

Aplikace matematiky

Vít Jelínek

Řešení grafů signálových toků maticovou metodou

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 1, 55–63

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102837>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ŘEŠENÍ GRAFŮ SIGNÁLOVÝCH TOKŮ MATICOVOU METODOU

Vít JELÍNEK

(Došlo dne 22. ledna 1962.)

K řešení grafů signálových toků (tj. ke stanovení výsledných přenosů) se používá v podstatě dvou cest: postupné redukce grafu a přímého výpočtu užitím Masonova pravidla. V článku je popsána nová maticová metoda, jejíž hlavní výhoda spočívá v důsledné početní algoritmisaci postupu řešení. Článek je doplněn praktickými příklady ilustrujícími použití této metody.

1. ÚVOD

V novější době se začíná k řešení elektrických obvodů (a analogických obecnějších fyzikálních soustav) používat metody grafů signálových toků. Základy této metody jsou vyloženy v článku [1], kde je též podrobný seznam literatury.

Při řešení obvodu grafem signálových toků se setkáváme v podstatě s následujícími základními úkoly:

a) sestrojení grafu, jenž je grafickým obrazem závislostí mezi jednotlivými veličinami (napětími, proudy a pod.),

b) řešení grafu, tj. stanovení přenosů mezi jednotlivými zřídly a nory, které jsou současně hledanými přenosy uvažovaného obvodu.

Tento článek je příspěvkem k metodice řešení grafů a nezabývá se otázkami jejich konstrukce.

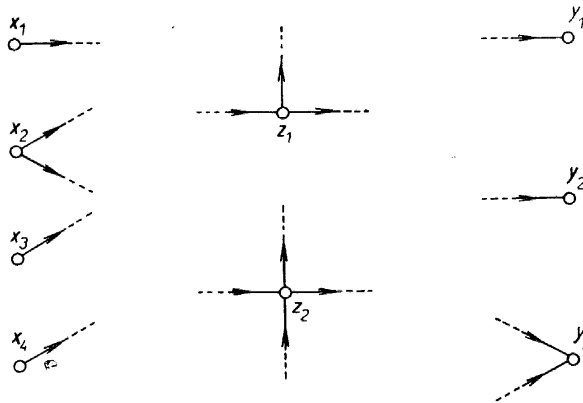
Řešení přímých grafů (tj. takových, které neobsahují smyčky) je záležitostí elementární. K řešení smyčkových grafů se v podstatě užívá dvou metod: metody postupné redukce grafu a přímé metody využívající Masonova pravidla. Postupná redukce je zdoluhavá a vyžaduje několikrát překreslování grafu. Masonova metoda vede sice rychleji k cíli, při jejím použití se však snáze dopustíme chyb.

V tomto článku popíšeme metodu, která celý postup řešení převádí na mechanické výkony s maticemi (sčítání, násobení a inverze) a tím podstatně snižuje možnost vzniku chyb. Pracnost výpočtu odpovídá zhruba metodě Masonově; záleží však podstatně na typu grafu, jak ještě uvedeme. Je to v podstatě metoda, které autor použil v práci [2] k řešení zpětnovazebních obvodů. V uvedeném práci se sice nemluví o grafech signálových toků, ale rozdíly jsou jen formální.

Nyní ještě terminologické poznámky. Stejně jako v práci [1] budeme místo „uzel se signálem x “ říkat stručně „uzel x “, místo „větev s přenosem a “ stručně „větev a “. Dále pak uzly, které nejsou ani zřídly ani nory, budeme nazývat vnitřními uzly.

2. DEFINICE PŘENOSOVÉ MATICE

Nechť je dán libovolný graf, který má n zřidel ($n \geq 1$) x_1, x_2, \dots, x_n , m norů ($m \geq 1$) y_1, y_2, \dots, y_m a q vnitřních uzlů ($q \geq 0$) z_1, z_2, \dots, z_q . Viz obr. 1.



Obr. 1. K definici přenosové matice grafu a k odvození maticové metody řešení: Graf se čtyřmi zřídly, třemi nory a dvěma vnitřními uzly, větve jsou jen naznačeny. Pro přehlednost jsou uzly téhož typu kresleny pod sebou.

O grafu budeme vždy předpokládat, že signály norů a vnitřních uzlů lze jednoznačně určit, jsou-li dány signály zřidel. Poněvadž jde o lineární závislosti, můžeme závislost signálu norů na signálech zřidel vyjádřit maticovou rovnicí

$$(1a) \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n} \\ P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n} \\ \dots \\ P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

nebo zkráceně

$$(1b) \quad \mathbf{y} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{x}.$$

Matice $\mathbf{P} = [P_{ik}]$ se nazývá přenosovou maticí grafu. Její význam je zřejmý. Prvek P_{ik} je celkový přenos ze zřídla x_k do noru y_i .

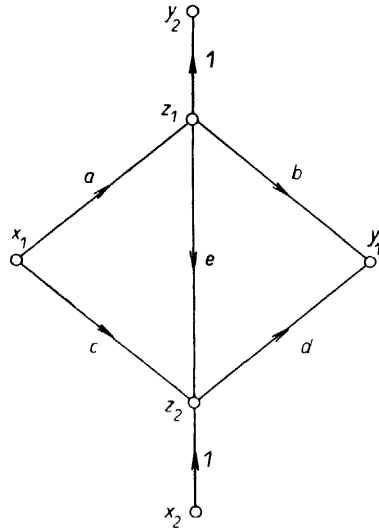
Řešením grafu budeme nadále rozumět stanovení jeho přenosové matice.

3. PŘENOSOVÁ MATICE PŘÍMÉHO GRAFU

Najít přenosovou matici přímého grafu je snadné. Je jen třeba si uvědomit, že přenos P_{ik} je prostě součet přenosů všech přímých cest, které vycházejí ze zřídla x_k a končí v nory y_i .

Uvedeme jednoduchý příklad. Na obr. 2 je přímý graf, který má dvě zřídla x_1, x_2 a dva nory y_1, y_2 .

Jeho přenosová matice je tvaru

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|cc} & x_1 & x_2 \\ \hline y_1 & ab + aed + cd & d \\ \hline y_2 & a & 0 \end{array}$$


Obr. 2. Příklad přímého grafu.

Matice je psána příhrádkovým způsobem. Nad jednotlivými sloupci jsou napsána označení příslušných zřídla, před jednotlivými řádky jsou označení příslušných norů. Tento zápis dává dobrý přehled o významu prvků matice \mathbf{P} . Je to způsob, kterého se často používá v teoretické elektrotechnické literatuře.

4. PŘENOSOVÁ MATICE SMYČKOVÉHO GRAFU

Připomeneme nyní nejdříve dva důležité pojmy týkající se smyčkových grafů.

Číslo udávající nejmenší počet vnitřních uzlů, které je třeba v daném smyčkovém grafu rozštěpit, aby vznikl přímý graf, se nazývá řád grafu. Skupina uzlů, která obsahuje všechna zřídla a nory a dále vnitřní uzly v počtu rovnému řádu grafu tak volené, že jejich rozštěpením vznikne přímý graf, se nazývá skupina residuálních uzlů.

Uvažujme smyčkový graf r -tého řádu ($r \geq 1$) s n zřídly ($n \geq 1$) x_1, x_2, \dots, x_n , m nory ($m \geq 1$) y_1, y_2, \dots, y_m a q vnitřními uzly ($q \geq 1$) z_1, z_2, \dots, z_q . Viz opět obr. 1.

Provedeme volbu skupiny residuálních uzlů. Budeme pro jednoduchost předpokládat, že obsahuje právě prvních r vnitřních uzlů, totiž uzly z_1, z_2, \dots, z_r . Toho lze vždy dosáhnout vhodným očíslováním uzlů. Vnitřní residuální uzly rozštěpíme; z uzlu z_j tak vznikne zřídlo z'_j a nor z''_j ($j = 1, 2, \dots, r$), jak je patrné z obr. 3.



Obr. 3. K odvození maticové metody: Rozštěpení vnitřního residuálního uzlu.

Tím dospíváme k přímému grafu s $n + r$ zřídly a $m + r$ nory. Jeho řešení zapišeme pomocí rozdělených matic

$$(2a) \quad \begin{bmatrix} z''_1 \\ \dots \\ z''_r \\ \dots \\ y_1 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}, \dots, A_{1r} & B_{11}, \dots, B_{1n} \\ \dots & \dots \\ A_{r1}, \dots, A_{rr} & B_{r1}, \dots, B_{rn} \\ \dots & \dots \\ \dots & \dots \\ C_{11}, \dots, C_{1r} & D_{11}, \dots, D_{1n} \\ \dots & \dots \\ C_{m1}, \dots, C_{mr} & D_{m1}, \dots, D_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z'_1 \\ \dots \\ z'_r \\ \dots \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

To napíšeme stručněji

$$(2b) \quad \begin{bmatrix} \mathbf{z}'' \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}, \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}' \\ \mathbf{x} \end{bmatrix}.$$

Z poslední rovnice plyne

$$(3) \quad \begin{aligned} \mathbf{z}'' &= \mathbf{A}\mathbf{z}' + \mathbf{B}\mathbf{x} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}\mathbf{z}' + \mathbf{D}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Jestliže nyní položíme

$$z''_j = z'_j = z_j \quad (j = 1, 2, \dots, r),$$

čili

$$(4) \quad \mathbf{z}'' = \mathbf{z}' = \mathbf{z},$$

odpovídá to tomu, jako bychom opět spojili všechny předtím rozštěpené uzly.

Dosadíme-li do rovnic (3) \mathbf{z} za \mathbf{z}' a \mathbf{z}'' podle (4) a provedeme malou úpravu, dostaneme

$$(5a) \quad (\mathbf{1} - \mathbf{A})\mathbf{z} = \mathbf{B}\mathbf{x},$$

$$(5b) \quad \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{z} = \mathbf{D}\mathbf{x}.$$

Soustava má jediné řešení podle \mathbf{y} a \mathbf{z} , když a jen když je matice

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}, \mathbf{1} - \mathbf{A} \\ \mathbf{1}, -\mathbf{C} \end{bmatrix}$$

regulární. Snadno lze dokázat, že tato matice je regulární, když a jen když je regulární matice $\mathbf{1} - \mathbf{A}$. Poněvadž podle předpokladu uvedeného v oddíle 2 má soustava (5) jediné řešení, je matice $\mathbf{1} - \mathbf{A}$ regulární a existuje matice k ní inverzní $(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$.

Násobme nyní rovnici (5a) maticí $(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$ zleva; dostaneme

$$(6) \quad \mathbf{z} = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}\mathbf{x}.$$

Nyní dosadíme za \mathbf{z} do (5b) a po snadné úpravě dostaneme

$$(7) \quad \mathbf{y} = [\mathbf{C}(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}] \mathbf{x}.$$

Je tedy přenosová matice grafu \mathbf{P} dána vztahem

$$(8) \quad \mathbf{P} = \mathbf{C}(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}.$$

Praktický postup při stanovování přenosové matice je tento:

a) Najdeme rozdělenou přenosovou matici přímého grafu vzniklého rozštěpením zvolených uzlů v tom tvaru, jak je v rovnici (2a).

b) Z této matice určíme přenosovou matici \mathbf{P} původního smyčkového grafu podle vzorce (8).

Obtížnost výpočtu je dána řádem matice $\mathbf{1} - \mathbf{A}$, jejíž inverzi je třeba provádět. Všimněme si, že řád této matice je roven řádu řešeného grafu.

Postup při řešení by bylo možno obměnit tak, že bychom smyčky původního grafu přerušili rozštěpením většího počtu uzlů, než je řád grafu. Tento způsob je nevýhodný, neboť se zbytečně zvyšuje řád matice, jejíž inverzi je třeba provést.

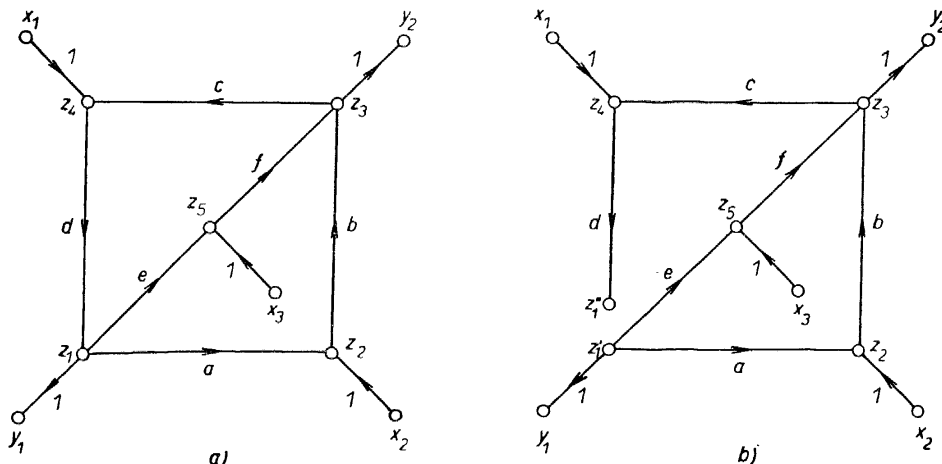
Způsobem, který byl popsán, dostáváme všechny přenosy (prvky přenosové matice) současně. Je však možno počítat kterýkoliv z přenosů bez výpočtu ostatních. Nechť P_{ab} je přenos, který chceme stanovit. Zavedeme-li označení $\mathbf{A}^* = (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1}$, dostáváme na základě (8)

$$(9) \quad [P_{ab}] = [C_{a1}, C_{a2}, \dots, C_{ar}] \begin{bmatrix} A_{11}^*, A_{12}^*, \dots, A_{1r}^* \\ A_{21}^*, A_{22}^*, \dots, A_{2r}^* \\ \dots \dots \dots \dots \\ A_{r1}^*, A_{r2}^*, \dots, A_{rr}^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{1b} \\ B_{2b} \\ \dots \\ B_{rb} \end{bmatrix} + [D_{ab}].$$

Symbole $[P_{ab}]$, $[D_{ab}]$ zde značí bodové matice obsahující jediný prvek – přenos P_{ab} , resp. D_{ab} .

5. PŘÍKLADY

Jako první příklad uvedeme řešení grafu na obr. 4a. Úmyslně volíme nejdříve graf hodně jednoduchý, aby příklad byl instruktivní. Výhodnost metody tu ovšem zvláště nevynikne právě pro jednoduchost grafu.



Obr. 4. a) Smyčkový graf prvního řádu. b) Přímý graf, který vznikne z předchozího grafu rozštěpením uzlu z_1 .

Graf má tři zřídla, dva nory a pět vnitřních uzlů. Označení jednotlivých uzlů je patrné z obrázku a přesně souhlasí s označením, kterého jsme použili v předchozím oddíle. Je vidět, že graf obsahuje dvě smyčky $a-b-c-d$, $c-d-e-f$ a je prvního řádu. K přerušení obou smyček stačí rozštěpit buď uzel z_1 nebo uzel z_3 .

Rozštěpením uzlu z_1 dospějeme k přímému grafu, který je na obr. 4b. Napišeme jeho přenosovou matici

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}, & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}, & \mathbf{D} \end{bmatrix}$$

takto:

	z'_1	x_1	x_2	x_3
z''_1	$(ab+ef)cd$	d	bcd	gcd
y_1	1	0	0	0
y_2	$ab+ef$	0	b	f

Dále je

$$\begin{aligned} (\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} &= \alpha \mathbf{1}, \\ \alpha &= [1 - (ab + ef)cd]^{-1}. \end{aligned}$$

Užitím vztahu (8) dostáváme

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \alpha \begin{bmatrix} d & bcd & gcd \\ (ab+ef)d & (ab+ef)bcd & (ab+ef)gcd \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & f \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po snadné úpravě dospějeme k výsledku

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} & x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & \alpha d & \alpha bcd & \alpha gcd \\ y_2 & \alpha(ab+ef)d & \alpha b & \alpha f \end{bmatrix}.$$

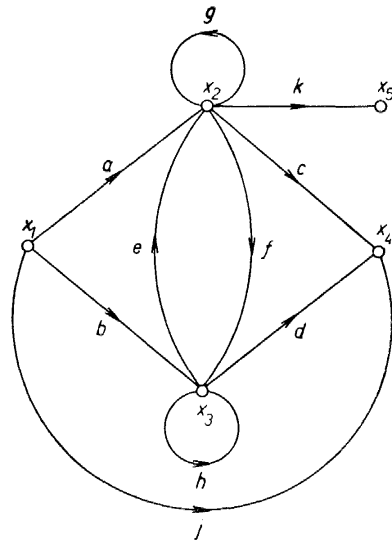
Při řešení grafů není ovšem třeba dodržovat způsob označování signálů, resp. uzlů, kterého jsme používali až dosud. Je možné použít libovolného jiného označení. Dále obvykle není třeba kreslit přímý graf vzniklý rozštěpením uzlů původního grafu; přenosovou matici je možno při troše cviku psát přímo na základě grafu původního. Obojí uvidíme na dalším příkladu.

Jako další příklad uvedeme řešení grafu na obr. 5. Tento graf je rozšířením grafu z práce [1], který je tam řešen Masonovým pravidlem.

Graf má zřídlo x_1 , nory x_4, x_5 , vnitřní uzly x_2, x_3 a je druhého řádu.

Pro řešení rozštěpíme oba vnitřní uzly x_2, x_3 ; z prvního vznikne zřídlo x'_2 , a nor x''_2 , z druhého zřídlo x'_3 a nor x''_3 . Dospějeme tak k přímému grafu, který nebudeme zvlášť kreslit, s přenosovou maticí

	x'_2	x'_3	x_1
x''_2	g	e	a
x''_3	f	h	b
x_4	c	d	j
x_5	k	0	0



Obr. 5. Smyčkový graf druhého řádu.

Dále vypočteme

$$(\mathbf{1} - \mathbf{A})^{-1} = \alpha \begin{bmatrix} 1 - h & e \\ f & 1 - g \end{bmatrix},$$

kde

$$\alpha = [(1 - g)(1 - h) - ef]^{-1}.$$

Užitím vztahu (8) pak po jednoduchém výpočtu dostáváme

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c|c} & x_1 \\ \hline x_4 & j + \alpha[ac(1 - h) + bd(1 - g) + adf + bec] \\ \hline x_5 & \alpha[ak(1 - h) + bek] \end{array}.$$

Přenos x_4/x_1 můžeme ještě upravit na tvar

$$x_4/x_1 = j + \left[\frac{ac}{1-g} + \frac{bd}{1-h} + \frac{afd + bec}{(1-g)(1-h)} \right] : \left[1 - \frac{ef}{(1-g)(1-h)} \right].$$

Vzorec se shoduje se vzorcem (21) z práce [1].

6. ZÁVĚR

Srovnáme nyní podrobněji maticovou metodu s metodou Masonovou.

Výhodou maticové metody je algoritmisace postupu řešení a z toho vyplývající omezení možnosti chyb. Postup se redukuje na základní výkony s maticemi (sčítání, násobení, inverze). Jsou-li přenosy dány numericky, je možno používat účinných numerických metod.

Pracnost maticové metody roste s řádem grafu, pracnost Masonovy metody s počtem smyček.

Obsahuje-li graf malý počet smyček, je výhodnější použít Masonovy metody, která často dovoluje napsat bezprostředně řešení.

Graf, který má velký počet smyček a není příliš vysokého řádu, je výhodnější řešit maticovou metodou.

Má-li graf velký počet smyček a je současně vysokého řádu, není již situace tak zřejmá. Domníváme se, že i v tomto případě bude maticová metoda zpravidla výhodnější pro větší přehlednost a možnost použití numerických metod.

Maticová metoda může vhodně doplnit dosud užívané metody řešení grafů signálových toků.

Literatura

- [1] *Tuero, M.*: Metoda grafů signálových toků. Slabopr. Obz. 20 (1959), čís. 10, str. 608—615.
- [2] *Jelínek, V.*: Příspěvek k obecné teorii zpětné vazby — theorie a použití kombinované negativní a pozitivní zpětné vazby (diplomová práce). Přírodovědecká fakulta university v Brně, Brno 1959.
- [3] *Schmidtmayer, J.*: Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice. SNTL, Praha 1954.

Резюме

РЕШЕНИЕ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ С ПОМОЩЬЮ МАТРИЦ

ВИТ ЕЛИНЕК (Vít Jelínek)

Для решения ориентированных графов применяют в сущности два метода: метод постепенной редукции графа и метод прямого расчета на основании правила Мейсона (Mason).

В статье описывается новый матричный метод, главное преимущество которого заключается в введении удобного алгоритма решения.

Ход решения следующий:

Мы разведем граф в удобных вершинах таким образом, чтобы получить граф, не содержащий петель. Его решение мы представим с помощью клеточных матриц в виде (2a). Матрицу, выражающую решение первоначального графа, можно определить по формуле (8).

Метод дополняет применяемые до сих пор методы решения ориентированных графов.

Summary

SOLUTION OF SIGNAL FLOW GRAPHS BY A MATRIX METHOD

Vít JELÍNEK

Two methods are used for solving signal flow graphs: successive simplification of the graph, and direct computation using Mason's rule.

A new matrix method is described in this paper, whose main advantage consists in introducing an appropriate algorithm.

The process of solution is as follows: The graph is separated in suitable nodes so as to obtain a graph containing no loops. Its solution is expressed by means of partitioned matrices of the form (2a). Then the matrix expressing the solution of the original graph can be determined according to formula (8).

The matrix method supplements the methods currently used for solution of signal flow graphs.

Adresa autora: Vít Jelínek, prom. fys., Rudišova 4, Brno.