v absolutní hodnotě s rostoucím z.

Ve větších vzdálenostech od čela hlavní vlny pro $t > t_0$, jestliže již lze vlnění považovat za ustálené, můžeme hodnotu výrazu I_1, označujícího přechodné vlny, zanedbat. Poněvadž výraz $1 + B$ v (61) lze považovat za přibližný výraz pro exponenciální funkci

$$1 + B \doteq e^B ,$$

docházíme pak po dosazení za B z (63) s přihlédnutím k (57), (50), ke vztahu tvaru (47) pro ustálený děj, z něhož jsme původně vyšli.

Výsledný vztah (61) tedy udává přibližný výraz pro funkci $f(z, t)$, charakterisující přechodný děj ve vlnovodu s homogenními kovovými stěnami a s malými ztrátami v případě, že lze zanedbat druhou mocninu útlumu. Platí s výjimkou bezprostřední blízkosti vlnového čela.

Známe-li tedy řešení (61) pro případ dokonalého vlnovodu, přejdeme k vlnovodu ztrátovému o stejném průřezu, když vypočteme pro danou hodnotu σ útlum ϱ, příslušející vyzařované frekvenci ω_0 a dále vypočteme s přihlédnutím k (50), (57) korekce (62), (63), které dosadíme do (61).

Výhody našeho vzorce (61) oproti dosavadním vzorcům Karbowiakovým (vz. (51)–(54) v [8][5])) jsou tyto:

1. Ve vzorci (61) je přímo oddělena ztrátová složka vlnění od složky bezztrátové, a to tak, že vzorce (61) lze použít k získání názorného přehledu o procentuální změně hodnot funkce $F(z, t)$ z (8) oproti případu vlnovodu dokonalého.

2. Karbowiakovy vzorce mají omezenější obor platnosti. Platí pouze pro okamžiky t dostatečně blízké k t_0, kdežto vzorec (61) platí pro všechna $t > z/c$ s výjimkou bezprostřední blízkosti vlnového čela.

Literatura

[1] *A. Rubinowicz:* Propagation of a cutt-off train of de Broglie waves. Acta physica Polonica, 10 (1950), str. 79—86.

[2] *J. D. Pearson:* The transient motion of sound waves in tubes. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. 6, part 3 (1953), str. 313—335.

[3] *Я. Л. Альперт, В. Л. Гинзбург, Е. Л. Фейнберг:* Распротсранение радиоволн. Гос. издат. техническо-теоретической литературы, Москва 1953.

[5]) Karbowiak odvodil zmíněné vzorce pro ztrátové vlnovody stejnou metodou, jakou použil pro $t \to t_0$ v případě vlnovodů bezztrátových. Upozorňuji, že vztahy (51) a (52) práce [8], jak jsou ve zmíněné práci uvedeny, nejsou spolu navzájem správně fázově vázány. Z výpočtu, provedeného metodou [18], plyne, že mají být vyjádřitelné ve stejném tvaru, jaký uvádím v (26), pouze s odlišnými hodnotami b, r, které v limitním případě dokonalé vodivosti stěn přecházejí v hodnoty, uvedené v (26b), (25a).

[4] *L. de Broglie:* Problèmes de propagations guidées des ondes électromagnétiques. Gauthier-Villars, Paris 1941.
[5] *V. Votruba, Č. Muzikář:* Theorie elektromagnetického pole. Nakl. ČSAV, Praha 1955.
[6] *W. Z. Chien, L. Infeld, J. R. Pounder, A. F. Stevenson, J. R. Synge:* Contributions to the theory of wave guides. Canadian Journal of Research, vol. 27, sec. A (1949), str. 69—129.
[7] *R. Gajewski:* On transient radiation of a dipole inside a wave guide (II). Acta physica Polonica, 16 (1957), str. 3—24.
[8] *A. E. Karbowiak:* Propagation of transients in waveguides. The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, part C, vol. 104, No. 6 (1957), str. 339-348.
[9] *M. Cotte:* Propagation d'une perturbation dans un guide électrique. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences (Paris), 221 (1945), str. 538—540.
[10] *M. Cotte:* Annales des télecommunications, t. 1, No. 3-4 (1946).
[11] *M. Namiki, K. Horiuchi:* On the transient phenomena in the wave guide. Journal of the Physical Society of Japan, 7 (1952), str. 190—193.
[12] *H. Jeffreys, B. S. Jeffreys:* Methods of mathematical physics. Cambridge university press, 1946.
[13] *A. Rubinowicz:* Über die Fortpflanzung unstetiger elektromagnetischer Signale in Wellenleitern. Acta physica Polonica, 13 (1954), str. 115—133.
[14] *A. Rubinowicz:* Fortpflanzung von Sprüngen elektromagnetischer Feldstärken und Eindeutigkeitsbeweis für das Anfangswertproblem der Maxwellschen Gleichungen. Acta physica Polonica, 14 (1955), str. 209—224.
[15] *R. Gajewski:* On transient radiation of a dipole inside a wave guide (I). Acta physica Polonica, 15 (1956), str. 25—41.
[16] *A. Rubinowicz:* Über eine anschauliche Darstellung der Vorgänge bei der Fortpflanzung von unstetigen Signalen in Wellenleitern. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 7 (1956), str. 316—325.
[17] *G. N. Watson:* A treatise on the theory of Bessel functions. Cambridge university press, 1944, str. 194—224.
[18] *B. L. Van der Waerden:* On the method of saddle points. Applied Scientific Research, B2 (1951—52), str. 33—45.
[19] *A. E. Karbowiak:* Theory of imperfect waveguides. The effect of wall impedance. The Proceedings of the Institution of Electrical Engineers, part B, vol. 102, No. 5 (1955), str. 698—708.
[20] *J. Cejpek:* Šíření elektromagnetických signálů v dispersním prostředí. Diplom. práce! Přír. fak. Brno 1954.

Резюме

ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ВОЛНОВОДАХ

ИНДРЖИХ КЛАПКА (Jindřich Klapka)

Решающим фактором при описании электромагнитного поля в совершенном волноводе, которое возникает в результате излучения в волновод монохроматической волны, амплитуда которой сразу же в начале излучения достигнет максимального значения или же возрастает от начального нулевого значения и асимптотически стремится к установившемуся состоянию по закону показательной функции, являются функции $g(z, t)$ (11), $h(z, t)$ (12) и их частные производные до второго порядка включительно. Самой простой из этих функций и их производных является функция $\partial h/\partial z$, определяющая соотношением (13) функцию $f(z, t)$, приведенную в (7) и являющуюся самой важной характеристикой нестационарных процессов в волноводах. В первой главе работы содержится помимо всеобщего обзора проблематики этих нестационарных процессов, также взаимное сравнение и оценка результатов наиболее важных методов, примененных для сведения функции типа (7) к виду, удобному для практических приложений. Особое внимание уделено сравнению приближенных резултьатов Карбовиака (25), (26) с приближенными результатами Гаевского (19). Из этого сравнения вытекает, что результаты Карбовиака можно при выполнении предположений (42) или же (34) в основном рассматривать как аппроксимации результатов Гаевского.

Во второй главе выведены новые приближенные формулы (61)—(63), описывающие функцию $f(z, t)$ в случае нестационарного процесса в волноводе с малыми потерями, где можно пренебречь второй степенью затухания. Эти формулы справедливы в гораздо более широкой области, чем до сих пор известные формулы Карбовиака, имеющие место для нестационарных процессов в волноводах с потерями указанного типа, приведенные в [8]. Следующее их преимущество по сравнению с упомянутыми формулами Карбовиака заключается в том, что они наглядно описывают волнение в волноводе с потерями как суперпозицию двух составляющих: одна из них равна волнению в данном волноводе без наличия потерь при одинаковых иначе условиях, вторая же составляющая находится под влиянием величины потерь в волноводе.

Summary

THEORY OF PROPAGATION OF TRANSIENT PHENOMENA IN WAVE GUIDES

JINDŘICH KLAPKA

Consider the electromagnetic field in a perfect wave guide, formed when a monochromatic wave, the amplitude of which either attains its maximum value immediately or exponentially approaches its steady state, is introduced into the wave guide. The description of this field is determined by the functions $g(z, t)$ (11) and $h(z, t)$ (12), together with their first and second partial derivatives. The simplest of these is the function $\partial h/\partial t$ which determines the function $f(z, t)$ given in (7), through the relation (13). The function $f(z, t)$ is the most important characteristic of transient phenomena in wave guides.

The first chapter of this paper contains a review of problems of the theory of propagation of transient phenomena, and a comparison as well as a valuation of the results of most important methods used for the reducing of the function of the type (7) into a form adapted for practical applications. Attention is centered on the comparison of the approximate results of Karbowiak (25), (26) with the approximate result of Gajewski (19). It is concluded that, under the assumptions (42) and (34), respectively, the results of Karbowiak may be substantially considered as approximations of the result of Gajewski.

In the second chapter new asymptotic formulas (61) to (63) are deduced which describe the function $f(z, t)$ for transients in wave guides with small losses, in which the second power of the attenuation coefficient may be neglected. These formulas can be applied to a considerably more extensive range of variables z, t than those of Karbowiak, given in [8], which are valid for transient phenomena in imperfect wave guides of the mentioned type. Another advantage of these formulas is that they illustratively represent the propagation of waves in wave guides as the superposition of two components. The first component represents the propagation of waves in the same wave guide in the absence of losses but with remaining conditions preserved, and the second component depends on the magnitude of losses in the wave guide.