Aplikace matematiky

Jan Polášek

Berechnung von Koeffizienten induzierter Geschwindigkeiten für Schaufelgitter mit schwach gewölbten Profilen

Aplikace matematiky, Vol. 6 (1961), No. 6, 428–462

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102777`

BERECHNUNG VON KOEFFIZIENTEN INDUZIERTER GESCHWINDIGKEITEN FÜR SCHAUFELGITTER MIT SCHWACH GEWÖLBTEN PROFILEN

JAN POLÁŠEK

(Eingegangen am 10. Dezember 1960.)

Für die Berechnung von Koeffizienten μ_{kn}, ν_{kn} der induzierten Geschwindigkeiten für Schaufelgitter mit schwach gewölbten Profilen wurden die Theorie und Formeln zur numerischen Berechnung abgeleitet. Die Kenntnis dieser Koeffizienten wird bei der Berechnung der Umströmung von Schaufelgittern nach der in der Arbeit „Berechnung der Strömung für Schaufelgitter mit dünnen, stark gewölbten Profilen", Aplikace matematiky Bd. 3 (1958), No 5, beschriebenen Methode vorausgesetzt. Für Teilungsverhältnisse $t/l = 1/2, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \sqrt{2}$ und 2 und Staffelungswinkel $\lambda = 0°, 30°, 60°$ bzw. $90°$ wurden die numerischen Werte dieser Koeffizienten tabellarisiert.

1. EINLEITUNG

In der Arbeit [1] „Berechnung der Strömung für Schaufelgitter mit dünnen, stark gewölbten Profilen" wurde eine rasche und einfache Methode für die Berechnung der potentialen Strömung für Schaufelgitter mit dünnen, beliebig stark gewölbten Profilen beschrieben. Zur praktischen Anwendung dieser Methode war es jedoch erforderlich, diese mit den Tabellen der Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} zu ergänzen. Diese Koeffizienten hängen von folgenden drei Parametern der Gittergeometrie ab: dem Teilungsverhältnis t/l, dem Staffelungswinkel λ und der Wölbung ω (Öffnungswinkel des approximierenden Kreisbogens). Die Hauptgedanken des Verfahrens zur Berechchnung von μ_{kn} und ν_{kn} wurden schon früher in einem Kurzbericht [2] in dieser Zeitschrift veröffentlicht.

Wegen des häufigen Vorkommens von Schaufelgittern mit schwach gewölbten Profilen und auch aus funktionell-theoretischen Gründen erschien es zweckmässig die Berechnung von Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} in zwei Etappen durchzuführen. In der ersten Etappe, der die vorliegende Arbeit gewidmet ist, werden die Theorie und numerische Berechnung der Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} für schwach gewölbte Profile, d. h. für $\omega = 0$, ausgearbeitet. In der zweiten Etappe wird der Einfluss der grösseren Profilwölbungen berücksichtigt.

Bei der Wahl der Werte von t/l und λ, für die die Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} tabellarisiert wurden, wurde die Tatsache berücksichtigt, dass die Ausdrücke $\mu_{kn} - i\nu_{kn}$ komplexe Funktionen einer einzigen komplexen Veränderlichen $\ln t/l - i\lambda$ sind. Daraus ergab sich, es sei am besten, die Koeffiziententabellen für Teilungsverhältnisse, die eine geometrische Folge (z. B. $t/l = 1/2, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$ und 2) bilden, sowie für Staffelungswinkel, die eine arithmetische Folge (z. B. $\lambda = 0, \pi/6, \pi/3$ bzw. $\pi/2$) bilden, zu berechnen. (Der Fall $\lambda = \pi/2$ hat zwar keinen praktischen Sinn und wurde nur wegen der Interpolation in die Arbeit eingeschlossen.)

Die Arbeit ist in zwei Teile aufgeteilt. In dem ersten, rein mathematischen Teile werden die erforderlichen funktionellen Abhängigkeiten und Formeln für die numerische Berechung abgeleitet. Im zweiten Teile werden diese Resultate zur numerischen Berechung von Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} verwendet.

Eine ähnliche Methode für die Berechnung der Strömung in den Schaufelgittern wie in [1] hat unlängst G. L. Mellor [3] veröffentlicht, aber seine Methode ist bloss auf schwach gewölbte Profile beschränkt. Für die Berechnung von Koeffizienten der induzierten Geschwindigkeit schlägt er eine numerische Integration in zwei Dimmensionen vor.

Erster Teil

2. GRUNDLEGENDE EIGENSCHAFTEN DER FUNKTIONEN $J_{kn}(\alpha)$

In der ganzen Arbeit spielen die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ der komplexen Veränderlichen α eine wesentliche Rolle und deshalb werden zuerst einige Eigenschaften dieser Funktionen und einige Formeln zur numerischen Berechnung der Funktionenwerte abgeleitet. Die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ werden durch Integrale

$$(2,1) \qquad J_{kn}(\alpha) = \frac{-1}{2\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos k\vartheta \, . \cos n\chi}{\cos \vartheta - \cos \chi - \alpha} \, d\vartheta \, . \, d\chi$$

definiert, wo k und n ganze Zahlen sind. Wie sich später erwiesen wird, haben die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ in den Punkten $\alpha = 2$, $\alpha = 0$ und $\alpha = -2$ logarithmisch singuläre Punkte und sind regulär in der längs der reellen Achse von $\alpha = -2$ bis $\alpha = 2$ aufgeschnittenen α-Ebene (Abb. 1).

Da Kosinus eine gerade Funktion ist, gilt

$$(2,2) \quad J_{kn}(\alpha) = J_{-kn}(\alpha) = J_{-k,-n}(\alpha) = J_{k,-n}(\alpha) \,,$$

so dass man sich im weiteren nur auf nichtnegative k und n beschränken kann.

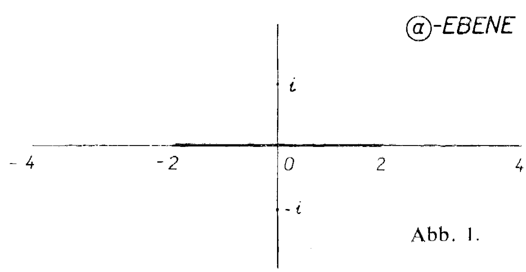

Abb. 1.

Aus der Gleichung (2,1) ergibt sich auch ganz einfach, dass

$$J_{kn}(-\alpha) = - J_{nk}(\alpha) \tag{2,3}$$

ist.

Für weitere Ausführungen setzt man in das Integral (2,1) statt der Veränderlichen ϑ und χ die komplexen Veränderlichen w und z

$$w = e^{i\delta}, \quad z = e^{i\chi} \tag{2,4}$$

ein. Es ergibt sich

$$J_{kn}(\alpha) = \frac{1}{4\pi^2} \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} \frac{\left(w^k + \frac{1}{w^k}\right)\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)}{w + \frac{1}{w} - z - \frac{1}{z} - 2\alpha} \frac{dw}{w} \frac{dz}{z} \tag{2,5}$$

und der Integrationsweg in den beiden komplexen Ebenen w und z sind im positiven Sinn durchlaufene Einheitskreise.

Wie leicht zu ersehen ist, gelten für Integrale

$$I_{kn}(\alpha) = \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} \frac{w^k z^n \, dw \, dz}{w^2 z + z - wz^2 - w - 2wz\alpha} \tag{2,6}$$

die Gleichungen

$$I_{kn}(\alpha) = I_{-kn}(\alpha) = I_{-k,-n}(\alpha) = I_{k,-n}(\alpha) \tag{2,7}$$

und deshalb kann man den Ausdruck (2,5) auf die Form

$$J_{kn}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} \frac{w^k z^n \, dw \, dz}{w^2 z - wz^2 + z - w - 2wz\alpha} \tag{2,8}$$

überführen, aus der sich dann weitere Eigenschaften der Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ leicht ergeben werden. Nach (2,3) kann man schreiben

$$J_{kn}(\alpha) + J_{nk}(\alpha) = J_{kn}(\alpha) - J_{kn}(-\alpha) \tag{2,9}$$

und nach (2,8) folgt weiter

$$J_{kn}(\alpha) + J_{nk}(\alpha) = \frac{-1}{2\pi^2\alpha} \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} \frac{w^k z^n}{1 - \left(\frac{w^2 z - wz^2 + z - w}{2wz\alpha}\right)^2} \frac{dw}{w} \frac{dz}{z}. \tag{2,10}$$

Für $|\alpha| > |\alpha_1| > 2$ kann man den Integranden in (2,10) in eine gleichmässig konvergente Potenzreihe nach den Potenzen von

$$\left(\frac{w^2 z - wz^2 + z - w}{2wz\alpha}\right)^2$$

entwickeln. Nach Durchführung der Potenzen bekommt man eine Reihe von Gliedern mit der Form $f(\alpha) \, . \, w^\mu \, . \, z^\nu$. Ist $k + n$ eine ungerade Zahl, sind auch alle $\mu + \nu$ ungerade und nach Vertauschen der Integration und der Summation sind alle Integrale gleich Null, so dass für $|\alpha| > |\alpha_1| > 2$ nach (2,10)

$$J_{k,2N+1-k}(\alpha) = - J_{2N+1-k,k}(\alpha) \tag{2,11}$$

gilt. Wegen der Regularität der Funktionen J_{kn} ist die Gleichung (2.11) für alle α geltend.

Ganz ähnlich wird bewiesen, dass für die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ mit gerader Indexensumme eine ähnliche Gleichung

$$J_{k,2N-k}(\alpha) = J_{2N-k,k}(\alpha) \tag{2,12}$$

gilt.

Aus der Gleichung (2,3) ergibt sich noch, dass die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ mit gerader Indexensumme ungerade Funktionen der Veränderlichen α sind

$$J_{k,2N-k}(\alpha) = - J_{k,2N-k}(-\alpha)\,, \tag{2,13}$$

während die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ mit ungerader Indexensumme gerade Funktionen der Veränderlichen α sind

$$J_{k,2N+1-k}(\alpha) = J_{k,2N+1-k}(-\alpha)\,. \tag{2,14}$$

Aus allem was bis jetzt gesagt wurde folgt, dass man sich bei vollständiger Bestimmung aller Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ nur auf Funktionen mit nicht negativen Indexen beschränken kann und von diesen nur auf die, für welche $k \leqq n$ ist.

Weiter wollen wir uns noch ein wenig mit der Gleichung (2,8) befassen, die nach einfachen Umformungen die Form

$$\begin{aligned} J_{kn}(\alpha) = {} & \frac{1}{\pi^2} \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} w^{k-2} z^{n-1}\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}z\, + \\ & + \frac{1}{\pi^2} \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} \frac{w^{k-1}z^{n+1} - w^{k-2}z^{n} + w^{k-1}z^{n-1} + 2\alpha w^{k-1}z^{n}}{w^2 z - w z^2 + z - w - 2wz\alpha}\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}z \end{aligned} \tag{2,15}$$

annimmt. Da aber

$$\frac{1}{\pi^2} \oint\limits_{|z|=1} \oint\limits_{|w|=1} w^{k-2} z^{n-1}\, \mathrm{d}w\, \mathrm{d}z = \begin{cases} -4 & \text{für } k = 1,\ n = 0\,, \\ \ \ 0 & \text{in allen übrigen Fällen} \end{cases} \tag{2,16}$$

ist, ergeben sich aus der Gleichung (2,15) unter Berücksichtigung von (2,2), (2,11) und (2,12) folgende lineare Beziehungen zwischen den Funktionen $J_{kn}(\alpha)$:

$$\begin{aligned} J_{01} &= 1 - \tfrac{1}{2}\alpha J_{00}\,; \\ J_{11} &= \tfrac{1}{2}J_{00} + \tfrac{1}{2}J_{02} + \alpha J_{01}\,; \\ J_{12} &= J_{01} - \alpha J_{11}\,; \\ J_{03} &= - J_{01} + 2J_{12} - 2\alpha J_{02}\,; \end{aligned} \tag{2,17}$$

$$
\begin{aligned}
J_{13} &= \tfrac{1}{2}J_{02} + \tfrac{1}{2}J_{04} + \alpha J_{03} ;\\
J_{22} &= J_{11} - J_{02} + J_{13} + 2\alpha J_{12} ;\\
J_{23} &= J_{12} - \alpha J_{22} ;\\
J_{14} &= - J_{12} + J_{03} + J_{23} - 2\alpha J_{13} ;\\
J_{05} &= - J_{03} + 2J_{14} - 2\alpha J_{04} ;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
J_{15} &= \tfrac{1}{2}J_{04} + \tfrac{1}{2}J_{06} + \alpha J_{05} ;\\
J_{24} &= J_{13} - J_{04} + J_{15} + 2\alpha J_{14} ;\\
J_{33} &= J_{22} - J_{13} + J_{24} + 2\alpha J_{23} ;\\
J_{34} &= J_{23} - \alpha J_{33} ;\\
J_{25} &= - J_{23} + J_{14} + J_{34} - 2\alpha J_{24} ;\\
J_{16} &= - J_{14} + J_{05} + J_{25} - 2\alpha J_{15} ;\\
J_{07} &= - J_{05} + 2J_{16} - 2\alpha J_{06} ;\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}
$$

Die Gleichungen (2,17) sind solcherart zusammengruppiert, dass allgemein in N-ter Gruppe $2N - 1$ lineare nichthomogene Gleichungen für $2N$ unbekannte Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ mit $k + n = 2N - 2$ und $2N - 1$ vorkommen. Zur Ermittlung aller Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ muss man also in jeder Gruppe eine Funktion auf eine andere Weise bestimmen. Wählt man für diese die Funktionen $J_{0,2N}(\alpha)$ und lösst das Gleichungssystem (2,17) in derselben Reihenfolge wie es aufgeschrieben ist, dann werden auf den rechten Seiten immer nur bekannte Funktionen auftreten.

3. DIE BERECHNUNG DER FUNKTIONEN $J_{kn}(\alpha)$

Zuerst sollen Formeln zur Berechnung von Funktionen $J_{0n}(\alpha)$ abgeleitet werden. In erster Reihe führt man im Integral

$$
(3,1) \qquad J_{0n}(\alpha) = \frac{1}{\pi^2} \oint_{|z|=1} \oint_{|w|=1} \frac{z^{n-1}\,\mathrm{d}w\,\mathrm{d}z}{w^2 - \left(z + \frac{1}{z} + 2\alpha\right) w + 1}
$$

die Integration nach der Veränderlichen w durch. Der Nenner des Integranden ist ein quadratisches Polynom in w und seine Wurzeln sind

$$
(3,2) \qquad w_{1,2} = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z} + 2\alpha\right) \mp \left[\frac{1}{4}\left(z + \frac{1}{z} + 2\alpha\right)^2 - 1\right]^{\frac{1}{2}}, [1])
$$

wobei

$$
|w_1| < 1 , \quad |w_2| > 1
$$

ist.

[1]) Die Quadratwurzel (mit dem Vorzeichen $+$) bedeutet hier denjenigen ihrer beiden Werte, der für grosse $|\alpha|$ in $+\alpha$ übergeht. Für übrige α aus dem Regularitätsbereich der Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ bedeutet er den Wert, der sich durch analytische Fortsetzung aus diesem ergibt. Auf ähnliche Weise sollen die Vorzeichen der Wurzeln in der ganzen Arbeit aufgefasst werden.

Innerhalb des Integrationsweges hat also der Integrand einen Pol der ersten Ordnung, so dass im Sinne des Residuumstheorems

$$J_{0n} = \frac{2i}{\pi} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^{n-1}\,\mathrm{d}z}{w_1 - w_2} \tag{3,3}$$

oder

$$J_{0n} = -\frac{2i}{\pi} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^n}{\sqrt{X}}\,\mathrm{d}z \tag{3,4}$$

gilt, wo die Bezeichnung

$$X = (z^2 + 2\alpha z + 1)^2 - 4z^2 \tag{3,5}$$

eingeführt wurde. Da X ein Polynom vierten Grades mit verschiedenen Wurzeln ist, sind $J_{0n}(\alpha)$ elliptische Integrale und können alle mittels zwei grundlegenden elliptischen Integralen ausgedrückt werden. Zur Berechnung von Wurzeln ist es vorteilhaft das Polynom X in der Form

$$X = [z^2 + 2(\alpha + 1)\,z + 1]\,[z^2 + 2(\alpha - 1)\,z + 1] \tag{3,6}$$

zu schreiben, aus der erkenntlich ist, dass zwei Wurzeln z_1 und z_2 innerhalb des Einheitskreises und die restlichen zwei Wurzeln z_3 und z_4 ausserhalb des Einheitskreises liegen. Diese Wurzeln sind

$$(3,7)\quad z_{1,3} = -(\alpha + 1) \pm (\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}\,, \qquad |z_1| < 1\,,\quad |z_3| > 1\,,\quad z_1 \,.\, z_3 = 1\,;$$

$$(3,8)\quad z_{2,4} = -(\alpha - 1) \pm (\alpha^2 - 2\alpha)^{\frac{1}{2}}\,, \qquad |z_2| < 1\,,\quad |z_4| > 1\,,\quad z_2 \,.\, z_4 = 1\,.$$

Zur Aufstellung einer rekurrenten Formel für die Integrale $J_{0n}(\alpha)$ verwendet man bekannte Beziehung aus der Theorie der elliptischen Integrale (vergl. [4], S. 87):

Bezeichnet man

$$I_n = \int \frac{z^n}{\sqrt{X}}\,\mathrm{d}z\,, \tag{3,9}$$

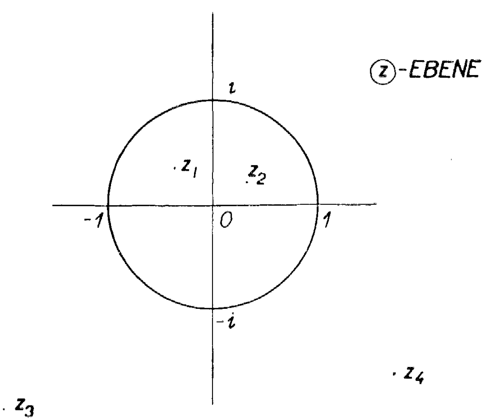

Abb. 2.

so gilt

$$(3,10)\quad z^n\sqrt{X} = (n + 2)\,I_{n+3} + (n + \tfrac{3}{2})\,.\,4\alpha I_{n+2} + (n + 1)(4\alpha^2 - 2)\,I_{n+1} + \\ + (n + \tfrac{1}{2})\,4\alpha I_n + nI_{n-1}\,.$$

Da das Polynom X innerhalb des Einheitskreises zwei Wurzeln hat, erreicht die Funktion $\sqrt{X}$ in einem Punkte z des Einheitskreises nach einem Umlauf denselben Wert. Aus der Gleichung (3,10) folgt also die rekurrente Formel für $J_{0n}(\alpha)$

$$(3,11)\qquad J_{0,n+3} = -\frac{(2n+3)\,2\alpha}{n+2} J_{0,n+2} - \frac{(n+1)(4\alpha^2-2)}{n+2} J_{0,n+1} - \\ -\frac{(2n+1)\,2\alpha}{n+2} J_{0,n} - \frac{n}{n+2} J_{0,n-1}\,.$$

Nach dieser Formel können alle Funktionen J_{0n} der Reihe nach mit Hilfe der drei ersten J_{00}, J_{01} und J_{02} berechnet werden.

Zur Berechnung des Integrals in $J_{00}(\alpha)$

$$(3,12)\qquad J_{00}(\alpha) = -\frac{2i}{\pi} \oint\limits_{|z|=1} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{X}}$$

verwenden wir die bekannten Transformationen (vgl. [4], S. 92 und 99), die dieses Integral auf die Legendersche Normalform überführen. Zuerst setzen wir

$$(3,13)\qquad z = \frac{y-1}{y+1}$$

und das Integral (3,12) geht in das Integral

$$(3,14)\qquad J_{00}(\alpha) = -\frac{4i}{\pi} \int_0^{i\infty} \frac{\mathrm{d}y}{[(2+\alpha)\,y^2-\alpha]^{\frac{1}{2}}\,[\alpha y^2+2-\alpha]^{\frac{1}{2}}}$$

über. Eine weitere Substitution

$$(3,15)\qquad y = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{it}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}}$$

formt das Integral (3,14) in die gesuchte Legendersche Normalform

$$(3,16)\qquad J_{00}(\alpha) = \frac{4}{\pi\alpha} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4}{\alpha^2}\,t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

um.

Aus der Gleichung (3,16) tritt klar zutage, dass die Funktion $J_{00}(\alpha)$ in den Punkten $\alpha = 2$, $\alpha = -2$ und $\alpha = 0$ logarithmische Singularitäten hat, was am Anfang des zweiten Paragraphen behauptet wurde.

Für weitere Berechnungen führt man die Bezeichnung

$$(3,17)\qquad Y = \frac{4}{\pi} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{4}{\alpha^2}\,t^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

ein, so dass

$$(3,18)\qquad J_{00}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}\, Y$$

ist.

Zur Berechnung des Integrals $J_{01}(\alpha)$ verwenden wir die erste Gleichung des Systems (2,17)

$$J_{01}(\alpha) = 1 - \tfrac{1}{2}\alpha\, J_{00}(\alpha) = 1 - \tfrac{1}{2}Y. \tag{3,19}$$

Die Berechnung von $J_{02}(\alpha)$ gestaltet sich einigermassen schwieriger. Wir geben deshalb zuerst eine Beziehung an, die sich bei der Berechnung von J_{02} als nützlich erweisen wird. Nach (2,2) und (3,4) gilt

$$J_{01}(\alpha) = -\frac{2i}{\pi}\oint \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{X}}. \tag{3,20}$$

Durch die Transformationen (3,13) und (3,15) ergibt sich

$$\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = 1 - \alpha - \frac{2 - \alpha}{1 - \dfrac{2}{\alpha}t^2} \tag{3,21}$$

und

$$J_{01}(\alpha) = \frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \tag{3,22}$$
$$- \frac{2-\alpha}{\alpha}\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 - \dfrac{2}{\alpha}t^2\right)(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Der Vergleich der rechten Seiten der Gleichungen (3.19) und (3.22) gibt

$$\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1 - \dfrac{2}{\alpha}t^2\right)(1 - t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha}{\alpha - 2} + \tfrac{1}{2}Y. \tag{3,23}$$

Bei der Berechnung von $J_{02}(\alpha)$ schreibt man ähnlich wie in (3,20)

$$J_{02}(\alpha) = -\frac{2i}{\pi}\oint_{|z|=1} \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{X}}. \tag{3,24}$$

Mittels der Transformationen (3,13) und (3,15) bekommt man

$$\frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right) = 1 - 4\alpha + 2\alpha^2 - \frac{8 - 12\alpha + 4\alpha^2}{1 - \dfrac{2}{\alpha}t^2} + \frac{8 - 8\alpha + 2\alpha^2}{\left(1 - \dfrac{2}{\alpha}t^2\right)^2} \tag{3,25}$$

und

$$J_{02}(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(1 - 4\alpha + 2\alpha^2) \cdot \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \tag{3,26}$$

$$- \frac{4}{\alpha}(2 - 3\alpha + \alpha^2)\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \frac{2}{\alpha}(4 - 4\alpha + \alpha^2)\frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{dt}{\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Die zwei ersten Integrale auf der rechten Seite sind schon bekannt (3,17), (3,23) und zur Berechnung des dritten verwendet man eine Reduktionsformel (vgl. [4], S. 88)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \tag{3,27}$$

$$= \int_0^1 \frac{M + \left[\frac{4}{\alpha^2}t^4 - \left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right)t^2 + 1\right]N' + \left[\frac{8}{\alpha^2}t^3 - \left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right)t\right]N}{\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}}\,dt,$$

wo M und N Polynome in t sind, die der Identitätsgleichung

$$\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)M - \frac{4}{\alpha}t\left[\frac{4}{\alpha^2}t^4 - \left(1 + \frac{4}{\alpha^2}\right)t^2 + 1\right]N \equiv 1 \tag{3,28}$$

genügen. Die Methode der unbestimmten Koeffizienten liefert

$$M = \frac{-1}{4 - 4\alpha + \alpha^2}\left[\frac{8}{\alpha}t^4 - (4 + 2\alpha)t^2 - 4 + 4\alpha - \alpha^2\right], \tag{3,29}$$

$$N = \frac{\alpha}{4 - 4\alpha + \alpha^2}t. \tag{3,30}$$

Nach dem Einsetzen in (3,27) bekommt man

(3,31)

$$\int_0^1 \frac{dt}{\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)^2(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\alpha - 2}{4 - 4\alpha + \alpha^2} \cdot \int_0^1 \frac{dt}{(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{dt}{\left(1 - \frac{2}{\alpha}t^2\right)(1-t^2)^{\frac{1}{2}}\left(1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2}{4 - 4\alpha + \alpha^2}\int_0^1 \left(\frac{1 - t^2}{1 - \frac{4}{\alpha^2}t^2}\right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Führt man noch die Bezeichnung

$$Z = \frac{16}{\pi} \int_0^1 \left(\frac{1 - t^2}{1 - \frac{4}{\alpha^2} t^2} \right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}t \tag{3,32}$$

ein und setzt man den Ausdruck (3,31) in (3,26) ein, bekommt man nach einigen kleinen Umformungen

$$J_{02}(\alpha) = - 2\alpha - \frac{3 - \alpha^2}{\alpha} Y + \frac{1}{\alpha} Z . \tag{3,33}$$

Mit Hilfe der rekurrenten Formel (3,11) bekommt man der Reihe nach

$$\begin{aligned} (3,34) \qquad J_{03}(\alpha) &= 1 + 4\alpha^2 + \left(\frac{15}{2} - 2\alpha^2 \right) Y - 3Z , \\ J_{04}(\alpha) &= - 8\alpha(1 + \alpha^2) - \frac{13 + 44\alpha^2 - 12\alpha^4}{3\alpha} Y + \frac{4 + 22\alpha^2}{3\alpha} Z , \\ J_{05}(\alpha) &= 1 + 36\alpha^2 + 16\alpha^4 + \left(\frac{205}{6} - \frac{70}{3} \alpha^2 - 8\alpha^4 \right) Y - \left(\frac{35}{3} + \frac{50}{3} \alpha^2 \right) Z , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die so erworbenen Ausdrücke für die Funktionen $J_{0,2N}(\alpha)$ setzt man in das System (2,17) ein. Die Ausdrücke für die Funktionen $J_{0,2N+1}(\alpha)$ braucht man zwar zur Berechnung nach dem System (2,17) nicht, aber sie wurden mit Vorteil zur Kontrolle der erworbenen Formeln verwendet. Auf diese Weise bekommt man Formeln zur Berechnung aller erforderlichen Funktionen $J_{kn}(\alpha)$. Bei den Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ mit einer geraden Indexensumme ist es zweckmässiger die Formeln für $\alpha \,.\, J_{k,2N-k}(\alpha)$, zu schreiben:

$$\begin{aligned} (3,35) \qquad \alpha J_{00} &= Y , \\ J_{01} &= 1 - \tfrac{1}{2} Y , \\ \alpha J_{11} &= - Y + \tfrac{1}{2} Z , \\ \alpha J_{02} &= - 2\alpha^2 - (3 - \alpha^2) Y + Z , \\ J_{12} &= 1 + \tfrac{1}{2} Y - \tfrac{1}{2} Z , \\ J_{03} &= 1 + 4\alpha^2 + (\tfrac{15}{2} - 2\alpha^2) Y - 3Z , \\ \alpha J_{22} &= - (\tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}\alpha^2) Y + (\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3}\alpha^2) Z , \\ \alpha J_{13} &= - 4\alpha^2 - (\tfrac{11}{3} - \tfrac{2}{3}\alpha^2) Y + (\tfrac{7}{6} + \tfrac{2}{3}\alpha^2) Z , \\ \alpha J_{04} &= - 8\alpha^2(1 + \alpha^2) - (\tfrac{13}{3} + \tfrac{44}{3}\alpha^2 - 4\alpha^4) Y + (\tfrac{4}{3} + \tfrac{22}{3}\alpha^2) Z , \\ J_{23} &= 1 + (\tfrac{13}{6} - \tfrac{2}{3}\alpha^2) Y - (\tfrac{7}{6} - \tfrac{1}{3}\alpha^2) Z , \\ J_{14} &= 1 + 12\alpha^2 + (\tfrac{33}{2} - 4\alpha^2) Y - (6 + \alpha^2) Z , \\ J_{05} &= 1 + 36\alpha^2 + 16\alpha^4 + (\tfrac{205}{6} + \tfrac{70}{3}\alpha^2 - 8\alpha^4) Y - (\tfrac{35}{3} + \tfrac{50}{3}\alpha^2) Z , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Die Formeln (3,35) geben alle Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ als lineare Kombinationen von zwei elliptischen Integralen Y und Z an. Aus den Gleichungen (3,17) und (3,32) folgt, dass Y und Z vollständige elliptische Integrale mit dem Modul

$$k^2 = \frac{4}{\alpha^2} \tag{3,36}$$

sind, für die gewöhnlich die Bezeichnung (vgl. [5], S. 74)

$$Y = \frac{4}{\pi} K\,, \quad Z = \frac{16}{\pi} B \tag{3,37}$$

eingeführt wird. Für reelle Moduln werden diese elliptischen Integrale laufend tabelliert. In unseren Fällen charakterisiert α die geometrische Anordnung eines Schaufelgitters (Abb. 3) und ist durch die Gleichung

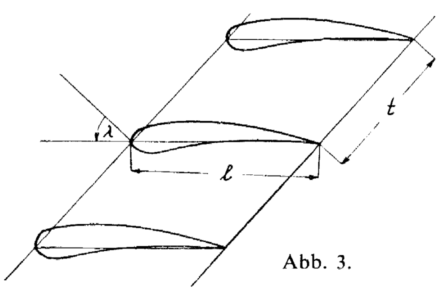

Abb. 3.

$$\alpha = i \frac{2t}{l} e^{-i\lambda} \tag{3,38}$$

gegeben. Dabei bedeutet t/l das Teilungsverhältnis und λ den Staffelungswinkel des Gitters. Die Moduln sind also allgemein komplex und da man die Tafeln elliptischer Integrale mit komplexen Moduln laufend nicht zur Verfügung hat, haben wir die erforderlichen Werte selbst berechnen müssen, was mit Hilfe bekannter Entwicklungen der ϑ-Funktionen geschah und keine besondere Schwierigkeiten bereitete. Schreibt man die Veränderliche α in der Form

$$\alpha = 2ie^{\ln t/l - i\lambda} \tag{3,39}$$

so sieht man, es wäre von Vorteil, die Funktionen für solche Teilungsverhältnisse t/l und Staffelungswinkel λ zu tabellarisieren, damit sie im $\ln t/l$ und λ äquidistant seien, denn dann wird man einheitliche Interpolationsformeln und annähernd die gleiche Interpolationsgenauigkeit im ganzen tabellarisierten Bereich erzielen. In der Tabelle 1 werden die Werte der elliptischen Integrale Y und Z für Teilungsverhältnisse $t/l = \frac{1}{2}$, $1/\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$ und 2 und für die Staffelungswinkel $\lambda = 0, \pi/6, \pi/3$ bzw. $\pi/2$ angeführt.

4. ZWEI NÄHERUNGSVERFAHREN ZUR BERECHNUNG VON FUNKTIONEN $J_{kn}(\alpha)$ FÜR GROSSE $N = k + n$

Mit anwachsendem $N = k + n$ konvergieren die Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ zur Null. Durch die Formeln (3,35) werden sie aber als Differenz grosser Zahlen gegeben und deshalb eignen sich diese Formeln für die praktische Berechnung im Falle der grösseren N nicht. In diesem Paragraphen werden wir zwei Näherungsverfahren zur Berechnung dieser Funktionen angeben. Wir beschränken uns, wie vorher, nur auf die Berechnung von $J_{0n}(\alpha)$; die restlichen Funktionen $J_{kn}(\alpha)$ werden dann mit Hilfe der Formeln (2,17) bestimmt. Das erste Verfahren eignet sich für $4 \leqq n \leqq 9$. Das zweite Verfahren, das einfacher ist als das erste, eignet sich für $n \geqq 9$. Für kleinere n liefert das zweite Verfahren nicht so genaue Werte wie das erste, hauptsächlich in den Fällen, wo die beiden Wurzeln z_1 und z_2 (3,7) und (3,8) nahe nebeneinander liegen.

a) Das erste Verfahren.

Wie es schon früher (3,4) bis (3,8) ausführlich gezeigt wurde, liegen zwei Wurzeln z_1 und z_2 des Polynoms X innerhalb und die übrigen zwei Wurzeln z_3 und z_4 ausserhalb des Einheitskreises. Deshalb kann der Integrationsweg im Integral (3,4)

$$(4,1) \qquad J_{0n} = -\frac{2i}{\pi} \oint\limits_{|z|=1} \frac{z^n \, dz}{\sqrt{X}}$$

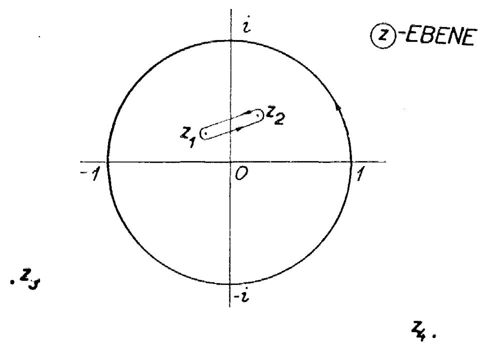

Abb. 4.

auf die zweimal durchgelaufene Strecke $\overline{z_1 z_2}$ zusammengezogen werden. (Abb. 4. Beim Übergang von einem Ufer der Strecke $\overline{z_1 z_2}$ auf das andere um den Punkt z_1 oder z_2 herum ändert der Integrand nur das Vorzeichen.):

$$(4,2) \qquad J_{0n} = -\frac{4i}{\pi} \int_{z_2}^{z_1} \frac{z^n \, dz}{\sqrt{X}}.$$

Das Vorzeichen der Quadratwurzel im (4,2) u. w. ist durch die Bemerkung 1 (S. 432) und durch die Deformation des Integrationswegs bestimmt.

Auf der Strecke $\overline{z_1 z_2}$ konvergieren die beiden Potenzreihen

$$(4,3) \qquad \frac{1}{(z - z_3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(z_1 - z_3)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z - z_1}{z_1 - z_3} - \frac{3}{8} \left(\frac{z - z_1}{z_1 - z_3} \right)^2 - \ldots \right],$$

$$(4,4) \qquad \frac{1}{(z - z_4)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(z_2 - z_4)^{\frac{1}{2}}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z - z_2}{z_2 - z_4} - \frac{3}{8} \left(\frac{z - z_2}{z_2 - z_4} \right)^2 - \ldots \right].$$

Der Konvergenzradius der ersten Reihe ist $|z_1 - z_3|$, der zweiten Reihe $|z_2 - z_4|$ (vergl. Abb. 4 und Tab. 2) und deshalb kann man sich in den beiden Reihen nur auf die ersten zwei Glieder beschränken und schreiben

$$(4,5) \qquad \frac{1}{(z - z_3)^{\frac{1}{2}} (z - z_4)^{\frac{1}{2}}} \doteq \frac{1}{(z_1 - z_3)^{\frac{1}{2}} (z_2 - z_4)^{\frac{1}{2}}} \times$$
$$\times \left[1 - \frac{1}{2} \frac{z - z_1}{z_1 - z_3} - \frac{1}{2} \frac{z - z_2}{z_2 - z_4} \right] = \frac{1}{4} (A + Bz),$$

Tabelle 1

t/l	λ	Y	Z
2	0	1,89001266	3,8853931
$\frac{3}{2}$	0	1,82048870	3,8080434
$\sqrt{2}$	0	1,80257260	3,7874755
1	0	1,66925370	3,6259757
$1/\sqrt{2}$	0	1,49149836	3,3863642
$\frac{1}{2}$	0	1,28527534	3,0711567
2	$\pi/6$	1,93143322 − i0,09343712	3,9330366 − i0,0982735
$\frac{3}{2}$	$\pi/6$	1,87490150 − i0,14774048	3,8776072 − i0,1618344
$\sqrt{2}$	$\pi/6$	1,85888860 − i0,16079422	3,8616250 − i0,1781527
1	$\pi/6$	1,7255400 − i0,2429628	3,7211632 − i0,2955160
$1/\sqrt{2}$	$\pi/6$	1,52617926 − i0,30938080	3,4796569 − i0,4304740
$\frac{1}{2}$	$\pi/6$	1,29019066 − i0,33522300	3,135761 − i0,5426422
2	$\pi/3$	2,05045290 − i0,12287364	4,0550255 − i0,1181669
$\frac{3}{2}$	$\pi/3$	2,06514666 − i0,23403128	4,0834410 − i0,2219815
$\sqrt{2}$	$\pi/3$	2,06429376 − i0,26681190	4,0885958 − i0,2529649
1	$\pi/3$	1,96548288 − i0,52664954	4,0708580 − i0,5312137
$1/\sqrt{2}$	$\pi/3$	1,64657080 − i0,73620548	3,8365598 − i0,9240092
$\frac{1}{2}$	$\pi/3$	1,27827354 − i0,76414018	3,3561497 − i1,2259675
2	$\pi/2$	2,14636402	4,1385264
$\frac{3}{2}$	$\pi/2$	2,30414018	4,2712069
$\sqrt{2}$	$\pi/2$	2,36068120	4,3148208

wo noch die Bezeichnungen

$$(4,6)\qquad A = \frac{4}{(z_1 - z_3)^{\frac{1}{2}}(z_2 - z_4)^{\frac{1}{2}}}\left[1 + \frac{1}{2}\frac{z_1}{z_1 - z_3} + \frac{1}{2}\frac{z_2}{z_2 - z_4}\right] =$$

$$= \frac{2}{(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{4}}(\alpha^2 - 2\alpha)^{\frac{1}{4}}}\left[1 + \frac{z_1}{4(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{z_2}{4(\alpha^2 - 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

und

$$(4,7)\qquad B = \frac{-2}{(z_1 - z_3)^{\frac{1}{2}}(z_2 - z_4)^{\frac{1}{2}}}\left[\frac{1}{z_1 - z_3} + \frac{1}{z_2 - z_4}\right] =$$

$$= \frac{-2}{(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{4}}(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{4}}}\left[\frac{1}{4(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{4(\alpha^2 - 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

eingeführt wurden.

Nach (4,5) kann man also in das Integral (4,2) den Ausdruck

$$(4,8)\qquad \frac{1}{\sqrt{X}} \doteq \frac{A + Bz}{4(z - z_1)^{\frac{1}{2}}(z - z_2)^{\frac{1}{2}}}$$

Tabelle 2

t/l	λ	α	z_1	z_2
2	0	$i4{,}000000$	$-0{,}028263+i0{,}116342$	$0{,}028263+i0{,}116342$
$\frac{3}{2}$	0	$i3{,}000000$	$-0{,}046939+i0{,}147749$	$0{,}046939+i0{,}147749$
$\sqrt{2}$	0	$i2{,}828427$	$-0{,}051856+i0{,}154689$	$0{,}051856+i0{,}154689$
1	0	$i2{,}000000$	$-0{,}089821+i0{,}197369$	$0{,}089821+i0{,}197369$
$1/\sqrt{2}$	0	$i1{,}414214$	$-0{,}144400+i0{,}238678$	$0{,}144400+i0{,}238678$
$\frac{1}{2}$	0	$i1{,}000000$	$-0{,}213849+i0{,}272020$	$0{,}213849+i0{,}272020$
2	$\pi/6$	$2{,}000000+i3{,}464100$	$-0{,}070323+i0{,}083152$	$-0{,}036567+i0{,}131482$
$\frac{3}{2}$	$\pi/6$	$1{,}500000+i2{,}598076$	$-0{,}094101+i0{,}101618$	$-0{,}032424+i0{,}180168$
$\sqrt{2}$	$\pi/6$	$1{,}414214+i2{,}449490$	$-0{,}099749+i0{,}105567$	$-0{,}030067+i0{,}191722$
1	$\pi/6$	$1{,}000000+i1{,}732050$	$-0{,}138790+i0{,}129160$	$i0{,}267950$
$1/\sqrt{2}$	$\pi/6$	$0{,}707107+i1{,}224744$	$-0{,}187860+i0{,}151445$	$0{,}064481+i0{,}345730$
$\frac{1}{2}$	$\pi/6$	$0{,}5000000+i0{,}866025$	$-0{,}245856+i0{,}169773$	$0{,}159375+i0{,}405204$
2	$\pi/3$	$3{,}464100+i2{,}000000$	$-0{,}093593+i0{,}042829$	$-0{,}120352+i0{,}102700$
$\frac{3}{2}$	$\pi/3$	$2{,}598076+i1{,}500000$	$-0{,}119151+i0{,}051374$	$-0{,}157875+i0{,}164430$
$\sqrt{2}$	$\pi/3$	$2{,}449490+i1{,}414214$	$-0{,}125003+i0{,}053176$	$-0{,}165316+i0{,}182057$
1	$\pi/3$	$1{,}732050+i1{,}000000$	$-0{,}163830+i0{,}063790$	$-0{,}181391+i0{,}329410$
$1/\sqrt{2}$	$\pi/3$	$1{,}224744+i0{,}707107$	$-0{,}210009+i0{,}073708$	$-0{,}093522+i0{,}503971$
$\frac{1}{2}$	$\pi/3$	$0{,}866025+i0{,}500000$	$-0{,}262690+i0{,}081921$	$0{,}073715+i0{,}611614$
2	$\pi/2$	$4{,}000000$	$-0{,}101021$	$-0{,}171573$
$\frac{3}{2}$	$\pi/2$	$3{,}000000$	$-0{,}127017$	$-0{,}267949$
$\sqrt{2}$	$\pi/2$	$2{,}828427$	$-0{,}132909$	$-0{,}297693$

einsetzen, so dass dieses Integral die Form:

$$(4,9)\qquad J_{0n} \doteq -\frac{i}{\pi}\int_{z_2}^{z_1}\frac{Az^n + Bz^{n+1}}{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}(z-z_2)^{\frac{1}{2}}}\,\mathrm{d}z$$

annehmen wird.

Zuerst berechnet man das Integral

$$(4,10)\qquad \frac{i}{\pi}\int_{z_2}^{z_1}\frac{z^n\,\mathrm{d}z}{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}(z-z_2)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

Der Integrand dieses Integrals hat im Endlichen Singularitäten in den Punkten z_1 und z_2. Statt längs der zweimal genommenen Strecke $\overline{z_1z_2}$ (Abb. 5) kann man

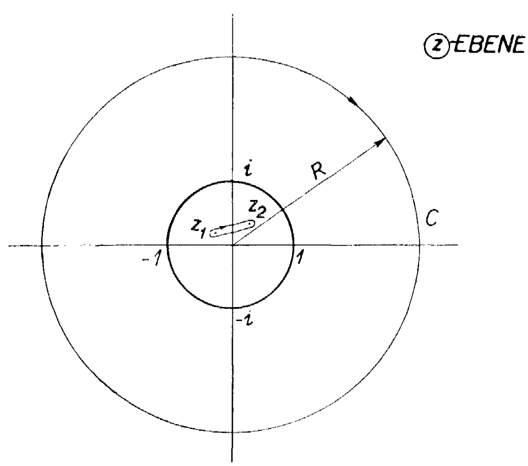

Abb. 5.

längs des Kreises C integrieren. Der Halbmesser des Kreises C sei $R > 1$. Auf dem Kreise C kann man den Integranden in (4,10) in eine Potenzreihe nach den Potenzen $1/z^j$ entwickeln

$$\frac{z^n}{(z - z_1)^{\frac{1}{2}}(z - z_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{z^{n-1}}{(1 - z_1/z)^{\frac{1}{2}}(1 - z_2/z)^{\frac{1}{2}}} = z^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{1}{z^j}\,. \tag{4,11}$$

Aus dieser Entwicklung ergibt sich dann

$$\frac{i}{\pi}\int_{z_2}^{z_1} \frac{z^n \mathrm{d}z}{(z - z_1)^{\frac{1}{2}}(z - z_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{i}{2\pi}\oint\limits_C z^{n-1}\sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\mathrm{d}z}{z^j} = -\,a_n\,. \tag{4,12}$$

Aus den Gleichungen (4,9) und (4,12) ergibt sich schon die Näherungsformel für J_{0n}

$$J_{0n} \doteq Aa_n + Ba_{n+1}\,, \tag{4,13}$$

wo a_n die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklung (4,11) sind. Diese Koeffizienten sind durch die folgenden Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 1\,,\\
a_1 &= \tfrac{1}{2}(z_1 + z_2)\,,\\
a_2 &= \tfrac{3}{8}(z_1 + z_2)^2 - \tfrac{1}{2}z_1z_2\,,\\
a_3 &= \tfrac{5}{16}(z_1 + z_2)^3 - \tfrac{3}{4}(z_1 + z_2)\,z_1z_2\,,\\
a_4 &= \tfrac{35}{128}(z_1 + z_2)^4 - \tfrac{15}{16}(z_1 + z_2)^2\,z_1z_2 + \tfrac{3}{8}(z_1z_2)^2\,,\\
a_5 &= \tfrac{63}{256}(z_1 + z_2)^5 - \tfrac{35}{32}(z_1 + z_2)^3\,z_1z_2 + \tfrac{15}{16}(z_1 + z_2)(z_1z_2)^2\,,\\
a_6 &= \tfrac{231}{1024}(z_1 + z_2)^6 - \tfrac{315}{256}(z_1 + z_2)^4\,z_1z_2 + \tfrac{105}{64}(z_1 + z_2)^2(z_1z_1)^2 -\\
&\quad - \tfrac{5}{16}(z_1z_2)^3\,,\\
a_7 &= \tfrac{429}{2048}(z_1 + z_2)^7 - \tfrac{693}{512}(z_1 + z_2)^5\,z_1z_2 + \tfrac{315}{128}(z_1 + z_2)^3(z_1z_2)^2 -\\
&\quad - \tfrac{35}{32}(z_1 + z_2)(z_1z_2)^3\,,\\
a_8 &= \tfrac{6435}{32768}(z_1 + z_2)^8 - \tfrac{3003}{2048}(z_1 + z_2)^6\,z_1z_2 + \tfrac{3465}{1024}(z_1 + z_2)^4(z_1z_2)^2 -\\
&\quad - \tfrac{315}{128}(z_1 + z_2)^2(z_1z_2)^3 + \tfrac{35}{128}(z_1z_2)^4\,,\\
a_9 &= \tfrac{12155}{65536}(z_1 + z_2)^9 - \tfrac{6435}{4096}(z_1 + z_2)^7\,z_1z_2 + \tfrac{9009}{2048}(z_1 + z_2)^5(z_1z_2)^2 -\\
&\quad - \tfrac{1155}{256}(z_1 + z_2)^3(z_1z_2)^3 + \tfrac{315}{256}(z_1 + z_2)(z_1z_2)^4\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{4,14}$$

Um sich eine Vorstellung über die Grössenordnung des Fehlers, mit dem die Formeln (4,13) behaftet sind, bilden zu können, führt man folgende Betrachtung durch: Nach (4,8) gilt

$$\frac{1}{\sqrt{X}} = \frac{1}{(z - z_1)^{\frac{1}{2}}(z - z_2)^{\frac{1}{2}}}\left[\tfrac{1}{4}(A + Bz) + \delta(z)\right], \tag{4,15}$$

wo $\delta(z)$ der Fehler der annähernden Gleichung (4,5) ist; der Fehler des Näherungswertes der Funktion J_{0n} ist dann

$$\delta J_{0n} = -\frac{4i}{\pi}\int_{z_2}^{z_1}\frac{z^n\,\delta(z)}{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}(z-z_2)^{\frac{1}{2}}}\,dz\,. \tag{4,16}$$

In diesem Integral führt man zuerst eine Transformation der Veränderlichen z durch

$$z = z_2 + (z_1 - z_2)\,t\,, \tag{4,17}$$

mit der man für die Abschätzung des Fehlers folgende Beziehung bekommt

$$|\delta J_{0n}| \leqq \frac{4}{\pi}\int_0^1 \frac{|z^n\,\delta(z)|}{t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{\frac{1}{2}}}\,dt\,. \tag{4,18}$$

Es ist klar, dass die Werte von $|z^n\,\delta(z)|$ in der Umgebung der Punkte z_1 und z_2 den grössten Einfluss auf den Wert des Integrals (4,18) haben werden und deshalb setzt man im Integral (4,18)

$$|z^n\,\delta(z)| \sim |z_2^n\,\delta(z_2)| + \left[|z_1^n\,\delta(z_1)| - |z_2^n\,\delta(z_2)|\right]t\,. \tag{4,19}$$

Nach der Durchführung der Integration bekommt man

$$|\delta J_{0n}| \sim 2\left[|z_1^n\,\delta(z_1)| + |z_2^n\,\delta(z_2)|\right]. \tag{4,20}$$

Es bleibt noch übrig, die Werte von $|\delta(z_1)|$ und $|\delta(z_2)|$ abzuschätzen. Nach (4,5) gilt

$$|\delta(z_1)| = \frac{1}{|(z_1-z_3)^{\frac{1}{2}}(z_2-z_4)^{\frac{1}{2}}|}\left|\left(\frac{z_2-z_4}{z_1-z_4}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 + \frac{1}{2}\,\frac{z_1-z_2}{z_2-z_4}\right| \doteq \tag{4,21}$$

$$\doteq \frac{3}{8}\,\frac{|z_1-z_2|^2}{|(z_1-z_3)^{\frac{1}{2}}(z_2-z_4)^{\frac{1}{2}}|}\cdot\frac{1}{|z_2-z_4|^2} = \frac{3}{64}\,\frac{|z_1-z_2|^2}{|\alpha^2+2\alpha|^{\frac{1}{4}}\,|\alpha^2-2\alpha|^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{|\alpha^2-2\alpha|}\,,$$

und ähnlich für z_2

$$|\delta(z_2)| \doteq \frac{3}{64}\,\frac{|z_1-z_2|^2}{|\alpha^2+2\alpha|^{\frac{1}{4}}\,|\alpha^2-2\alpha|^{\frac{1}{4}}}\cdot\frac{1}{|\alpha^2+2\alpha|}\,. \tag{4,22}$$

Aus (4,20) ergibt sich dann die gesuchte Fehlerabschätzung

$$|\delta J_{0n}| \sim \frac{3}{32}\,\frac{|z_1-z_2|^2}{|\alpha^2+2\alpha|^{\frac{1}{4}}\,|\alpha^2-2\alpha|^{\frac{1}{4}}}\cdot\left[\frac{|z_1|^n}{|\alpha^2-2\alpha|} + \frac{|z_2|^n}{|\alpha^2+2\alpha|}\right].\;{}^{2)} \tag{4,23}$$

b) Das zweite Verfahren.

Die Berechnung der Funktionswerte von $J_{0n}(\alpha)$ nach der Formel (4,13) erfolgt zwar in den meisten Fällen mit ausreichender Genauigkeit, aber sie ist für grosse n verhältnismässig kompliziert. Deshalb wird hier ein anderes Verfahren angegeben, das sich gerade für grosse n gut eignet.

---

[2]) Die Formel (4,23) wurde auf einigen Beispielen, bei denen die genauen Werte von J_{on} bekannt waren, erprobt. Es stellte sich heraus, dass sie für eine Fehlerabschätzung die Werte angibt, die um eine Grössenordnung grösser sind als die wirklichen Werte.

Bei diesem Verfahren deformieren wir den Integrationsweg so, wie es auf der Abb. 6 aufgezeichnet ist. Dann kann man schreiben

$$J_{0n} = -\frac{2i}{\pi} \oint_{|z|=1} \frac{z^n \, \mathrm{d}z}{\sqrt{X}} = -\frac{4i}{\pi} \left[\int_0^{z_1} \frac{z^n \, \mathrm{d}z}{\sqrt{X}} - \int_0^{z_2} \frac{z^n \, \mathrm{d}z}{\sqrt{X}} \right]. \tag{4,24}$$

Die Vorzeichen der beiden Quadratwurzeln werden ähnlich wie im (4,2) durch die Deformation des Integrationsweges bestimmt.

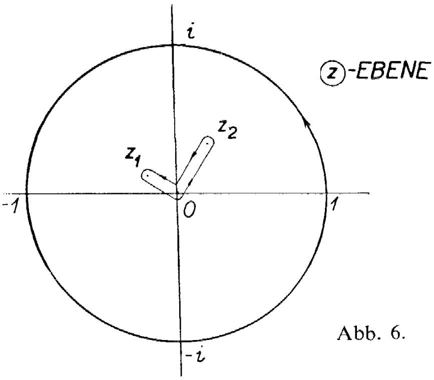

Abb. 6.

Zur Berechnung des Integrals

$$\frac{4i}{\pi} \int_0^{z_1} \frac{z^n \, \mathrm{d}z}{\sqrt{X}} \tag{4,25}$$

nimmt man eine Potenzreihenentwicklung vor

$$\frac{1}{(z - z_2)^{\frac{1}{2}} (z - z_3)^{\frac{1}{2}} (z - z_4)^{\frac{1}{2}}} = A_1 + B_1(z - z_1) + \dots \tag{4,26}$$

Der Konvergenzradius dieser Reihe ist $|z_1 - z_2|$. Wegen (3,5) gilt

$$A_1 = \frac{1}{\sqrt{X'}|_{z=z_1}} = \frac{-i\sqrt{2}}{4\sqrt{z_1}\,(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{4}}}. \tag{4,27}$$

und

$$B_1 = -\frac{X''}{4(X')^{\frac{3}{2}}|_{z=z_1}} = -A_1 \frac{2 + 3z_1 - \alpha^2}{4z_1(\alpha^2 + 2\alpha)^{\frac{1}{2}}}. \tag{4,28}$$

Jetzt setzt man die Entwicklung (4,26), in der man sich auf die zwei ersten Glieder beschränkt, in das Integral (4,25) ein

$$\frac{4i}{\pi} \int_0^{z_1} \frac{z^n \, \mathrm{d}z}{\sqrt{X}} \doteq \frac{4i}{\pi} \int_0^{z_1} \frac{z^n}{(z - z_1)^{\frac{1}{2}}} [A_1 + B_1(z - z_1)] \, \mathrm{d}z. \tag{4,29}$$

Da der Konvergenzradius von (4,26) nur $|z_1 - z_2|$ gleichkommt, liefern die zwei ersten Glieder der Reihe (4,26) annehmbar genaue Werte nur in kleiner Umgebung des Punktes z_1. Auf den Wert des Integrals (4,29) üben infolge des Koeffizienten $z^n/(z - z_1)^{\frac{1}{2}}$ den überwiegenden Einfluss nur die Werte des Integranden in der Umgebung des Punktes z_1 aus und deshalb gibt das Integral auf der rechten Seite von (4,29) einen angenäherten Wert des Integrals (4,25) und zwar auch in den Fällen, wo der Koordinatenanfang ausserhalb des Konvergenzbereichs der Reihe (4,26) liegt. Weiter führt man im Integral (4,29) eine Transformation der Veränderlichen z ein

$$z = z_1 t\,; \tag{4,30}$$

die so entstandenen Integrale kann man dann mit Hilfe der Gamma-Funktionen ausdrücken

$$\frac{4i}{\pi}\int_0^{z_1}\frac{z^n}{(z-z_1)^{\frac{1}{2}}}\left[A_1 + B_1(z-z_1)\right]\mathrm{d}z = \frac{4z_1^{n+\frac{1}{2}}}{\pi}\int_0^1\frac{t^n}{(1-t)^{\frac{1}{2}}}\left[A_1 - z_1 B_1(1-t)\right]\mathrm{d}t =$$

$$= \frac{4z_1^{n+\frac{1}{2}}}{\pi}\left[A_1\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\frac{3}{2})} - z_1 B_1\frac{\Gamma(n+1)\,\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(n+\frac{5}{2})}\right]. \tag{4,31}$$

Durch Einsetzen von (4,27) und (4,28) bekommt man nach kleinen Umformungen

$$\frac{4i}{\pi}\int_0^{z_1}\frac{z^n\,\mathrm{d}z}{\sqrt{X}} \doteq \frac{i2^{2n+\frac{3}{2}}(n!)^2}{\pi(2n+1)!}\cdot\frac{z_1^n}{(\alpha^2+2\alpha)^{\frac{1}{4}}}\left[1 + \frac{1}{2n+3}\cdot\frac{2+3z_1-\alpha^2}{4(\alpha^2+2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right]. \tag{4,32}$$

Die Berechnung des zweiten Integrals in (4,24) erfolgt ganz ähnlich, so dass die Näherungsformel für J_{0n} lautet

$$J_{0n} \doteq \frac{2^{2n+\frac{3}{2}}(n!)^2}{\pi(2n+1)!}\cdot\left\{\frac{iz_1^n}{(\alpha^2+2\alpha)^{\frac{1}{4}}}\left[1+\frac{1}{2n+3}\,\frac{2+3z_1-\alpha^2}{4(\alpha^2+2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right] - \right.$$
$$\left. - \frac{z_2^n}{(\alpha^2-2\alpha)^{\frac{1}{4}}}\left[1 - \frac{1}{2n+3}\cdot\frac{2-3z_2-\alpha^2}{4(\alpha^2-2\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right]\right\}. \tag{4,33}$$

Zweiter Teil

5. DIE BERECHNUNG VON KOEFFIZIENTEN $\Delta_1\mu_{kn}$ UND $\Delta_1\nu_{kn}$ DER GESCHWINDIGKEIT, DIE AUF EINER SCHAUFEL DURCH DIE AUF ZWEI BENACHBARTEN SCHAUFELN VERTEILTEN WIRBELN INDUZIERT WIRD

Die Koeffizienten μ_{kn}, ν_{kn} der induzierten Geschwindigkeit für die Schaufelgitter mit schwach gewölbten Profilen werden mit den Ausdrücken (1) in [2] gegeben, wenn man dort zum Limes für $\omega \to 0$ übergeht. Es ergibt sich

$$\mu_{00} - i\nu_{00} = -\frac{2i}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\cos\vartheta-\cos\chi)(1+\cos\chi)\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + r^2\left(\frac{2t}{l}\right)^2 e^{-2i\lambda}}, \tag{5,1}$$

$$\mu_{0n} - i\nu_{0n} = -\frac{2i}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\cos\vartheta-\cos\chi)\sin n\chi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + r^2\left(\frac{2t}{l}\right)e^{-2i\lambda}}$$

$$\mu_{k0} - i\nu_{k0} = -\frac{4i}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\cos\vartheta-\cos\chi)\cos k\vartheta(1+\cos\chi)\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + r^2\left(\frac{2t}{l}\right)^2 e^{-2i\lambda}},$$

$$\mu_{kn} - i\nu_{kn} = -\frac{4i}{\pi^2}\sum_{r=1}^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\frac{(\cos\vartheta-\cos\chi)\cos k\vartheta\sin n\chi\sin\chi\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + r^2\left(\frac{2t}{l}\right)^2 e^{-2i\lambda}}.$$

Der Bestandteil dieser Koeffizienten, der von den zwei benachbarten Schaufeln herrührt, ist durch das erste Glied dieser Summen gegeben

(5,2)

$$\Delta_1\mu_{00} - i\,\Delta_1\nu_{00} = -\frac{2i}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{(\cos\vartheta - \cos\chi)(1+\cos\chi)\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + \left(\dfrac{2t}{l}\right)^2 e^{-2i\lambda}},$$

$$\Delta_1\mu_{0n} - i\,\Delta_1\nu_{0n} = \frac{i}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{(\cos\vartheta - \cos\chi)\left[\cos(n+1)\chi - \cos(n-1)\chi\right]\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + \left(\dfrac{2t}{l}\right)^2 e^{-2i\lambda}},$$

$$\Delta_1\mu_{k0} - i\,\Delta_1\nu_{k0} = -\frac{4i}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{(\cos\vartheta - \cos\chi)\cos k\vartheta(1+\cos\chi)\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + \left(\dfrac{2t}{l}\right)^2 \mathrm{e}^{-2i\lambda}},$$

$$\Delta_1\mu_{kn} - i\,\Delta_1\nu_{kn} =$$
$$= \frac{2i}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \frac{(\cos\vartheta - \cos\chi)\cos k\vartheta\left[\cos(n+1)\chi - \cos(n-1)\chi\right]}{(\cos\vartheta-\cos\chi)^2 + \left(\dfrac{2t}{l}\right)^2 e^{-2i\lambda}}\,\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Im weiteren wollen wir uns nur mit dem allgemeinen Fall $\Delta_1\mu_{kn} - i\,\Delta_1\nu_{kn}$ (d. i. $k \neq 0$ und $n \neq 0$) beschäftigen. Für die restlichen Fälle, bei denen der Rechnungsvorgang derselbe ist, werden nur die resultierenden Formeln angegeben. Den Integranden in (5,2) zerlegt man in die Summe von zwei Gliedern

$$(5,3)\qquad \Delta_1\mu_{kn} - i\,\Delta_1\nu_{kn} = \frac{i}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi\left\{\frac{\cos k\vartheta\left[\cos(n+1)\chi - \cos(n-1)\chi\right]}{\cos\vartheta - \cos\chi - i\dfrac{2t}{l}e^{-i\lambda}} + \right.$$
$$\left. + \frac{\cos k\vartheta\left[\cos(n+1)\chi - \cos(n-1)\chi\right]}{\cos\vartheta - \cos\chi + i\dfrac{2t}{l}e^{-i\lambda}}\right\}\mathrm{d}\chi\,\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Führt man noch die Bezeichnung (3,38)

$$(5,4)\qquad \alpha = i\,\frac{2t}{l}\,e^{-i\lambda}$$

ein, so gilt nach (2,1)

$$(5,5)\quad \Delta_1\mu_{kn} - i\,\Delta_1\nu_{kn} = -\frac{i}{2}\left[J_{k,n+1}(\alpha) - J_{k,n-1}(\alpha) + J_{k,n+1}(-\alpha) - J_{k,n-1}(-\alpha)\right].$$

Nach (2,12) und (2,13) folgt weiter

$$(5,6)\quad \Delta_1\mu_{kn} - i\,\Delta_1\nu_{kn} = \begin{cases} i\left[J_{k,n-1}(\alpha) - J_{k,n+1}(\alpha)\right] & \text{für}\quad k+n = 2N+1\,,\\ 0 & \text{für}\quad k+n = 2N\,.\end{cases}$$

Durch Zerlegen in den reellen und imaginären Teil ergeben sich die endgültigen Formeln, nach denen die numerische Berechnung erfolgte:

$$(5{,}7)\qquad \begin{aligned} \Delta_1\mu_{00} &= \operatorname{Im} J_{01}\,, & \Delta_1\nu_{00} &= \operatorname{Re} J_{01}\,,\\ \Delta_1\mu_{2k-1,0} &= -\,2\operatorname{Im} J_{0,2k-1}\,, & \Delta_1\nu_{2k-1,0} &= -\,2\operatorname{Re} J_{0,2k-1}\,,\\ \Delta_1\mu_{2k,0} &= -\,2\operatorname{Im} J_{1,2k}\,, & \Delta_1\nu_{2k,0} &= -\,2\operatorname{Re} J_{1,2k}\,, \end{aligned}$$

$$(5{,}8)\qquad \begin{aligned} \Delta_1\mu_{0,2n-1} &= 0\,,\\ \Delta_1\mu_{2k-1,2n-1} &= \operatorname{Im}\left(J_{2k-1,2n} - J_{2k-1,2n-2}\right),\\ \Delta_1\mu_{2k,2n-1} &= 0\,,\\ \Delta_1\nu_{0,2n-1} &= 0\,,\\ \Delta_1\nu_{2k-1,2n-1} &= \operatorname{Re}\left(J_{2k-1,2n} - J_{2k-1,2n-2}\right),\\ \Delta_1\nu_{2k,2n-1} &= 0\,, \end{aligned}$$

$$(5{,}9)\qquad \begin{aligned} \Delta_1\mu_{0,2n} &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Im}\left(J_{0,2n+1} - J_{0,2n-1}\right),\\ \Delta_1\mu_{2k-1,2n} &= 0\,,\\ \Delta_1\mu_{2k,2n} &= \operatorname{Im}\left(J_{2k,2n+1} - J_{2k,2n-1}\right),\\ \Delta_1\nu_{0,2n} &= \tfrac{1}{2}\operatorname{Re}\left(J_{0,2n+1} - J_{0,2n-1}\right),\\ \Delta_1\nu_{2k-1,2n} &= 0\,,\\ \Delta_1\nu_{2k,2n} &= \operatorname{Re}\left(J_{2k,2n+1} - J_{2k,2n-1}\right). \end{aligned}$$

Nach diesen Formeln und mit den Funktionswerten von J_{kn}, die nach der im ersten Teil dieser Arbeit erwähnten Methode berechnet wurden, wurden die Werte der Koeffizienten $\Delta_1\mu_{kn}$ und $\Delta_1\nu_{kn}$ für $t/l = \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, \frac{3}{2}, 2$ und $\lambda = 0, \pi/6, \pi/3$ bzw. $\pi/2$ ermittelt.

Die numerische Berechnung von Koeffizienten $\Delta_1\mu_{kn}$ und $\Delta_1\nu_{kn}$ ist ziemlich kompliziert und damit ist eine erhebliche Gefahr der numerischen Fehler eng verbunden. Es war also eine wirksame Kontrolle der numerischen Berechnungen äusserst erforderlich. Zu dieser Kontrolle hat man die Werte der induzierten Geschwindigkeit, die in der Arbeit [6] berechnet wurden, verwendet. Mit der dort eingeführten Bezeichnung gilt nämlich

$$(5{,}10)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_1\mu_{kn}\cos k\vartheta = \Delta_1 g_{\gamma n}\,,\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_1\nu_{kn}\cos k\vartheta = \Delta_1 f_{\gamma n}$$

und im speziellen für $\vartheta = 0$

$$(5{,}11)\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_1\mu_{k0} = -\operatorname{Im}\left[\frac{z_1}{\alpha} + \frac{z_2}{\alpha}\right],\qquad \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_1\nu_{k0} = -\operatorname{Re}\left[\frac{z_1}{\alpha} + \frac{z_2}{\alpha}\right],$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_1\mu_{kn} = \operatorname{Im}\left[(-1)^n z_1^n + z_2^n\right],\quad \sum_{k=0}^{\infty}\Delta_1\nu_{kn} = \operatorname{Re}\left[(-1)^n z_1^n + z_2^n\right],$$

wo z_1 und z_2 in Tabelle 2 angegeben sind.

6. DIE BERECHNUNG DER KOEFFIZIENTEN DER INDUZIERTEN GESCHWINDIGKEIT

Für grössere Teilungsverhältnisse bzw. für grössere r kann man die in den Ausdrücken (5,1) enthaltenen Integranden in Potenzreihen nach den Potenzen von $1/r^2\alpha^2$ entwickeln und danach die Integration nach χ und ϑ sowie die Summe nach r durchführen. Oder man kann die Resultate der schon erwähnten Arbeit [6] benützen und direkt an die Aufstellung von Formeln herantreten. Für den Einfluss des r-ten Schaufelpaares gilt

$$(6,1) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_r\mu_{kn} \cos k\vartheta = \Delta_r g_{\gamma n}\,, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_r \nu_{kn} \cos k\vartheta = \Delta_r f_{\gamma n}\,,$$

wo $\Delta_r g_{\gamma n}$ und $\Delta_r f_{\gamma n}$ mit den Ausdrücken (15) und (16) in der Arbeit [6] gegeben sind

$$(6,2) \qquad \Delta_r g_{\gamma n} - i\,\Delta_r f_{\gamma n} = -\,i(w_1^n + w_2^n)\,, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

(6,3)

$$\Delta_r g_{\gamma 0} - i\,\Delta_r f_{\gamma 0} = \frac{-\,i(1 + w_1)}{(r^2\alpha^2 + 2r\alpha\cos\vartheta - \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}} + \frac{+\,i(1 + w_2)}{(r^2\alpha^2 - 2r\alpha\cos\vartheta - \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}}\,.$$

In den Ausdrücken (6,2) und (6,3) bedeutet

$$(6,4) \qquad w_{1,2} = \cos\vartheta \pm r\alpha \mp (r^2\alpha^2 \pm 2r\alpha\cos\vartheta - \sin^2\vartheta)^{\frac{1}{2}}\,, \quad |w_1| < 1\,, \quad |w_2| < 1\,,$$

wo die oberen Zeichen für w_1 und die untere für w_2 Geltung haben.

Für ziemlich grosse $|r\alpha|$ kann man die Ausdrücke für w_1 und w_2 in Potenzreihen nach den Potenzen $(r\alpha)^{-n}$ entwickeln

$$(6,5) \qquad w_{1,2} = \cos\vartheta \pm r\alpha \mp r\alpha\left(1 \pm \frac{2\cos\vartheta}{r\alpha} - \frac{\sin^2\vartheta}{r^2\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \pm\, r\alpha\left[\frac{1}{2}\frac{\sin^2\vartheta}{r^2\alpha^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\vartheta}{r\alpha} \mp \frac{\sin^2\vartheta}{2r^2\alpha^2}\right)^2 \mp \frac{1}{2}\left(\frac{\cos\vartheta}{r\alpha} \mp \frac{\sin^2\vartheta}{2r^2\alpha^2}\right)^3 + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{8}\left(\frac{\cos\vartheta}{r\alpha} \mp \frac{\sin^2\vartheta}{2r^2\alpha^2}\right)^4 \mp \frac{7}{8}\left(\frac{\cos\vartheta}{r\alpha} \mp \frac{\sin^2\vartheta}{2r^2\alpha^2}\right)^5 + \ldots\right].$$

Nach einer einfachen Umformung bekommt man

$$(6,6) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} (\Delta_r\mu_{k1} - i\,\Delta_r\nu_{k1}) \cos k\vartheta = \Delta_r g_{\gamma 1} - i\,\Delta_r f_{\gamma 1} = -\,i(w_1 + w_2) =$$

$$= \frac{i}{r^2\alpha^2}\cos\vartheta + \frac{i}{r^4\alpha^4}\left(\frac{3}{2}\cos\vartheta + \frac{1}{4}\cos 3\vartheta\right) + \frac{i}{r^6\alpha^6}\left(\frac{25}{8}\cos\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{15}{16}\cos 3\vartheta + \frac{1}{16}\cos 5\vartheta\right) + \frac{i}{r^8\alpha^8}\left(\frac{245}{32}\cos\vartheta + \frac{49}{16}\cos 3\vartheta + \right.$$

$$\left. + \frac{7}{16}\cos 5\vartheta\right) + \frac{i}{r^{10}\alpha^{10}}\left(\frac{1323}{64}\cos\vartheta + \frac{315}{32}\cos 3\vartheta\right) + \ldots.$$

Die Summe der Ausdrücke (6,6) für r von 1 bis ∞ gibt dann eine Beziehung für die gesuchten Funktionswerte μ_{k1} und ν_{k1} an

$$(6,7) \quad \sum_{k=0}^{\infty} (\mu_{k1} - i\nu_{k1}) \cos k\vartheta = \frac{i}{\alpha^2} \zeta(2) \cos \vartheta + \frac{i}{\alpha^4} \zeta(4) . \left(\frac{3}{2} \cos \vartheta + \frac{1}{4} \cos 3\vartheta\right) +$$
$$+ \frac{i}{\alpha^6} \zeta(6) . \left(\frac{25}{8} \cos \vartheta + \frac{15}{16} \cos 3\vartheta + \frac{1}{16} \cos 5\vartheta\right) + \frac{i}{\alpha^8} \zeta(8) . \left(\frac{245}{32} \cos \vartheta +\right.$$
$$\left. + \frac{49}{16} \cos 3\vartheta + \frac{7}{16} \cos 5\vartheta\right) + \frac{i}{\alpha^{10}} \zeta(10) . \left(\frac{1323}{64} \cos \vartheta + \frac{315}{32} \cos 3\vartheta\right) + \ldots ,$$

wo $\zeta(m)$ die Riemannsche Zetafunktion

$$(6,8) \qquad \zeta(m) = \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^m}$$

ist. Durch Zerlegung der Gleichungen (6,7) auf einen reellen und einen imaginären Teil und durch Vergleich der Koeffizienten von $\cos k\vartheta$ für die gleichen k auf den beiden Seiten der Gleichung (6,7) bekommt man Reihen für die gesuchten μ_{k1} und ν_{k1}. Diese Reihen konvergieren für $|\alpha| = 2t/l > 2$. Um diese Reihen auch für die dichteren Schaufelgitter anwenden zu können und dabei noch eine gute Konvergenz gewährleistet zu haben, wird man den Einfluss einiger naher Schaufelpaare nach den genauen Formeln des vorangehenden Paragraphen berechnen und erst für die restlichen die Reihenentwicklungen verwenden.

Für $t/l = 2, \frac{3}{2}$ und $\sqrt{2}$ wird nur der Einfluss des ersten Schaufelpaares nach den genauen Formeln berechnet. Die Formeln für die Koeffizienten ${}_2\mu_{k1}$ und ${}_2\nu_{k1}$ (die vorangestellte Indexziffer 2 bedeutet, dass die Summe der Ausdrücke (6,6) erst von $r = 2$ ab durchgeführt wurde) ergeben sich aus der Gleichung (6,7), falls man darin $\zeta_2(m)$ anstatt $\zeta(m)$ schreibt

$$(6,9) \qquad \zeta_2(m) = \sum_{r=2}^{\infty} \frac{1}{r^m} = \zeta(m) - 1 .$$

Ganz ähnlich geht man auch bei der Berechnung aller übrigen Koeffizienten ${}_2\mu_{k,n}$ und ${}_2\nu_{k,n}$ vor. Darum werden im weiteren nur die resultierenden Formeln angeführt. In den Formeln wird ausserdem die Bezeichnung $\tau = l/2t$ verwendet.

$$(6,10) \qquad {}_2\mu_{00} = 0{,}64493\tau^2 \sin 2\lambda - 0{,}18523\tau^4 \sin 4\lambda + 0{,}1084\tau^6 \sin 6\lambda -$$
$$- 0{,}0780\tau^8 \sin 8\lambda + 0{,}062\tau^{10} \sin 10\lambda ;$$
$${}_2\mu_{10} = - 1{,}28987\tau^2 \sin 2\lambda + 0{,}37045\tau^4 \sin 4\lambda - 0{,}2168\tau^6 \sin 6\lambda +$$
$$+ 0{,}1561\tau^8 \sin 8\lambda - 0{,}123\tau^{10} \sin 10\lambda ;$$
$${}_2\mu_{20} = - 0{,}12348\tau^4 \sin 4\lambda + 0{,}1084\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}0937\tau^8 \sin 8\lambda +$$
$$+ 0{,}082\tau^{10} \sin 10\lambda ;$$
$${}_2\mu_{30} = 0{,}04116\tau^4 \sin 4\lambda - 0{,}0542\tau^6 \sin 6\lambda + 0{,}0562\tau^8 \sin 8\lambda -$$
$$- 0{,}055\tau^{10} \sin 10\lambda ;$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\mu_{40} &= 0{,}0108\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}0187\tau^8 \sin 8\lambda + 0{,}024\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{50} &= -\,0{,}0022\tau^6 \sin 6\lambda + 0{,}0062\tau^8 \sin 8\lambda - 0{,}010\tau^{10} \sin 10\lambda\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\mu_{01} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{11} &= 0{,}64493\tau^2 \sin 2\lambda - 0{,}12349\tau^4 \sin 4\lambda + 0{,}0542\tau^6 \sin 6\lambda - \\
&\quad - 0{,}0312\tau^8 \sin 8\lambda + 0{,}061\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{21} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{31} &= -\,0{,}02058\tau^4 \sin 4\lambda + 0{,}0163\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}0125\tau^8 \sin 8\lambda + \\
&\quad + 0{,}010\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{41} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{51} &= 0{,}0011\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}0018\tau^8 \sin 8\lambda + 0{,}002\tau^{10} \sin 10\lambda\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\mu_{02} &= -\,0{,}32247\tau^2 \sin 2\lambda + 0{,}08233\tau^4 \sin 4\lambda - 0{,}0406\tau^6 \sin 6\lambda + \\
&\quad + 0{,}0250\tau^8 \sin 8\lambda - 0{,}017\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{12} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{22} &= 0{,}06174\tau^4 \sin 4\lambda - 0{,}0434\tau^6 \sin 6\lambda + 0{,}0312\tau^8 \sin 8\lambda - \\
&\quad - 0{,}024\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{32} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{42} &= -\,0{,}0054\tau^6 \sin 6\lambda + 0{,}0071\tau^8 \sin 8\lambda - 0{,}007\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{52} &= 0\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\mu_{03} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{13} &= -\,0{,}0617\tau^4 \sin 4\lambda + 0{,}049\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}037\tau^8 \sin 8\lambda + \\
&\quad + 0{,}03\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{23} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{33} &= 0{,}011\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}013\tau^8 \sin 8\lambda + 0{,}01\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{43} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{53} &= -\,0{,}001\tau^8 \sin 8\lambda\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\mu_{04} &= 0{,}0103\tau^4 \sin 4\lambda - 0{,}013\tau^6 \sin 6\lambda + 0{,}012\tau^8 \sin 8\lambda - \\
&\quad - 0{,}01\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{14} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{24} &= -\,0{,}011\tau^6 \sin 6\lambda + 0{,}014\tau^8 \sin 8\lambda - 0{,}01\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{34} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{44} &= 0{,}002\tau^8 \sin 8\lambda\,; \\
{}_2\mu_{54} &= 0\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
{}_2\mu_{05} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{15} &= 0{,}005\tau^6 \sin 6\lambda - 0{,}009\tau^8 \sin 8\lambda + 0{,}01\tau^{10} \sin 10\lambda\,; \\
{}_2\mu_{25} &= 0\,; \\
{}_2\mu_{35} &= -\,0{,}002\tau^8 \sin 8\lambda\,; \\
{}_2\mu_{45} &= 0\,.
\end{aligned}
$$

Die Formeln für ${}_2\nu_{kn}$ ergeben sich aus den Formeln für ${}_2\mu_{kn}$ falls man darin $\cos m\lambda$ anstatt $\sin m\lambda$ schreibt.

Werden die Werte der Koeffizienten ${}_2\mu_{k0}$, ${}_2\mu_{k1}$, ${}_2\mu_{k2}$ auf fünf Dezimalstellen und der Koeffizienten ${}_2\mu_{k3}$, ${}_2\mu_{k4}$, ${}_2\mu_{k5}$ auf vier Dezimalstellen berechnet, dann üben die vernachlässigten Glieder keinen Einfluss mehr aus. Für kleinere Teilungsverhältnisse d. i. für $t/l = 1$ und $1/\sqrt{2}$ unter Beibehaltung derselben Genauigkeit muss man die Einwirkung von zwei Schaufelpaaren nach den exakten Formeln berechnen. Die Formeln für ${}_3\mu_{kn}$ und ${}_3\nu_{kn}$ ergeben sich aus den Formeln (6,10), wenn man darin die bei τ^m vorhandenen Koeffizienten mit

$$(6,11) \qquad \frac{\zeta_3(m)}{\zeta_2(m)}$$

multipliziert. Dabei gilt

$$(6,12) \qquad \zeta_3(m) = \sum_{r=3}^{\infty} \frac{1}{r^m} = \zeta(m) - 1 - \frac{1}{2^m}.$$

Für $t/l = \frac{1}{2}$ wird schliesslich die Einwirkung von vier benachbarten Schaufelpaaren nach den exakten Formeln berechnet. Die Formeln für ${}_5\mu_{kn}$ und ${}_5\nu_{k,n}$ ergeben sich ähnlich wie die Formeln für ${}_3\mu_{kn}$ und ${}_3\nu_{kn}$, aus den Formeln (6,10) durch Multiplikation der bei τ^m vorhandenen Koeffizienten mit $\zeta_5(m)/\zeta_2(m)$. Die Werte von $\zeta_3(m)/$ $/\zeta_2(m)$ und $\zeta_5(m)/\zeta_2(m)$ werden in Tabelle 3 angeführt.

Tabelle 3

m	2	4	6	8	10
$\zeta_3(m)/\zeta_2(m)$	0,61236	0,24080	0,09906	0,04197	0,01812
$\zeta_5(m)/\zeta_2(m)$	0,34317	0,04338	0,00589	0,00084	0,00014

Die Teilungsverhältnisse waren so gewählt, dass für jedes Teilungsverhältniss nur die Einwirkung der ersten Schaufelpaares nach den exakten Formeln berechnet werden musste. Bei kleineren Teilungsverhältnissen, bei denen man die Einwirkung von mehreren benachbarten Schaufelpaaren exakt zu berechnen brauchte, ist das zweite Schaufelpaar äquivalent dem ersten Schaufelpaar mit doppeltem Teilungsverhältnis usw.

Zur Kontrolle der numerischen Berechnung wurden, ähnlich wie im vorigen Paragraphen, die Resultate der Arbeit [6] verwendet.

Die resultierenden Werte der Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} werden in den Tabellen 4 und 5 angeführt. Die Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} sind in den Tabellen 4 und 5 nur für die positiven λ angeführt, denn für die negativen λ gelten die Gleichungen

$$(6,13) \qquad \mu_{kn}(-\lambda) = -\mu_{kn}(\lambda), \quad \nu_{kn}(-\lambda) = \nu_{kn}(\lambda).$$

Tabelle 4

k	t/l	$10^4\mu_{k0}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$10^4\nu_{k0}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$10^4\mu_{k1}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
0	0°	—	—	—	—	—	—8814	—5405	—3165	—1766	—946					
	30°	—5944	—3966	—2513	—1477	—810	—7030	—4106	—2221	—1121	—548					
	60°	—10224	—6820	—4127	—2057	—970	—2144	—528	558	708	450					
	90°				—	—				2641	1142					
1	0°	—	—	—	—	—	17627	10809	6329	3533	1892	—	—	—	—	—
	30°	11889	7932	5026	2954	1620	14061	8211	4442	2242	1096	7362	4690	2808	1572	836
	60°	20448	13639	8253	4114	1939	4287	1057	—1115	—1416	—900	12449	7659	4118	1980	944
	90°				—	—				—5282	—2285				—	—
2	0°	—	—	—	—	—	2793	1265	496	168	51					
	30°	2835	1447	590	190	53	1524	413	20	—35	—18					
	60°	4451	1678	—18	—155	—51	—2095	—2195	—1111	—255	—48					
	90°				—	—				480	84					
3	0°	—	—	—	—	—	—219	—196	—109	—45	—15	—	—	—	—	—
	30°	—34	—198	—141	—57	—17	—478	—236	—56	0	4	—511	—262	—104	—33	—9
	60°	—930	—1008	—190	34	16	—1201	43	380	105	19	—899	—287	23	28	9
	90°				—	—				—213	—32				—	—
4	0°	—	—	—	—	—	—183	—82	—25	—6	—1					
	30°	—231	—124	—32	—5	0	—165	—7	17	6	1					
	60°	—941	—42	121	14	1	256	492	40	—11	—2					
	90°				—	—				39	3					
5	0°	—	—	—	—	—	—51	—8	1	1	0	—	—	—	—	—
	30°	—94	—7	5	1	0	35	26	4	0	0	23	13	3	1	0
	60°	86	214	—18	—5	0	549	—46	—40	1	0	127	1	—13	—1	0
	90°				—	—				—14	—1				—	—
6	0°	—	—	—	—	—	—7	2	1	0	0					
	30°	—5	8	1	0	0	35	4	—1	0	0					
	60°	326	—30	—11	1	0	24	—100	10	1	0					
	90°				—	—				3	0					
7	0°	—	—	—	—	—	3	1	—	—	—	—	—	—	—	—
	30°	14	2	—	—	—	4	—3	—	—	—	1	—1	—	—	—
	60°	17	—42	5	—	—	—189	27	1	—	—	—31	4	1	—	—
	90°				—	—				—1	—				—	—
8	0°	—	—	—	—	—	2	—	—	—	—					
	30°	5	—1	—	—	—	—5	—1	—	—	—					
	60°	—108	15	—	—	—	—30	19	—2	—	—					
	90°				—	—				—	—					
9	0°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	30°	—1	—	—	—	—	—2	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	60°	—20	7	—	—	—	61	—9	1	—	—	8	—1	—	—	—
	90°				—	—				—	—				—	—
10	0°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
	30°	—1	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
	60°	33	—5	—	—	—	18	—3	—	—	—					
	90°				—	—				—	—					

$10^4\nu_{k1}$					$10^4\mu_{k2}$					$10^4\nu_{k2}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
					—	—	—	—	—	−4462	−2751	−1610	−894	−477
					−2981	−2033	−1292	−753	−409	−3635	−2112	−1125	−561	−273
					−5345	−3662	−2111	−1020	−481	−1372	−253	374	380	230
								—	—				1267	563
10210	6037	3413	1851	971										
7793	4312	2231	1104	539										
1096	−569	−1113	−835	−474										
			−2401	−1101										
					—	—	—	—	—	1783	759	281	91	27
					1911	886	328	99	27	805	158	−17	−25	−10
					2659	622	−127	−89	−26	−2039	−1523	−557	−116	−23
								—	—				207	39
−496	−225	−87	−29	−9										
−281	−70	−1	7	3										
392	448	192	41	8										
			−74	−13										
					—	—	—	—	—	−214	−70	−17	−4	−1
					−282	−90	−17	−2	0	−23	30	15	4	1
					−259	162	61	5	0	645	231	−8	−6	−1
								—	—				15	1
17	8	3	1	0										
20	1	−2	−1	0										
−23	−59	−3	1	0										
			−4	0										
					—	—	—	—	—	14	4	0	0	0
					26	6	1	0	0	3	−4	−1	0	0
					41	−43	−1	0	0	−130	−10	6	0	0
								—	—				1	0
1	—	—	—	—										
−3	—	—	—	—										
−4	9	−1	—	—										
			—	—										
					—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
					−2	—	—	—	—	−3	—	—	—	—
					−14	8	−1	—	—	30	−2	—	—	—
								—	—				—	—
—	—	—	—	—										
—	—	—	—	—										
2	−1	—	—	—										
			—	—										
					—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
					—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
					5	−2	—	—	—	−8	1	—	—	—
								—	—				—	—

Tabelle 4 *(Forsetzung)*

k	λ \ t/l	$10^4\mu_{k0}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$10^4\nu_{k0}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$10^4\mu_{k1}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
11	0°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	30°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	60°	12	—1	—	—	—	—19	3	—	—	—	—2	—	—	—	—
	90°				—	—				—	—				—	—
12	0°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
	30°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
	60°	—10	1	—	—	—	—9	—	—	—	—					
	90°				—	—				—	—					
13	0°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
	30°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—					
	60°	—6	—	—	—	—	5	—1	—	—	—					
	90°				—	—				—	—					

7. INTERPOLATION IN DEN TABELLEN DER KOEFFIZIENTEN μ_{kn} UND ν_{kn}

Die Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} in der komplexen Form $\mu_{kn} - i\nu_{kn}$ können als komplexe Funktionen einer einzigen komplexen Veränderlichen α angesehen werden. Falls die Veränderliche α in der Form

(7,1) $$\alpha = 2ie^{\ln t/l - i\lambda}$$

geschrieben wird, kann man statt der Veränderlichen α die komplexe Veränderliche

(7,2) $$z = \ln t/l - i\lambda$$

betrachten. Die Punkte, in denen die Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} tabellarisiert wurden, d. i. $t/l = \frac{1}{2}$, $1/\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$ und 2 und $\lambda = 0, \pi/6, \pi/3$ bzw. $\pi/2$ ($\lambda = 0°, 30°, 60°$ bzw. $90°$),[3]) sind in der Ebene z äquidistant, wodurch die Anwendung der einheitlichen Interpolationsformeln für den ganzen tabellarisierten Bereich ermöglicht wird.

Braucht man die Werte der Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} für andere t/l und λ als sie tabellarisiert sind, wird eine Interpolation nach der Lagrangeschen Interpolationsformel im komplexen Bereich aus vier Punkten durchgeführt, für die man die Ecken des Rechtecks in der Ebene $z = \ln t/l - i\lambda$ — in dessen Inneren der betrachtete Fall liegt — wählt. (Auf Abb. 7 ist der Fall $t/l = 0{,}66$; $\lambda = 51°$ abgebildet.) Die Werte der Koeffizienten $\mu_{k,n}$ und $\nu_{k,n}$ sind dann mit folgenden Formeln gegeben

(7,3) $$\mu_{kn} = a_1\mu_{kn}^{\mathrm{I}} + a_2\mu_{kn}^{\mathrm{II}} + a_3\mu_{kn}^{\mathrm{III}} + a_4\mu_{kn}^{\mathrm{IV}} + b_1\nu_{kn}^{\mathrm{I}} + b_2\nu_{kn}^{\mathrm{II}} + b_3\nu_{kn}^{\mathrm{III}} + b_4\nu_{kn}^{\mathrm{IV}},$$

(7,4) $$\nu_{kn} = a_1\nu_{kn}^{\mathrm{I}} + a_2\nu_{kn}^{\mathrm{II}} + a_3\nu_{kn}^{\mathrm{III}} + a_4\nu_{kn}^{\mathrm{IV}} - b_1\mu_{kn}^{\mathrm{I}} - b_2\mu_{kn}^{\mathrm{II}} - b_3\mu_{kn}^{\mathrm{III}} - b_4\mu_{kn}^{\mathrm{IV}},$$

wo $\mu_{kn}^{\mathrm{I}}, \ldots, \mu_{kn}^{\mathrm{IV}}$ und $\nu_{kn}^{\mathrm{I}}, \ldots, \nu_{kn}^{\mathrm{IV}}$ die tabellarisierten Werte in den Ecken des Interpolationsrechtecks darstellen.

[3]) In den Tabellen und in den Interpolationsformeln werden die Winkel in Winkelgraden angegeben.

$10^4\nu_{k1}$					$10^4\mu_{k2}$					$10^4\nu_{k2}$				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
—	—	—	—	—										
—	—	—	—	—										
−1	—	—	—	—										
			—	—										
					—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
					—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
					−2	—	—	—	—	2	—	—	—	—
								—	—				—	—

Die Numerierung von Ecken (die römischen Indexe) ist dieselbe wie die Numerierung der Quadranten in einer kartesianischen Ebene. Die Interpolationskoeffizienten $a_1, \ldots, b_1, \ldots$ sind in Tabelle 7 angeführt.

Die Anordnung der Koeffizienten $\mu_{kn}^{\mathrm{I}}, \ldots, \nu_{kn}^{\mathrm{I}}, \ldots$ in den Tabellen 4, 5 und der Interpolationskoeffizienten $a_1, \ldots, b_1, \ldots$ in der Tabelle 7 ist gleichliegend (Abb. 8 und 9) durchgeführt, so dass eine mechanische Durchführung der Interpolation möglich ist.

B e i s p i e l. Es sind μ_{kn} und ν_{kn} für ein Schaufelgitter mit Teilungsverhältnis $t/l = 0{,}66$ und Staffelungswinkel $\lambda = 51°$ zu bestimmen. Die Interpolationskoeffizienten liest man an der Tabelle 7 für $t/l = 0{,}6598$ und $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_{\mathrm{I}} = 51° - 30° = 21°$ ab.

$$a_1 = 0{,}1232\,; \quad a_2 = 0{,}1768\,; \quad a_3 = 0{,}2568\,; \quad a_4 = 0{,}4432\,;$$
$$b_1 = -\,0{,}1831\,; \quad b_2 = 0{,}0284\,; \quad b_3 = -\,0{,}0283\,; \quad b_4 = 0{,}1929\,.$$

In der Tabelle 4 liest man für $k = 0$ und $n = 0$

$$10^4\mu_{00}^{\mathrm{I}} = -\,3966\,, \quad 10^4\mu_{00}^{\mathrm{II}} = -\,5944\,, \quad 10^4\mu_{00}^{\mathrm{III}} = -\,10224\,, \quad 10^4\mu_{00}^{\mathrm{IV}} = -\,6820\,,$$
$$10^4\nu_{00}^{\mathrm{I}} = -\,4106\,, \quad 10^4\nu_{00}^{\mathrm{II}} = -\,7030\,, \quad 10^4\nu_{00}^{\mathrm{III}} = -\,2144\,, \quad 10^4\nu_{00}^{\mathrm{IV}} = -\,528\,.$$

Nach den Formeln (6,3) und (6,4) ergibt sich folglich

$$10^4\mu_{00} = -\,3966\,.\,0{,}1232 - 5944\,.\,0{,}1768 - 10224\,.\,0{,}2568 - 6820\,.\,0{,}4432 +$$
$$+\,4106\,.\,0{,}1831 - 7030\,.\,0{,}0284 + 2144\,.\,0{,}0283 - 528\,.\,0{,}1829 = -\,6671\,,$$

$$10^4\nu_{00} = -\,4106\,.\,0{,}1232 - 7030\,.\,0{,}1768 - 2144\,.\,0{,}2568 - 528\,.\,0{,}4432 -$$
$$-\,3966\,.\,0{,}1831 + 5944\,.\,0{,}0284 - 10224\,.\,0{,}0283 + 6820\,.\,0{,}1829 = -\,2133\,.$$

Auf dieselbe Weise berechnet man die Werte von μ_{kn} und ν_{kn} für alle k und n.

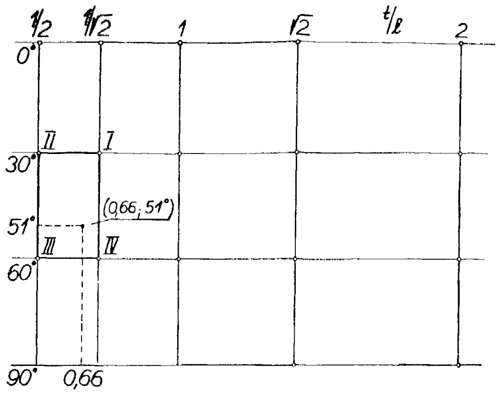

Abb. 7.

λ \ t/l	$10^4\mu_{\lambda n}$ $1/2$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2	$10^4\nu_{\lambda n}$ $1/2$	$1/\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	2
0°										
30°	$\mu_{\lambda n}^{II}$	$\mu_{\lambda n}^{I}$				$\nu_{\lambda n}^{II}$	$\nu_{\lambda n}^{I}$			
60°	$\mu_{\lambda n}^{III}$	$\mu_{\lambda n}^{IV}$				$\nu_{\lambda n}^{III}$	$\nu_{\lambda n}^{IV}$			
90°										

Abb. 8.

$\Delta\lambda$ \ t/l			0,6598 1,3195		0,9330 1,8661			
21°			a_2	a_1	b_2	b_1		
			a_3	a_4	b_3	b_4		

Abb. 9.

Die Koeffizienten $a_1, \ldots, b_1, \ldots$ in Tabelle 7 wurden nach der Lagrangeschen Interpolationsformel im komplexen Bereich durchgeführt. Die genaue Ableitung wird an dieser Stelle weggelassen und man führt nur die resultierenden Ausdrücke für eventuelle Berechnung dieser Koeffizienten in anderen Punkten als denjenigen, in denen sie in der Tabelle 7 angeführt sind, an.

$$a_1 = 0,25 + 0,0495\xi + 0,2670\eta + 0,5432\xi\eta - 0,2265\xi(\xi^2 - 3\eta^2) - \\ - 0,1499\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$a_2 = 0{,}25 - 0{,}0495\xi + 0{,}2670\eta - 0{,}5432\xi\eta + 0{,}2265\xi(\xi^2 - 3\eta^2) - - 0{,}1499\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$a_3 = 0{,}25 - 0{,}0495\xi - 0{,}2670\eta + 0{,}5432\xi\eta + 0{,}2265\xi(\xi^2 - 3\eta^2) + + 0{,}1499\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$a_4 = 0{,}25 + 0{,}0495\xi - 0{,}2670\eta - 0{,}5432\xi\eta - 0{,}2265\xi(\xi^2 - 3\eta^2) + + 0{,}1499\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$b_1 = - 0{,}1061 - 0{,}2670\xi + 0{,}0495\eta - 0{,}2715(\xi^2 - \eta^2) - - 0{,}1499\xi(\xi^2 - 3\eta^2) + 0{,}2265\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$b_2 = 0{,}1061 - 0{,}2670\xi - 0{,}0495\eta + 0{,}2715(\xi^2 - \eta^2) - - 0{,}1499\xi(\xi^2 - 3\eta^2) - 0{,}2265\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$b_3 = - 0{,}1061 + 0{,}2670\xi - 0{,}0495\eta - 0{,}2715(\xi^2 - \eta^2) + + 0{,}1499\xi(\xi^2 - 3\eta^2) - 0{,}2265\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

$$b_4 = 0{,}1061 + 0{,}2670\xi + 0{,}0495\eta + 0{,}2715(\xi^2 - \eta^2) + + 0{,}1499\xi(\xi^2 - 3\eta^2) + 0{,}2265\eta(\eta^2 - 3\xi^2)\,,$$

wo

$$\xi = 7{,}3341[\mathrm{Log}\, t/l - \mathrm{Log}\,(t/l)_0]\,, \quad \eta = 0{,}05559(\lambda_0 - \lambda)\,.^{4)}$$

Tabelle 6

t/l von—bis	$\mathrm{Log}\,(t/l)_0$	λ von—bis	λ_0
$\frac{1}{2}-1/\sqrt{2}$	$-0{,}225773$	$0°-30°$	$15°$
$1/\sqrt{2}-1$	$-0{,}075258$	$30°-60°$	$45°$
$1-\sqrt{2}$	$0{,}075258$	$60°-90°$	$75°$
$\sqrt{2}-2$	$0{,}225773$		

8. ZUSAMMENFASSUNG

In der Arbeit wurde eine Methode für die Berechnung der Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} der induzierten Geschwindigkeiten für Schaufelgitter mit schwach gewölbten Schaufeln abgeleitet. Diese Koeffizienten braucht man bei der Berechnung der Umströmung von Schaufelgittern nach der Methode [1]. Für Teilungsverhältnisse $t/l = \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}$ und 2 und Staffelungswinkel $\lambda = 0°, 30°, 60°$ bzw. $90°$ hat man die Werte dieser Koeffizienten tabellarisiert.

4) Log bedeutet den dekadischen Logarithmus, der Winkel λ wird in Winkelgrad angegeben.

Tabelle 5

Achtung! Die Werte von μ_{kn} und ν_{kn} sind in dieser Tabelle mit 10^3 multipliziert und nicht mit 10^4 wie es in der vorigen Tabelle geschah

		$10^3\mu_{k3}$					$10^3\nu_{k3}$				
k	λ \ t/l	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
0	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
1	0°	—	—	—	—	—	—149	—67	—26	—9	—3
	30°	—153	—79	—31	—10	—3	— 84	—21	—	2	1
	60°	—270	—86	7	8	3	118	134	58	12	2
	90°				—	—				—22	—4
2	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
3	0°	—	—	—	—	—	51	16	4	1	—
	30°	66	19	3	—	—	—2	—8	—3	—1	—
	60°	22	—40	—12	—1	—	—151	—41	3	1	—
	90°				—	—				—3	—
4	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
5	0°	—	—	—	—	—	—8	—2	—	—	—
	30°	—12	—2	—	—	—	4	2	—	—	—
	60°	20	13	—	—	—	39	—3	—2	—	—
	90°				—	—				—	—
6	0°										
	30°										
	60°										
	90°										

		$10^3\mu_{k4}$					$10^3\mu_{k4}$				
k	λ \ t/l	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
0	0°	—	—	—	—	—	4	5	3	1	—
	30°	—2	5	4	1	—	13	7	1	—	—
	60°	25	31	4	—1	—	44	—2	—10	—3	—
	90°				—	—				5	1
1	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
2	0°	—	—	—	—	—	—43	—14	—4	—1	—
	30°	—56	—18	—3	—	—	—5	6	3	1	—
	60°	—52	32	12	1	—	129	46	—1	—1	—
	90°				—	—				3	—
3	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
4	0°	—	—	—	—	—	16	4	—	—	—
	30°	21	3	—	—	—	—11	—4	—1	—	—
	60°	—50	—20	1	—	—	—62	8	3	—	—
	90°				—	—				—	—
5	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
6	0°	—	—	—	—	—	—3	—1	—	—	—
	30°	—4	—	—	—	—	4	1	—	—	—
	60°	26	1	—1	—	—	6	—6	—	—	—
	90°				—	—				—	—

		$10^3\mu_{k5}$					$10^3\nu_{k5}$				
k	λ \ t/l	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\sqrt{2}$	2
0	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
1	0°	—	—	—	—	—	9	4	1	—	—
	30°	11	7	2	—	—	10	1	—1	—	—
	60°	63	1	—7	—1	—	—12	—30	—1	1	—
	90°				—	—				—2	—
2	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
3	0°	—	—	—	—	—	—14	—3	—	—	—
	30°	—19	—3	—	—	—	7	4	1	—	—
	60°	33	21	—	—	—	66	—5	—3	—	—
	90°				—	—				—	—
4	0°										
	30°										
	60°										
	90°										
5	0°	—	—	—	—	—	5	1	—	—	—
	30°	5	—	—	—	—	—7	—1	—	—	—
	60°	—42	—	1	—	—	—1	9	—	—	—
	90°				—	—				—	—
6	0°										
	30°										
	60°										
	90°										

7	0°	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—											—	—	—	—	—	—1	—	—	—	—
	30°	1	—	—	—	—	—1	—	—	—	—											—	—	—	—	—	3	—	—	—	—
	60°	—7	—1	—	—	—	—8	2	—	—	—											12	—3	—	—	—	—10	—1	—	—	—
	90°				—	—				—	—														—	—				—	—
8	0°											—	—	—	—	—	—	—	—	—	—										
	30°											1	—	—	—	—	—1	—	—	—	—										
	60°											—7	1	—	—	—	1	1	—	—	—										
	90°														—	—				—	—										
9	0°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—											—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
	30°	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—											—	—	—	—	—	—1	—	—	—	—
	60°	2	—	—	—	—	2	—	—	—	—											—4	1	—	—	—	3	—	—	—	—
	70°				—	—				—	—														—	—				—	—
10	0°											—	—	—	—	—	—	—	—	—	—										
	30°											—	—	—	—	—	—	—	—	—	—										
	60°											1	—1	—	—	—	—1	1	—	—	—										
	90°														—	—				—	—										

Die tabellarisierten Koeffizienten μ_{kn} und ν_{kn} haben für die Berechnung von Schaufelgittern (sowohl für die Lösung der ersten Hauptaufgabe als auch für die Lösung der zweiten Hauptaufgabe) grundsätzliche Bedeutung. Deswegen wurden die Tabellen mit grosser Genauigkeit berechnet, damit sie auch in extremen Fällen brauchbar seien. Die numerischen Berechnungen wurden sehr sorgfältig vorgenommen und neben den laufenden Kontrollen wurden noch sehr wirksame, von der vorläufigen Berechnung unabhängige Schlusskontrollen verwendet, so dass numerische Fehler in den Tabellen praktisch ausgeschlossen sind.

Die Komponenten der durch Quellen induzierten Geschwindigkeit bekommt man aus den Komponenten der durch Wirbel induzierten Geschwindigkeit bloss durch ein Vertauschen der Komponenten und durch Veränderung des Vorzeichens bei einer von diesen. Deshalb kann man die Tabellen auch für die Berechnung von Schaufelgittern mit Schaufeln von endlicher (nicht vernachlässigbarer) Dicke verwenden.

Literatur

[1] *Polášek J.*: Berechnung der Strömung für Schaufelgitter mit dünnen, stark gewölbten Profilen, Aplikace matematiky, Bd. 3 (1958), S. 325—347.

[2] *Polášek J.*: Zur Berechnung von Koeffizienten induzierter Geschwindigkeit für Schaufelgitter mit stark gewölbten Profilen. Aplikace matematiky, Bd. 6 (1961), S. 73—74.

[3] *Mellor G. L.*: An Analysis of Axial Compressor Cascade Aerodynamics, Part I, Potential Flow Analysis With Complete Solutions for Symmetrically Cambered Airfoil

Tabelle 7

Interpolations

t/l / $\Delta\vartheta$	0,5000 1,0000		0,7071 1,4142		0,5359 1,0718		0,7579 1,5157		0,5743 1,1487		0,8123 1,6245	
0°	1,0000	0	0	0	0,7415	0,1123	−0,1731	0,1537	0,4976	0,2830	−0,2500	0,2403
	0	0	0	0	0,0877	0,0585	−0,0478	0,0672	0,1170	0,1024	−0,0814	0,0911
3°	0,8312	0,1189	0,1679	−0,0437	0,6448	0,1882	−0,0079	0,0631	0,4658	0,3087	−0,0986	0,1138
	−0,0189	0,0688	−0,0923	−0,0320	0,0718	0,0952	−0,0932	0,0380	0,1112	0,1142	−0,0909	0,0757
6°	0,6665	0,2003	0,2818	−0,0608	0,5440	0,2350	0,1087	0,0045	0,4215	0,3136	0,0097	0,0248
	−0,0003	0,1335	−0,1809	−0,0400	0,0850	0,1360	−0,1404	0,0272	0,1264	0,1385	−0,1077	0,0732
9°	0,5102	0,2482	0,3477	−0,0578	0,4432	0,2568	0,1829	−0,0283	0,3688	0,3018	0,0812	−0,0329
	0,0518	0,1898	−0,2595	−0,0305	0,1232	0,1768	−0,1831	0,0284	0,1582	0,1712	−0,1255	0,0772
12°	0,3664	0,2670	0,3722	−0,0408	0,3465	0,2576	0,2212	−0,0417	0,3120	0,2775	0,1222	−0,0656
	0,1330	0,2336	−0,3218	−0,0096	0,1824	0,2135	−0,2150	0,0355	0,2025	0,2080	−0,1381	0,0815
15°	0,2392	0,2608	0,3614	−0,0163	0,2582	0,2418	0,2298	−0,0420	0,2552	0,2448	0,1391	−0,0797
	0,2392	0,2608	−0,3614	0,0163	0,2582	0,2418	−0,2298	0,0420	0,2552	0,2448	−0,1391	0,0797
18°	0,1330	0,2336	0,3218	0,0096	0,1824	0,2135	0,2150	−0,0355	0,2025	0,2080	0,1381	−0,0815
	0,3664	0,2670	−0,3722	0,0408	0,3465	0,2576	−0,2212	0,0417	0,3120	0,2775	−0,1222	0,0656
21°	0,0518	0,1898	0,2595	0,0305	0,1232	0,1768	0,1831	−0,0284	0,1582	0,1712	0,1255	−0,0772
	0,5102	0,2482	−0,3477	0,0578	0,4432	0,2568	−0,1829	0,0283	0,3688	0,3018	−0,0812	0,0329
24°	−0,0003	0,1335	0,1809	0,0400	0,0850	0,1360	0,1404	−0,0272	0 1264	0,1385	0,1077	−0,0732
	0,6665	0,2003	−0,2818	0,0608	0,5440	0,2350	−0,1087	−0,0045	0,4215	0,3136	−0,0097	−0,0248
27°	−0,0189	0,0688	0,0923	0,0320	0,0718	0,0952	0,0932	−0,0380	0,1112	0,1142	0,0909	−0,0757
	0,8312	0,1189	−0,1679	0,0437	0,6448	0,1882	0,0079	−0,0631	0,4658	0,3087	0,0986	−0,1138
30°	0	0	0	0	0,0877	0,0585	0,0478	−0,0672	0,1170	0,1024	0,0814	−0,0911
	1,0000	0	0	0	0,7415	0,1123	0,1731	−0,1537	0,4976	0,2830	0,2500	−0,2403

Families, Journal of Basic Engineering, Transactions of the ASME, Bd. 81 (1959), No. 3, S. 362—378.

[4] *Petr K.*: Počet integrální, JČMF, Praha 1931.

[5] *Jahnke-Emde*: Tafeln höherer Funktionen, Leipzig 1952.

[6] *Polášek J.*: Zur Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ebene Schaufelgitter, Zeitschrift für angew. Mathm. und Mech., Bd. 39 (1959), No. 12, S. 495—501.

Výtah

VÝPOČET KOEFICIENTŮ INDUKOVANÝCH RYCHLOSTÍ PRO LOPATKOVÉ MŘÍŽE SE SLABĚ PROHNUTÝMI PROFILY

JAN POLÁŠEK

V práci [1] „Výpočet obtékání lopatkových mříží s tenkými silně prohnutými profily" byla podána metoda výpočtu potenciálního obtékání lopatkových mříží slokoeffizienten

0,6156		0,8706		0,6598		0,9330		0,7071		1,0000	
1,2311		1,7411		1,3195		1,8661		1,4142		2,0000	
0,2830	0,4976	—0,2403	0,2500	0,1123	0,7415	—0,1537	0,1731	0	1,0000	0	0
0,1024	0,1170	—0,0911	0,0814	0,0585	0,0877	—0,0672	0,0478	0	0	0	0
0,3087	0,4658	—0,1138	0,0986	0,1882	0,6448	—0,0631	0,0079	0,1189	0,8312	0,0437	—0,1679
0,1142	0,1112	—0,0757	0,0909	0,0953	0,0718	—0,0380	0,0932	0,0688	—0,0189	0,0320	0,0923
0,3136	0,4215	—0,0248	—0,0097	0,2350	0,5440	—0,0045	—0,1087	0,2003	0,6665	0,0608	—0,2818
0,1385	0,1264	—0,0732	0,1077	0,1360	0,0850	—0,0272	0,1404	0,1335	—0,0003	0,0400	0,1809
0,3018	0,3688	0,0329	—0,0812	0,2568	0,4432	0,0283	—0,1829	0,2482	0,5102	0,0578	—0,3477
0,1712	0,1582	—0,0772	0,1255	0,1768	0,1232	—0,0284	0,1831	0,1898	0,0518	0,0305	0,2595
0,2775	0,3120	0,0656	—0,1222	0,2576	0,3465	0,0417	—0,2212	0,2670	0,3664	0,0408	—0,3722
0,2080	0,2025	—0,0815	0,1381	0,2135	0,1824	—0,0355	0,2150	0,2336	0,1330	0,0096	0,3218
0,2448	0,2552	0,0797	—0,1391	0,2418	0,2582	0,0420	—0,2298	0,2608	0,2392	0,0163	—0,3614
0,2448	0,2552	—0,0797	0,1391	0,2418	0,2582	—0,0420	0,2298	0,2608	0,2392	—0,0163	0,3614
0,2080	0,2025	0,0815	—0,1381	0,2135	0,1824	0,0355	—0,2150	0,2336	0,1330	—0,0096	—0,3218
0,2775	0,3120	—0,0656	0,1222	0,2576	0,3465	—0,0417	0,2212	0,2670	0,3664	—0,0408	0,3722
0,1712	0,1582	0,0772	—0,1255	0,1768	0,1232	0,0284	—0,1831	0,1898	0,0518	—0,0305	—0,2595
0,3018	0,3688	—0,0329	0,0812	0,2568	0,4432	—0,0283	0,1829	0,2482	0,5102	—0,0578	0,3477
0,1385	0,1264	0,0732	—0,1077	0,1360	0,0850	0,0272	—0,1404	0,1335	—0,0003	—0,0400	—0,1809
0,3136	0,4215	0,0248	0,0097	0,2350	0,5440	0,0045	0,1087	0,2003	0,6665	—0,0608	0,2818
0,1142	0,1112	0,0757	—0,0909	0,0952	0,0718	0,0380	—0,0932	0,0688	—0,0189	—0,0320	—0,0923
0,3087	0,4658	0,1138	—0,0986	0,1882	0,6448	0,0631	—0,0079	0,1189	0,8312	—0,0437	0,1679
0,1024	0,1170	0,0911	—0,0814	0,0585	0,0877	0,0672	—0,0478	0	0	0	0
0,2830	0,4976	0,2403	—0,2500	0,1123	0,7415	0,1537	—0,1731	0	1,0000	0	0

žených z tenkých libovolně prohnutých profilů. Pro praktické používání této metody bylo nutné doplnit ji tabulkami koeficientů μ_{kn} a ν_{kn}. Tyto koeficienty závisí na třech geometrických parametrech: poměrné rozteči t/l, úhlu nastavení λ a prohnutí profilů ω. V této práci je vypracována metoda a jsou provedeny numerické výpočty koeficientů μ_{kn} a ν_{kn} pro málo prohnuté profily, tj. pro $\omega = 0$. Případ $\omega > 0$ bude zpracován později.

Práce je rozdělena na dvě části. V první části jsou odvozeny potřebné funkční závislosti vyjadřující funkce $J_{kn}(\alpha)$ (2,1) komplexní proměnné α pomocí úplných eliptických integrálů (3,35). Pro numerický výpočet hodnot funkcí $J_{kn}(\alpha)$ s velkými koeficienty k, n jsou odvozeny přibližné vzorce (4,13) a (4,33). V druhé části je použito těchto výsledků k numerickému výpočtu koeficientů μ_{kn} a ν_{kn}. Výpočet se provádí ve dvou krocích, nejprve se stanoví příspěvek jednoho nebo několika sousedních párů lopatek (5,7)—(5,9) a pak se k němu přičtou příspěvky od všech ostatních lopatek, pro které jsou odvozeny dobře konvergující rozvoje (6,10). V tabulkách 4 a 5 jsou uvedeny hodnoty koeficientů μ_{kn} a ν_{kn} pro $t/l = \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$ a pro $\lambda = 0, \pi/6, \pi/3$ resp. $\pi/2$.

Tato volba tabelovaných hodnot umožňuje jednoduchou interpolaci v celém tabelovaném oboru, při čemž se využije skutečnosti, že výrazy $\mu_{kn} - i\nu_{kn}$ jsou komplexními funkcemi jediné komplexní proměnné $\ln t/l - i\lambda$.

Резюме

РАСЧЕТ КОЭФФИЦИЕНТОВ ИНДУЦИРОВАННЫХ СКОРОСТЕЙ ДЛЯ ЛОПАТОЧНЫХ РЕШЕТОК СО СЛЕГКА ПРОГНУТЫМИ ПРОФИЛЯМИ

ЯН ПОЛАШЕК (Jan Polášek)

В работе [1] „Расчет обтекания лопаточных решеток с тонкими весьма прогнутыми профилями" был рассмотрен метод расчета потенциального обтекания лопаточных профилей с тонкими произвольно прогнутыми профильями. Для практического применения этого метода представилась необходимость составить таблицы коэффициентов μ_{kn} и ν_{kn}. Эти коэффициенты зависят от трех следующих геометрических параметров: относительного шага t/l, угла установки λ и прогиба профилей ω. В настоящей работе рассматривается метод и производятся числовые расчеты коэффициентов μ_{kn} и ν_{kn} для слегка прогнутых профилей, т. е. для $\omega = 0$. Случай $\omega > 0$ будет разработан позже.

Настоящая работа распадается на две части. В первой части приводятся необходимые функциональные зависимости, выражающие функции $J_{kn}(\alpha)$ (2.1) комплексной переменной α при помощи полных эллиптических интегралов (3.35). Для числовых расчетов значений функций J_{kn} с большими коэффициентами k, n приведены приближенные формулы (4.13) и (4.33). Во второй части работы полученные результаты используются для чусловых расчетов коэффициентов μ_{kn} и ν_{kn}. Расчет осуществляется в два присма, сначала определяется влияние одной или нескольких смежных пар лопаток (5.7)–(5.9), а затем к полученным результатам прибавляются влияния всех остальных лопаток, для которых выведены ряды с хорошей сходимостью (6.10). В таблицах 4 и 5 приводятся значения коэффициентов μ_{kn} и ν_{kn} для $t/l = \frac{1}{2}, 1/\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}, 2$ и для $\lambda = 0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$. Такой выбор табелированных значений дает возможность провести простую интерполяцию во всем диапазоне табелирования, причем используется то обстоятельство, что выражения $\mu_{kn} - i\nu_{kn}$ являются комплексными функциями единственной комплексной переменной $\ln t/l - i\lambda$.