Aplikace matematiky

Jiří Drbohlav

Poznámka o dekadických číslicových kódech

Aplikace matematiky, Vol. 7 (1962), No. 5, 393–398

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102821

POZNÁMKA O DEKADICKÝCH ČÍSLICOVÝCH KÓDECH

JIŘÍ DRBOHLAV

(Došlo dne 14. června 1961.)

V poznámce jest provedena klasifikace některých dekadických číslicových kódů. Zejména tzv. komplementární přípustné dekadické číslicové kódy, ze kterých již několika bylo použito v počítačích, jsou sestaveny v tabulce B.

ÚVOD

V číslicových počítačích se čísla zobrazují zpravidla v číselné soustavě o jistém základu, při čemž každá číslice zvolené soustavy se kóduje pomocí určité n-tice bitů (tj. užitím číslic 0, 1). Za číselnou soustavu se obyčejně volí desítková soustava. V následující poznámce si všimneme jednoho z možných způsobů takového kódování čísel.

Definice 1. *Dekadický číslicový kód (d-kód) $C^M[10]$ jest matice typu $[10; M]$, kde $M \geqq 4$ (přir. číslo) jest počet sloupců matice. Prvky matice jsou číslice 0 nebo 1; přitom předpokládáme, že každé dva řádky matice se liší alespoň v jednom prvku. Jednotlivým řádkům matice jsou postupně shora dolů přiřazeny dekadické číslice 0, 1, 2, ..., 9. Přirozené číslo M nazýváme šířkou dekadického číslicového kódu.*

Poznámka 1. Všech d-kódů $C^M[10]$ šířky M jest zřejmě

$$\frac{2^M!}{(2^M - 10)!};$$

z těchto kódů mají důležitost zejména tzv. kódy komplementární.

Definice 2. *Komplementární d-kód $C^M[\overline{10}]$ jest takový d-kód*

$$C^M[10] = \left\| \begin{matrix} x_{0,M-1} & \cdots & x_{0,0} \\ x_{1,M-1} & \cdots & x_{1,0} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{9,M-1} & \cdots & x_{9,0} \end{matrix} \right\|$$

šířky M, pro nějž

$$x_{n,i} = \bar{x}_{9-n,i}$$

pro $i = M - 1, M - 2, \ldots, 0$ a kde $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Přitom operace $\overline{}$ *jest definována*

$$\bar{x} = \begin{cases} 0, & je\text{-}li\ x = 1\,, \\ 1, & je\text{-}li\ x = 0\,. \end{cases}$$

Poznámka 2. Všech komplementárních d-kódů $C^M\ [\overline{10}]$ šířky M jest zřejmě

$$2^M(2^M - 2)\ldots(2^M - 8)\,.$$

Ze všech možných d-kódů nás budou v dalším zajímati jen takové, z nichž každý lze jednoznačně určiti lineární funkcí $\varphi(n) = \alpha n + \beta$ ($\alpha > 0$, $\beta \geqq 0$ celá čísla), při čemž n jest příslušná dekadická číslice. Při tomto způsobu kódování existují dva problémy, které jsou v dalším vyřešeny; jest stanoven tvar a počet lineárních funkcí určujících tzv.

a) přípustné dekadické číslicové kódy,

b) komplementární přípustné dekadické číslicové kódy.

Definice 3. *Každý d-kód $C^M\ [10]$ šířky M, pro nějž existuje funkce $\varphi(n) = \alpha n + \beta$ (α jest přirozené číslo, β nezáporné celé číslo) a jest*

$$\varphi(n) = \sum_{i=M-1}^{0} x_{n,i} \,.\, 2^i\,,$$

kde $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$ a $i = M - 1, M - 2, \ldots, 0$; obšírně

$$\varphi(0) = \sum_{i=M-1}^{0} x_{0,i} \,.\, 2^i\,,$$

$$\varphi(1) = \sum_{i=M-1}^{0} x_{1,i} \,.\, 2^i\,,$$

$$\vdots$$

$$\varphi(9) = \sum_{i=M-1}^{0} x_{9,i} \,.\, 2^i\,,$$

budeme nazývati přípustným.

Poznámka 3. Funkcí $\varphi(n)$ jest zřejmě jednoznačně určen přípustný d-kód $C^M\ [10]$ šířky M.

Věta 1. *Pro každou funkci $\varphi(n) = \alpha n + \beta$, určující přípustný d-kód $C^M\ [10]$ šířky M,* platí:

I. $n_1 < n_2 \Rightarrow \varphi(n_1) < \varphi(n_2)$,

II. $0 \leqq \varphi(n) \leqq 2^M - 1$ *pro* $n = 0, 1, 2, \ldots, 9$.

Důkaz. Tvrzení I jest zřejmá vlastnost lineární funkce. Pro důkaz tvrzení II položme $x_{0,i} = 0$ pro $i = M - 1, M - 2, \ldots, 1, 0$; pak $\varphi(0) = 0$. Dále položme $x_{9,i} = 1$ pro $i = M - 1, M - 2, \ldots, 1, 0$; pak jest $\varphi(9) = 2^M - 1$. Odtud vzhledem k platnosti tvrzení I platí i II, j. b. d.

Věta 2. *Pro každou šířku $M \geqq 4$ existuje právě m různých funkcí $\varphi(n)$, z nichž každá určuje přípustný d-kód $C^M[10]$ šířky M; pro číslo m přitom platí*

$$m = \sum_{k=1}^{l} (2^M - 9k),$$

při čemž

$$l = \left[\frac{2^M - 1}{9}\right]$$

(symbol [ ] značí celou část čísla).

Důkaz. Položme $n = 9$. Zřejmě jest

$$0 \leqq 9\alpha + \beta \leqq 2^M - 1,$$
$$0 \leqq \beta \leqq (2^M - 1) - 9\alpha,$$

dále jest

$$\alpha \leqq \left[\frac{2^M - 1}{9}\right].$$

Zvolme $l = [(2^M - 1)/9]$ a odtud máme

$$\begin{aligned} 0 &\leqq \beta \leqq (2^M - 1) - 9 \,.\, 1, \\ 0 &\leqq \beta \leqq (2^M - 1) - 9 \,.\, 2, \\ 0 &\leqq \beta \leqq (2^M - 1) - 9 \,.\, 3, \\ &\vdots \\ 0 &\leqq \beta \leqq (2^M - 1) - 9 \,.\, l, \end{aligned}$$

a tedy

$$m = \sum_{k=1}^{l} (2^M - 9k)$$

pro $l = [(2^M - 1)/9]$, j. b. d.

Sestavme tabulku A všech přípustných d-kódů $C^M[10]$ pro šířky $M = 4$ a $M = 5$.

Tabulka A

M	$\varphi(n)$	m	M	$\varphi(n)$			m
4	n		5	n	$2n$	$3n$	
	$n + 1$			$n + 1$	$2n + 1$	$3n + 1$	
	$n + 2$			$n + 2$	$2n + 2$	$3n + 2$	
	$n + 3$			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
	$n + 4$			$\vdots$	$\vdots$	$3n + 4$	
	$n + 5$			$\vdots$	$2n + 13$		
	$n + 6$	7		$n + 22$			42

Definice 4. *Přípustný d-kód C^M [10] šířky M určený funkcí $\varphi(n)$ se nazývá komplementární, platí-li*

$$\varphi(n) + \varphi(9 - n) = 2^M - 1 \quad pro \quad n = 0, 1, \ldots, 9 .$$

Věta 3. *Budiž dán komplementární přípustný d-kód C^M $[\overline{10}]$ šířky M funkcí $\varphi(n) = \alpha n + \beta$. Pak α jest liché číslo a pro β platí $\beta = 2^M - 1 - 9(2k - 1)/2$, kde $\alpha = 2k - 1$ a $k \leqq (2^M + 8)/18$.*

Důkaz. $\varphi(0) + \varphi(9) = 2^M - 1$ jest liché číslo pro každé M. Dále platí $\varphi(9) = 9\alpha + \varphi(0)$ a tedy $\varphi(0) + \varphi(9) = 9\alpha + 2\varphi(0)$. Vzhledem k předešlému vztahu jest α zřejmě liché číslo pro každé M, j. b. d. Dokažme druhou část věty. Jest

$$\varphi(4{,}5) = 4{,}5\alpha + \beta ;$$

tedy

$$\frac{2^M - 1}{2} = 4{,}5(2k - 1) + \beta$$

a odtud

$$\beta = \frac{2^M - 1 - 9(2k - 1)}{2} .$$

Podle definice 3 platí $\beta \geqq 0$ a tedy

$$2^M - 1 - 9(2k - 1) \geqq 0 ,$$
$$2^M - 1 \geqq 18k - 9 ,$$
$$k \leqq \frac{2^M + 8}{18} ,$$

j. b. d.

Věta 4. *Pro každou šířku $M \geqq 4$ existuje právě r různých komplementárních přípustných d-kódů C^M $[\overline{10}]$. Pro počet r platí*

$$r = \left[\frac{2^M + 8}{18}\right]$$

(symbol [ ] značí celou část čísla).

Důkaz. Plyne ihned z předchozí věty 3.

V následující tabulce B jsou sestaveny podle vztahu pro r ve větě 4 lineární funkce určující komplementární přípustné d-kódy C^M $[\overline{10}]$ pro šířky $M = 4$; 5; 6; 7 a $M = 8$.

Věta 5. *Komplementární přípustný d-kód C^M $[\overline{10}]$, určený funkcí $\varphi(n) = \alpha n + \beta$, pro který platí $\varphi(0) = 0$, existuje. Nejmenší šířka takového kódu se rovná 6.*

Důkaz. Podle věty 3 platí

$$\beta = \frac{2^M - 1 - 9\alpha}{2} ,$$

Tabulka B

M	$\varphi(n)$	r	M	$\varphi(n)$	r
4	$n + 3$	1	8	$n + 123$	
5	$n + 11$			$3n + 114$	
	$3n + 2$	2		$5n + 105$	
6	$n + 27$			$7n + 96$	
	$3n + 18$			$9n + 87$	
	$5n + 9$			$11n + 78$	
	$7n$	4		$13n + 69$	
7	$n + 59$			$15n + 60$	
	$3n + 50$			$17n + 51$	
	$5n + 41$			$19n + 42$	
	$7n + 32$			$21n + 33$	
	$9n + 23$			$23n + 24$	
	$11n + 14$			$25n + 15$	
	$13n + 5$	7		$27n + 6$	14

čili

$$2^M - 1 = 9\alpha\,,$$

$$2^M = 9\alpha + 1\,,$$

a odtud $M = 6$ pro $\alpha = 7$, j. b. d.

Závěrem ukažme dva příklady komplementárních přípustných d-kódů C^M [10] pro šířky $M = 5$ a $M = 6$. Druhý z uvedených příkladů jest kód, jehož existenci jsme dokázali ve větě 5.

1) $\varphi(n) = 3n + 2$

	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	0	1
2	0	1	0	0	0
3	0	1	0	1	1
4	0	1	1	1	0
5	1	0	0	0	1
6	1	0	1	0	0
7	1	0	1	1	1
8	1	1	0	1	0
9	1	1	1	0	1

2) $\varphi(n) = 7n$

	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	1
2	0	0	1	1	1	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	1	1	1	0	0
5	1	0	0	0	1	1
6	1	0	1	0	1	0
7	1	1	0	0	0	1
8	1	1	1	0	0	0
9	1	1	1	1	1	1

Děkuji s. Ing. M. Valachovi, který svými připomínkami při recensi přispěl ke zlepšení této práce.

Резюме

ЗАМЕТКА О ДЕКАДИЧЕСКИХ ЦИФРОВЫХ КОДАХ

ИРЖИ ДРБОГЛАВ (Jiří Drbohlav)

В настоящей заметке произведена классификация некоторых декадических цифровых кодов; каждому из них соответствует определенная линейная функция $\varphi(n) = \alpha n + \beta (\alpha > 0, \beta \geqq 0$ – целые числа). Результаты, вытекающие из теорем $1-5$, составлены преимущественно в таблицу B, в которой имеются и т. н. комплементарные допустимые декадические цифровые коды, из которых некоторые уже были использованы в вычислительных машинах.

Summary

A NOTE ON SOME DECADIC DIGITAL CODES

Jiří Drbohlav

In this note the classification of certain decadic digital codes is performed, which are determined by a linear function of the form $\varphi(n) = \alpha n + \beta (\alpha > 0, \beta \geqq 0$-integers). The attached table B contains in particular the so-called complementary admissible decadic digital codes, some of which have been used in computers.

Adresa autora: *Jiří Drbohlàv*, SVÚTT, Praha 1, Husova 8.