Ivo Marek

Řetězová reakce s rychlými neutrony v obohaceném uranu

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 2, 102–117

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/102843`

ŘETĚZOVÁ REAKCE S RYCHLÝMI NEUTRONY V OBOHACENÉM URANU

IVO MAREK

(Došlo dne 2. května 1962.)

Jsou odvozeny některé vlastnosti hustoty sekundárních neutronů, materiálního parametru a reaktivity prostředí, jež tvoří směs isotopů U^{238} a U^{235}. Zejména se ukazuje, že materiální parametr a reaktivita uvažovaného prostředí jsou rostoucími funkcemi obohacení směsi isotopem U^{235}. Tento výsledek plyne z dokazované věty o monotonii dominantního vlastního čísla lineárního operátoru kladného ve smyslu M. G. KREJNA v závislosti na reálném parametru.

1. ÚVOD

V práci [2] se její autoři zabývají možností udržení řetězové reakce v homogenním prostředí vyplněném směsí U^{238} a U^{235}. Rovnice vyjadřující rovnovážný stav hustoty vznikajících neutronů byla sestavena na základě některých zjednodušení fysikálního charakteru. Ukazuje se, že tato zjednodušení jsou přípustná a obdržené výsledky jsou ve shodě jednak s našimi představami o řešeném problému, jednak s výsledky získanými jiným způsobem. Autoři práce [2] řeší problém přibližně, při čemž existenci řešení očekávají intuitivně na základě fysikálního názoru. Ukážeme, že provedeme-li ještě další zjednodušení matematického charakteru, nenarušíme tím podstatu fysikální problematiky a podaří se nám navíc exaktně dokázati existenci řešení položeného problému. Kromě toho se nám podaří dokázati některé vlastnosti řešení, jež mají fysikální význam.

Jaderné reakce, jako na příklad radiační zachycení, pružný a nepružný rozptyl na jádrech, štěpení, mají za následek buď přibývání nebo úbytek neutronů. Aby se v daném prostředí mohla udržeti řetězová reakce, je zřejmě nutné, aby počet vznikajících neutronů nebyl menší než činí jejich úbytek. Budeme se zabývati závislostí hustoty vznikajících neutronů na energii a proto nás budou zajímati jaderné reakce, jež mohou tuto závislost jakýmkoliv způsobem ovlivnit.

Integrální rovnice popisující difuzi neutronů ve vyšetřovaném prostředí má tvar [2]

$$(1.1)\quad \psi(\vec{r}, t, E) = \int_{R_3} \int_{\Omega} \Theta(E, E')\, D(\vec{r}, \vec{r}', E')\, \psi\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{V(E')}, E'\right) \mathrm{d}r'\, \mathrm{d}E' ,$$

kde

$R_3 = \mathscr{E}(\vec{r} \mid \vec{r} = (x, y, z),\ r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} < +\infty)$, $\Omega = \langle E_0, E_\infty \rangle$, $\psi(\vec{r}, t, E)$ je hustota vznikajících neutronů energie E, $V(E)$ je rychlost neutronů. Jádro $\Theta(E, E')$ určuje střední počet neutronů s energií E, vzniklých při srážce[1]) neutronu s výchozí energií E' s jádrem prostředí:

$$\Theta(E, E') = \nu(E') \frac{\sigma_f(E')}{\sigma(E')} S(E) + \frac{\sigma_i(E')}{\sigma(E')} T(E, E') + \frac{\sigma_e(E')}{\sigma(E')} U(E, E') . \tag{1.2}$$

Symbolem σ_l jsou značeny účinné průřezy; $l = c$ pro radiační zachycení, $l = e$ pro pružný rozptyl, $l = i$ pro nepružný rozptyl a $l = f$ pro štěpení. Pro totální účinný průřez σ platí podle definice $\sigma = \sigma_c + \sigma_e + \sigma_{in} + \sigma_f$.

Symbol ν označuje střední počet neutronů vzniklých při jednom štěpení. Symboly S, T, U označují spektra pro štěpení, pro pružný a nepružný rozptyl. Dále

$$D(\vec{r}, \vec{r}', E) = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \Sigma(E) \,.\, \exp\{-\Sigma(E)\,|\vec{r} - \vec{r}'|\} ,$$

při čemž $\Sigma(E)$ značí totální makroskopický účinný průřez.

Pro monoenergetické neutrony, tj. pro neutrony mající stejnou rychlost, se definuje střední počet neutronů na jednu srážku výrazem $\tau = \nu\sigma_f + \sigma_e + \sigma_i$.

V [2] je tato definice zobecněna pro neutrony různých energií v oblasti $\langle E_0, E_\infty \rangle$. Středním počtem neutronů na jednu srážku se míní dominantní vlastní číslo integrálního operátoru definovaného pomocí jádra $\Theta(E, E')$, tedy

$$\tau\, \psi(E) = \int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E')\, \psi(E')\, \mathrm{d}E' . \tag{1.3}$$

V [2] autoři předpokládají, že interval energií (E_0, E_∞) je roven $(0, +\infty)$, avšak vyšetřují pouze neutrony, jejichž energie je kladná a konečná. Jest proto oprávněným předpoklad, aby $E_0 > 0$, $E_\infty < +\infty$.

Podobně jako v [2] budeme předpokládat, že ψ v rovnici (1.1) závisí pouze na jediné prostorové souřadnici x. Při řešení rovnice (1.1) budeme rozlišovati dva případy.

a) Hustota vznikajících neutronů ψ nezávisí na času t (stacionární případ).

b) Hustota vznikajících neutronů ψ nezávisí na prostorových souřadnicích.

V případě a) předpokládáme, že řešení rovnice (1.1) má tvar

$$\psi(x, E) = e^{iBx}\, \tilde{\psi}(E) . \tag{1.4a}$$

V případě b)

$$\psi(t, E) = e^{\gamma t}\, \hat{\psi}(E) , \tag{1.4b}$$

kde B a γ jsou reálné parametry. Veličina B se nazývá materiálním parametrem soustavy a γ reaktivitou prostředí.

---

[1]) Pod pojem srážky je zahrnuto radiační zachycení + štěpení + rozptyl pružný i nepružný.

Pro určení $\tilde{\psi}$ obdržíme po dosazení (1.4a) do (1.1) rovnici

$$\tilde{\psi}(E, B) = \int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E') \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E')}{B/\Sigma(E')} \tilde{\psi}(E', B) \, \mathrm{d}E' . \tag{1.5a}$$

Podobně pro určení $\hat{\psi}$ obdržíme rovnici

$$\hat{\psi}(E, \gamma) = \int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E') \frac{\Sigma(E')}{\Sigma(E') + \gamma/V(E')} \hat{\psi}(E', \gamma) \, \mathrm{d}E' . \tag{1.5b}$$

Funkce S, T, U byly získány empiricky. Naměřené závislosti byly vyjádřeny analyticky takto ([6], str. 81):

$$T(E, E') = \begin{cases} \sigma_\mu(E) \,.\, E \,.\, K(E') \,.\, \exp\{2\sqrt{[a(E' - E)]}\} & \text{pro} \quad E' \geqq E , \\ 0 & \text{pro} \quad E' < E , \end{cases}$$

při čemž $a = 13{,}2$ MeV ([6], str. 69) a σ_μ je účinný průřez pro vznik složeného jádra. Závislost σ_μ byla převzata z [1], str. 348. Normovací činitel $K(E')$ volíme tak, aby $\int_{E_0}^{E'} T(E, E') \, \mathrm{d}E = 1$ pro $E' > E_1$, kde $E_1 > E_0$. Energie E_1 je nejmenší možná energie, při níž může dojít k nepružnému rozptylu.

Pro štěpné spektrum S je

$$S(E) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi e}\right)} \,.\, \exp\{-E\} \,.\, \sinh \sqrt{(2E)} \,.$$

Předpokládá se, že při pružném rozptylu na velmi těžkých jádrech se energie neutronů nemění, tj.

$$U(E, E') = \delta(E - E') ,$$

kde $\delta = \delta(E - E')$ je Diracova δ-funkce.

Definice středního počtu neutronů na jednu srážku má smysl pouze tehdy, jestliže operátor určený jádrem má kladné dominantní vlastní číslo. Jeho existenci lze na základě fysikálních představ očekávati. Dá se ukázati, že za předpokladů, jimž jádro Θ vyhovuje, kladné dominantní vlastní číslo existuje a přísluší kladné vlastní funkci jádra Θ. Důkaz existence tohoto vlastního čísla bude naším prvním úkolem.

Rovnice (1.5a), (1.5b) závisí na reálných parametrech B a γ. Nedá se očekávati, že by pro každou hodnotu B (resp. γ) z přípustného intervalu měla rovnice (1.5a) (resp. 1.5b) nenulové řešení $\tilde{\psi}(E, B)$ (resp. $\hat{\psi}(E, \gamma)$). Vedeni fysikálními představami očekáváme, že bude existovati právě jedno B_0 (resp. γ_0), tak, že rovnice (1.5a) (resp. (1.5b)) má nenulové řešení $\tilde{\psi}(E, B_0)$ (resp. $\hat{\psi}(E, \gamma_0)$). Druhým (resp. třetím) naším úkolem bude dokázati, že rovnice (1.5a) (resp. (1.5b)) tyto očekávané vlastnosti mají.

2. OZNAČENÍ A DEFINICE. FORMULACE ÚLOHY

Buď $\mathscr{X} = \mathscr{C}(\langle E_0, E_\infty \rangle)$, $0 < E_0 < E_\infty < +\infty$, Banachův prostor reálných funkcí spojitých na $\Omega = \langle E_0, E_\infty \rangle$ s normou

$$\|x\| = \operatorname*{Max}_{E \in \Omega} |x(E)| \,.$$

Funkci identicky rovnou nule v Ω označíme symbolem 0. Množina $\mathscr{K}$ funkcí $x \in \mathscr{X}$ se nazývá kuželem v prostoru $\mathscr{X}$, jestliže platí [3]

(α) Je-li $x \in \mathscr{K}$, $y \in \mathscr{K} \Rightarrow x + y \in \mathscr{K}$.

(β) Pro $x \in \mathscr{K}$, $\lambda \geqq 0 \Rightarrow \lambda x \in \mathscr{K}$.

(γ) Je-li $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0 \Rightarrow -x \,\bar{\in}\, \mathscr{K}$.

(δ) Množina $\mathscr{K}$ je uzavřená v $\mathscr{X}$.

Kužel $\mathscr{K}$ se nazývá tělesným, má-li vnitřní prvky.

Dokážeme, že množina nezáporných spojitých funkcí na Ω tvoří tělesný kužel v prostoru $\mathscr{C}(\langle E_0, E_\infty \rangle)$. Buď tedy $\mathscr{K}$ množina nezáporných spojitých funkcí na Ω. Buď funkce u kladná v Ω, tedy $u(E) > 0$ pro všechna $E \in \Omega$. Položme $\delta = \min u(E)$. Podle předpokladu je $\delta > 0$. Je bezprostředně patrné, že funkce $x = u + v$, kde $v \in \mathscr{X}$, $\|v\| < \delta$ patří rovněž do $\mathscr{K}$, takže s funkcí u leží v $\mathscr{K}$ celé její δ-okolí.

Buď $[\mathscr{X}] = (\mathscr{X} \to \mathscr{X})$ Banachův prostor lineárních ohraničených operátorů zobrazujících prostor $\mathscr{X}$ do sebe s obvyklou normou

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| , \quad A \in [\mathscr{X}] .$$

Operátor $A \in [\mathscr{X}]$ se nazývá $\mathscr{K}$-kladným, jestliže pro $x \in \mathscr{K}$ též $Ax = y \in \mathscr{K}$. Operátor $A \in [\mathscr{X}]$ se nazývá silně K-kladným, jestliže pro $x \in K$, $x \neq 0$ existuje přirozené číslo $p = p(x)$ tak, že prvek $T^p x$ je vnitřním prvkem kužele K [3].

Jsou-li $x \in \mathscr{X}$, $y \in \mathscr{X}$ takové funkce, že $y - x = z$ je nezáporná funkce, píšeme $x \prec y$, nebo $y \succ x$; je-li z kladná funkce na Ω, píšeme $z \succ\succ 0$, nebo $y \succ\succ x$.

Buď $\mathfrak{S}$ interval reálných čísel $\langle \beta_0, \beta_\infty \rangle$, $-\infty \leqq \beta_0 < \beta_\infty \leqq +\infty$. Buď na $\mathfrak{S}$ definována operátor-funkce $A = A(\beta)$, přesněji, nechť každému $\beta \in \mathfrak{S}$ je přiřazen operátor $A(\beta) \in [\mathscr{X}]$. Říkáme, že operátor-funkce $A = A(\beta)$ je spojitá v bodě $\beta_0 \in \mathfrak{S}$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ lze najít $\delta > 0$ tak, že je-li $|\beta - \beta_0| < \delta$, potom platí

$$\|A(\beta) - A(\beta_0)\| < \varepsilon .$$

Je-li $A = A(\beta)$ spojitá v každém bodě $\beta \in \mathfrak{S}$. říkáme. že operátor-funkce A je spojitá v $\mathfrak{S}$.

Buď $\tilde{\mathscr{X}} = \tilde{\mathscr{C}}(\langle E_0, E_\infty \rangle)$ komplexní rozšíření prostoru $\mathscr{X}$ [3]. Do prostoru $\tilde{\mathscr{X}}$ patří komplexní funkce $z = x + iy$ spojité na Ω. Norma v $\tilde{\mathscr{X}}$ je definována formulí

$$\|z\|_{\tilde{\mathscr{X}}} = \operatorname*{Max}_{0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi} \|x \cos \vartheta + y \sin \vartheta\| .$$

Operátor $A \in [\mathscr{X}]$ rozšíříme na $\tilde{\mathscr{X}}$ předpisem

$$Az = Ax + iAy , \quad z = x + iy .$$

Zřejmě A zobrazuje $\tilde{\mathscr{X}}$ do sebe. Nechť symbol I označuje identický operátor. Komplexní číslo λ se nazývá regulárním bodem operátoru A, je-li $R(\lambda, A) = (\lambda I - A)^{-1}$ ohraničený lineární operátor definovaný na celém prostoru $\tilde{\mathscr{X}}$. Množina komplexních čísel, jež nejsou regulárními body lineárního operátoru A, se nazývá spektrem operátoru A a označuje se symbolem $\sigma(A)$.

Buď $A \in [\mathscr{X}]$. Číslo $R_A = \sup |\lambda|$, $\lambda \in \sigma(A)$ se nazývá spektrálním poloměrem operátoru A. Je známo, [7], str. 263, že

$$R_A = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

Operátor $A = C + D$ se nazývá operátorem Radona-Nikolského, je-li $D \in [\mathscr{X}]$, C je lineární kompaktní operátor zobrazující $\mathscr{X}$ do sebe a pro spektrální poloměry R_A a R_D platí $R_A > R_D$.

Vlastní číslo μ_0 operátoru $A \in [\mathscr{X}]$, se nazývá dominantním, jestliže nerovnost

$$|\lambda| < |\mu_0|$$

platí pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$, $\lambda \neq \mu_0$.

Při řešení mnoha fysikálních úloh má velký význam ta okolnost, že jádra uvažovaných integrálních rovnic, v našem případě rovnic (1.1), (1.5a), (1.5b), jsou kladná. Ukazuje se, že některé fysikální vlastnosti řešení těchto rovnic jsou důsledkem $\mathscr{K}$-kladnosti vyšetřovaných operátorů.

Zformulujeme nyní úlohy, jejichž řešením se budeme zabývati. Při řešení ukážeme význam $\mathscr{K}$-kladnosti vyšetřovaných operátorů a fysikální interpretaci některých vlastností řešení.

Úloha 1. *Dokázati, že existuje kladné dominantní vlastní číslo rovnice* (1.3) *a jemu přísluší vlastní funkce ψ, jež je kladná v Ω.*

Úloha 2. *Dokázati existenci a jednoznačnost hodnoty B_0, $0 \leqq B_0 < +\infty$, takové, aby integrální rovnice* (1.5a) *měla kladné řešení $\tilde{\psi}(E, B_0)$ pro $E \in \Omega$.*

Úloha 3. *Dokázati existenci a jednoznačnost hodnoty γ_0, $0 \leqq \gamma_0 < +\infty$, takové, aby integrální rovnice* (1.5b) *měla kladné řešení $\hat{\psi}(E, \gamma_0)$ pro $E \in \Omega$.*

Místo řešení úloh 2 a 3 podáme řešení úloh poněkud obecnějších.

Úloha 2'. *Pro každé B z intervalu $\mathfrak{G}_B = \langle 0, B_\infty \rangle$, kde B_∞ je vhodné kladné číslo, dokázati existenci jednoduchého kladného vlastního čísla $\tilde{\tau}(B)$ integrální rovnice*

$$\tilde{\tau}(B)\, \tilde{\psi}(E, B) = \int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E')\, \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E')}{B/\Sigma(E')}\, \tilde{\psi}(E', B)\, \mathrm{d}E'$$

a existenci jemu příslušné kladné vlastní funkce $\tilde{\psi}$. Dokázati, že funkce $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(B)$ je spojitá a klesající v $\mathfrak{G}$, tj. že pro $B' > B$, $B \in \mathfrak{G}$, $B' \in \mathfrak{G}_B$ platí $\tilde{\tau}(B') < \tilde{\tau}(B)$.

Úloha 3'. *Pro každé γ z intervalu $\mathfrak{G}_\gamma = \langle 0, \gamma_\infty \rangle$, kde γ_∞ je vhodné kladné číslo, dokázati, že existuje jednoduché kladné vlastní číslo $\hat{\tau}(\gamma)$ integrální rovnice*

$$\hat{\tau}(\gamma)\, \hat{\psi}(E, \gamma) = \int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E')\, \frac{\Sigma(E')}{\Sigma(E') + \gamma/V(E')}\, \hat{\psi}(E, \gamma)\, \mathrm{d}E'$$

a že mu přísluší vlastní funkce $\hat{\psi}$ kladná v Ω. Dokázati, že funkce $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\gamma)$ je spojitá a klesající v $\mathfrak{G}_\gamma$, tj., že pro $\gamma' > \gamma$, $\gamma \in G_\gamma$, $\gamma' \in \mathfrak{G}_\gamma$ platí $\hat{\tau}(\gamma') < \hat{\tau}(\gamma)$.

Je patrné, že na základě řešení úloh 2' a 3' nutnou a postačující podmínkou, aby rovnice (1.5a) (resp. (1.5b)) měla kladné řešení $\tilde{\psi}$ (resp. $\hat{\psi}$) v Ω jest:

Integrální rovnice

$$\tau\, \psi(E) = \int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E')\, \psi(E')\, \mathrm{d}E'$$

má kladné řešení ψ v Ω a jemu přísluší vlastní číslo $\tau \geqq 1$.

3. OPERÁTORY REPRODUKUJÍCÍ KUŽEL

Než přistoupíme k řešení položených úloh, uvedeme několik vět o $\mathscr{K}$-kladných operátorech, pomocí nichž budeme schopni řešení úloh 1, 2' a 3' podati.

Věta A. *Nechť jsou splněny předpoklady:*

1. *Operátor A se dá vyjádřiti ve tvaru*

$$A = C + D\,,$$

kde $D \in [\mathscr{X}]$ a C je kompaktní lineární operátor zobrazující $\mathscr{X}$ do sebe.

2. *Existuje vektor $u \in \mathscr{K}$*

$$\|u\| = 1\,,$$

přirozené číslo p a $c > 0$ tak, že

$$A^p u \succ cu\,,$$

při čemž

$$\sqrt[p]{c} > R_D\,.$$

Potom má operátor A kladné vlastní číslo μ_0, jemu přísluší vlastní vektor $x_0 \in \mathscr{K}$ a platí

$$|\lambda| \leqq \mu_0 \quad \text{pro} \quad \lambda \in \sigma(A)\,.$$

Věta B. *Buď $\mathscr{K}$ tělesný kužel v $\mathscr{X}$. Je-li A silně $\mathscr{K}$-kladný operátor Radona-Nikolského, potom má operátor A v $\mathscr{K}$ právě jeden vlastní vektor x_0:*

$$Ax_0 = \mu_0 x_0\,, \quad \|x_0\| = 1\,, \quad x_0 \succ\succ 0\,.$$

Odpovídající vlastnímu vektoru x_0 vlastní hodnota μ_0 je jednoduché kladné dominantní vlastní číslo operátoru A.

Věty **A** a **B** jsou zobecněními vět 6.2 a 6.3 v [3], ve kterých se předpokládá, že operátor A je kompaktní.

Abychom dokázali větu A, uvažme, že z podmínky $\sqrt[p]{c} > R_D$ vyplývá, že $R_A > R_D$. Existuje tudíž $\mu_0 \in \sigma(A)$, pro něž $|\mu_0| > R_D$. Bod μ_0 je vlastním číslem operátoru A, neboť vně kruhu $|\lambda| \leqq R_D$ neleží žádné jiné singularity resolventy $R(\lambda, A)$ než póly.

Další část důkazu lze prováděti jako v [3]; podobně důkaz věty **B** lze prováděti jako důkaz věty 6.3 v [3].

Věta C. *Nechť jsou splněny následující předpoklady:*

1. *$A(\beta) = C(\beta) + D(\beta)$ je pro každé $\beta \in \mathfrak{G}$ silně $\mathcal{K}$-kladný operátor Radona-Nikolského, kde $\mathcal{K}$ je tělesný kužel v $\mathcal{X}$.*

2. *Operátor-funkce $A = A(\beta)$ je spojitá v $\mathfrak{G}$.*

3. *Buď $\mu_0(\beta)$ dominantní vlastní číslo operátoru $A(\beta)$.*

Potom je $\mu_0 = \mu_0(\beta)$ spojitou funkcí v $\mathfrak{G}$.

Důkaz. Podle věty **B** existuje pro každé $\beta \in G$ $\mu_0(\beta)$ a vektor $x_0(\beta)$ takový, že

$$A(\beta)\, x_0(\beta) = \mu_0(\beta)\, x_0(\beta)\,.$$

Buď C_η kruh se středem v bodě $\mu_0(\beta)$ o poloměru η takovém, že

$$\bar{C}_\eta \cap \sigma(A(\beta)) = \{\mu_0(\beta)\}\,,$$

při čemž $\bar{C}_\eta$ značí uzávěr množiny C_η. Podle věty 4.1 v [4] existuje $\varepsilon(\eta) > 0$ takové, že každý operátor $A(\beta) + V$, $\|V\| < \varepsilon(\eta)$, má tu vlastnost, že v kruhu C_η leží právě jeden jednoduchý pól resolventy $R(\lambda, A(\beta) + V)$. Ze spojitosti operátor-funkce $A = A(\beta)$ vyplývá, že pro libovolné $\varepsilon > 0$ lze najíti takové $\zeta > 0$, že pro $|\beta - \beta_0| < \zeta$ je

$$\|A(\beta) - A(\beta_0)\| < \varepsilon\,.$$

Lze tudíž výraz $|\mu_0(\beta) - \mu_0(\beta_0)|$ učiniti libovolně malým pro dostatečně malé $|\beta - \beta_0|$.

Věta D. *Předpokládejme, že*

1. *$\mathcal{K}$ je tělesný kužel.*

2. *Pro každé $\beta \in \mathfrak{G}$ je $A(\beta) = C(\beta) + D(\beta)$ silně $\mathcal{K}$-kladný operátor Radona-Nikolského.*

3. *Operátor-funkce $A = A(\beta)$ je spojitá v $\mathfrak{G}$.*

4. *Pro spektrální poloměry $R_{D(\beta)}$, $R_{A(\beta)}$ platí nerovnosti*

$$R_{A(\beta)} \geqq R > R_{D(\beta)}\,, \quad \beta \in \mathfrak{G}\,,$$

při čemž R nezávisí na β.

5. *Pro každý vektor $x \in int\, \mathcal{K}$ ($int\, \mathcal{K}$ značí vnitřek $\mathcal{K}$) platí*

$$[A(\beta) - A(\beta')]\, x \succ \alpha(\beta, \beta')\, x\,,$$

kde $\alpha(\beta, \beta') > 0$ pro $\beta < \beta'$.

Potom pro dominantní vlastní čísla $\mu_0(\beta)$, $\mu_0(\beta')$ operátorů $A(\beta)$, $A(\beta')$ platí

$$\mu_0(\beta') < \mu_0(\beta)\,.$$

Důkaz. Z věty **B** plyne existence dominantní vlastní hodnoty $\mu_0(\beta')$ a vlastního vektoru $x_0(\beta') \succ\succ 0$ takového, že

$$A(\beta')\, x_0(\beta') = \mu_0(\beta')\, x_0(\beta')\,.$$

Podle předpokladu 5 budeme mít

$$A(\beta)\,x_0(\beta') = A(\beta')\,x_0(\beta') + [A(\beta) - A(\beta')]\,x_0(\beta') \succ$$
$$\succ (\mu_0(\beta') + \alpha(\beta, \beta'))\,x_0(\beta')\,.$$

Z předpokladu 4 plyne, že

$$\mu_0(\beta') \geqq R > R_{D(\beta)} \quad \text{pro} \quad \beta \in \mathfrak{G},\ \beta' \in \mathfrak{G}\,.$$

Jsou potom splněny předpoklady věty **A** pro operátor $A(\beta)$. Podle této věty existuje vlastní vektor $x_1(\beta) \in \mathscr{K}$, $\|x_1(\beta)\| = 1$ a jemu přísluší kladné vlastní číslo $\mu_1(\beta)$ a pro ně platí nerovnosti

$$\mu_1(\beta) \geqq \mu_0(\beta') + \alpha(\beta, \beta') > \mu_0(\beta')\,, \quad \mu_1(\beta) \geqq \mu_0(\beta)\,.$$

Z jednoznačnosti $x_0(\beta)$ podle věty **C** vyplývá, že

$$x_1(\beta) = x_0(\beta)\,, \quad \mu_1(\beta) = \mu_0(\beta)\,,$$

a tedy $\mu_0(\beta) > \mu_0(\beta')$ pro $\beta' > \beta$, a to jsme chtěli dokázati.

4. ŘEŠENÍ ÚLOH FORMULOVANÝCH VE DRUHÉM ODSTAVCI

Jádro $\Theta(E, E')$ určuje spojitý lineární operátor A zobrazující prostor $\mathscr{X} = \mathscr{C}(\langle E_0, E_\infty\rangle)$ do sebe. Integrální rovnici (1.3) lze zapsati ve tvaru

$$\tau x = Ax\,, \tag{4.1}$$

kde $A = C + D$, při čemž operátory C a D jsou definovány takto:

$$Cx = y \equiv y(E) = \int_{E_0}^{E_\infty} \left\{ S(E)\,\nu(E')\,\frac{\sigma_f(E')}{\sigma(E')} + \frac{\sigma_i(E')}{\sigma(E')}\,T(E, E') \right\} x(E')\,\mathrm{d}E'\,, \tag{4.2}$$

$$Dx = y \equiv y(E') = \frac{\sigma_e(E')}{\sigma(E')}\,x(E')\,. \tag{4.3}$$

Určíme čísla E_α, E_ω; $E_0 < E_\alpha < E_\omega < E_\infty$ tak, aby nerovnost

$$\frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)} + S(E) \int_{E_0}^{E_\alpha} \nu(E')\,\frac{\sigma_f(E')}{\sigma(E')}\,\mathrm{d}E' + \tag{4.4}$$
$$+ \zeta_\alpha \sigma_\mu(E)\,E \int_{E}^{E_\alpha} K(E')\,.\,\exp\{2\sqrt{[a(E' - E)]}\}\,\frac{\sigma_i(E')}{\sigma(E')}\,\mathrm{d}E' > \sup_{E \in \Omega} \frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)} = s_e$$

platila pro všechny body $E \in \langle E_0, E_\omega\rangle$, při čemž $E_\omega = E_\alpha + \kappa$, kde κ je vhodně zvolené kladné číslo a $\zeta_\alpha = 1$ pro $E \leqq E_\alpha$, jinak $\zeta_\alpha = 0$. Existence čísel E_α, E_ω vyplývá odtud, že nerovnost (4.4) platí pro $E = E_0$ s libovolným E_α [5] a funkce stojící na levé straně nerovnosti (4.4) je spojitá v Ω.

Sestrojme funkci $u \in \mathscr{C}(\langle E_0, E_\infty\rangle)$ pomocí vztahů

$$u(E) = \begin{cases} 1 & \text{pro } E \in \langle E_0, E_\alpha\rangle\,, \\ 0 & \text{pro } E \in \langle E_\omega, E_\infty\rangle\,, \end{cases} \tag{4.5}$$

a doplňme ji lineárně na množině $\langle E_\alpha, E_\omega \rangle$. Pro $E \in \Omega$ platí potom nerovnost

$$(4.6) \qquad \frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)}\, u(E) + S(E) \int_{E_0}^{E_\alpha} \nu(E') \frac{\sigma_f(E')}{\sigma(E')}\, u(E')\, \mathrm{d}E' +$$

$$+ \sigma_\mu(E)\, E \int_E^{E_\infty} K(E') \frac{\sigma_i(E')}{\sigma(E')} \,.\, \exp\{2 \sqrt{[a(E' - E)]}\}\, u(E')\, \mathrm{d}E' > s_e u(E)\,.$$

Nerovnost (4.6) platí totiž pro $E \in \langle E_0, E_\omega \rangle$ vzhledem ke konstrukci funkce u a vzhledem k platnosti (4.4). Pro $E > E_\omega$ platí (4.6) triviálně, neboť $u(E) \equiv 0$, zatímco

$$S(E) \int_{E_0}^{E_\alpha} \nu(E') \frac{\sigma_f(E')}{\sigma(E')}\, u(E')\, \mathrm{d}E' +$$

$$+ \sigma_\mu(E) \,.\, E \,.\, \int_E^{E_\infty} K(E') \frac{\sigma_i(E')}{\sigma(E')} \exp\{2\sqrt{[a(E' - E)]}\}\, u(E')\, \mathrm{d}E' > 0\,.$$

Protože zřejmě $\|u\| = 1$, dokázali jsme existenci vektoru $u \in \mathscr{K}$, $\|u\| = 1$ takového, že platí

$$(4.7) \qquad Au \succ cu\,, \quad c > R_D = s_e\,.$$

Abychom mohli používati tvrzení odstavce druhého, uveďme některé jednoduché vlastnosti kužele nezáporných funkcí v $\mathscr{C}(\langle E_0, E_\infty \rangle)$ a některé vlastnosti operátorů C a D a definovaných v (4.2) a v (4.3).

Lemma 4.1. *Je-li $v \in \mathscr{K}$, potom*

$$(4.8) \qquad d_v = \inf_{x \in \mathscr{K}} \|v + x\| = \|v\|\,.$$

Lemma 4.2. *Operátor $A = C + D$ definovaný pomocí formulí* (4.2) *a* (4.3) *je silně $\mathscr{K}$-kladný, při čemž C je kompaktní operátor.*

Důkaz. Jádro $\Theta(E, E')$ má v $\Omega \times \Omega$ kladné minimum, takže pro libovolný vektor $x \in \mathscr{K}$, $x \neq 0$ platí

$$\int_{E_0}^{E_\infty} \Theta(E, E')\, x(E')\, \mathrm{d}E' \geqq \min_{(E,E') \in \Omega \times \Omega} \Theta(E, E') \int_{E_0}^{E_\infty} x(E')\, \mathrm{d}E' > 0$$

takže $Ax \succ\succ 0$. Kompaktnost operátoru C je známá ([7], str. 276).

Lemma 4.3. *Pro spektrální poloměry R_A, R_D operátorů A a D platí nerovnost*

$$(4.9) \qquad R_A > R_D\,.$$

Důkaz. Nerovnost (4.9) plyne snadno z nerovnosti (4.7) podle věty **A**.

Z lemmat 4.2 a 4.3 plyne, že operátor A je silně $\mathscr{K}$-kladný operátor Radona-Nikolského.

Řešení úlohy 1 obdržíme jako bezprostřední důsledek věty **B**, jejíž předpoklady jsme si ověřili v lemmatech 4.2 a 4.3.

Řešení úlohy 1. *Existuje kladné jednoduché dominantní vlastní číslo τ operátoru A a jemu přísluší kladná v Ω vlastní funkce ψ.*

V odstavci 1 jsme τ nazvali středním počtem neutronů na jednu srážku. Právě jsme dokázali, že je tato definice oprávněná.

Místo integrální rovnice (1.5a) budeme vyšetřovati rovnici

$$\tilde{\tau}(B)\, x(B) = A(B)\, x(B)\,, \tag{4.10}$$

kde

$$A(B) = [C + D]\, F(B)\,, \tag{4.11}$$

při čemž operátory C a D jsou definovány pomocí (4.2) a (4.3) a operátor $F(B)$ definujeme vztahy

$$F(B)\, x = y \equiv y(E) = \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)}\, x(E)\,. \tag{4.12}$$

Lemma 4.4. *Operátor-funkce $A = A(B)$ je spojitá v $\langle 0, +\infty)$.*

Důkaz. Je známo, že funkce $\Sigma = \Sigma(E)$ pro $E \in \Omega$ je kladná a spojitá. Dokážeme, že množina funkcí

$$f(E, B) = \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)}$$

ne stejně spojitá vzhledem k $E \in \Omega$ pro $B \in \langle 0, +\infty)$, tj., že pro libovolné $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $E \in \Omega$ a B, B', pro něž $|B' - B| < \delta$ je $|f(E, B) - f(E, B')| < \varepsilon$. Při pevném $E \in \Omega$ má funkce $f(E, B)$ derivaci $\partial f(E, B)/\partial B$ takovou, že existuje nezávislá na E a na B konstanta $c > 0$ tak, že platí

$$\left|\frac{\partial}{\partial B} f(E, B)\right| \leqq c\,, \quad E \in \Omega\,, \quad B \in \langle 0, +\infty)\,. \tag{4.13}$$

Podle věty o střední hodnotě je pro B', B'', pro něž $0 \leqq B' < B'' < +\infty$

$$f(E, B'') - f(E, B') = (B'' - B')\frac{\partial}{\partial B} f(E, B)|_{B = B_1}\,, \quad B' < B_1 < B''\,.$$

Odtud obdržíme nerovnosti

$$|f(E, B') - f(E, B'')| \leqq |B' - B''| \operatorname*{Max}_{B \in \langle B', B'' \rangle} \left|\frac{\partial}{\partial B} f(E, B)\right| \leqq c|B' - B''|$$

a tedy

$$\operatorname*{Max}_{E \in \Omega} |f(E, B') - f(E, B'')| \leqq c|B' - B''|\,.$$

Spojitost operátor-funkce $A = A(B)$ je důsledkem stejné spojitosti množiny funkcí $\{f(E, B)\}$.

Lemma 4.5. *Pro spektrální poloměry $R_{A(B)}$, $R_{D(B)}$ operátorů $A(B)$, $D\,F(B)$ platí nerovnosti*

$$(4.14) \qquad R_{A(B)} \geqq R > R_{DF(B)}\,, \quad R = R_{A(B_\infty)}$$

pro $B \in \mathfrak{G}_B = \langle 0, B_\infty \rangle$, při čemž $B_\infty < +\infty$ je kladné číslo závislé na stupni obohacení materiálu vyplňujícím vyšetřované prostředí isotopem U^{235}. (Viz tabulku 1.)

Poznámka. *Je zřejmé, že pro všechna $B \geqq 0$ platí nerovnost*

$$R_{A(B)} \geqq R_{DF(B)}$$

a při $B \to +\infty$ $R_{AF(B)} \to 0$. Jak ukážeme dále, fysikální význam mají pouze takové soustavy, v nichž odpovídající $\tilde{\tau}(B)$ je rovno 1. Má tedy smysl omeziti se při řešení úlohy 2′ pouze na ta B, jež leží v intervalu, jemuž odpovídající $R_{AF(B)}$ není podstatně menší než 1. Jak bylo ukázáno v [2], leží hledaná hodnota B (tj. takové B, pro něž $\tilde{\tau}(B) = 1$) v intervalu $\mathfrak{G}_B = \langle 0, B_\infty \rangle$, kde B_∞ jsou pro příslušná obohacení isotopem U^{235} prostředí vyplněného isotopem U^{238} uvedena v tabulce 1. Dokážeme, že hodnoty B, pro něž $\tilde{\tau}(B) = 1$, získané přibližným výpočtem v [2], existují a leží v $\mathfrak{G}_B$.

Tabulka 1

Obohacení U^{235} %	$10^2 \, . \, B_\infty^2$
10	2,20
20	3,50
30	4,70
40	5,90
50	7,20
60	8,50
70	9,70
80	11,10
90	13,00
100	15,00

Důkaz lemmatu 4.5. Pro funkci definovanou v (4.5) platí pro $B \in G_B = \langle 0, B_\infty \rangle$ a pro $E \in \Omega$ nerovnosti

$$(4.15) \quad \frac{\sigma_e(E)}{\sigma(E)} \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)} u(E) + S(E) \int_{E_0}^{E_\alpha} \nu(E') \frac{\sigma_f(E')}{\sigma(E')} \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E')}{B/\Sigma(E')} u(E')\,\mathrm{d}E' +$$

$$+ \sigma_\mu(E)\, E \int_E^{E_\infty} \frac{\sigma_i(E')}{\sigma(E')} K(E') \,.\, \exp\{2\sqrt{[a(E'-E)]}\} \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E')}{B/\Sigma(E')} u(E')\,\mathrm{d}E' >$$

$$> s_e\, u(E) \geqq s_e \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)} u(E)\,,$$

neboť pro uvedená B je funkce

$$f(E, B) = \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)}$$

velmi blízkou konstantě. Toto tvrzení je důsledkem vlastností makroskopického totálního účinného průřezu $\Sigma(E)$ [6], [5], str. 294–296, 302–303.

Nerovnosti (4.15) zapíšeme ve tvaru

$$(4.16) \qquad A(B)\, u \succ cu \succ c\, F(B)\, u\,,$$

při čemž vzhledem k (4.4) je $c > R_D$.

Operátory $A(B)$ a $F(B)$ jsou pro všechna $B \in \langle 0, +\infty)$ $\mathscr{K}$-kladné, takže podle věty **A** existuje $\lambda(B) \in \sigma(A(B))$ takové, že

$$\lambda(B) > R_D \geqq R_{DF(B)} .$$

Lemma 4.6. *Pro* $0 \leqq B' < B'' \leqq B_\infty$ *a pro každý vektor* $x \in \mathscr{K}$ *platí*

$$[A(B') - A(B'')]\, x \succ \alpha(B', B'')\, x \,, \tag{4.17}$$

při čemž

$$\alpha(B', B'') = (B'' - B') \min_{\substack{E \in \Omega \\ B \in \mathfrak{G}}} \left| \frac{\partial}{\partial B} \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)} \right| . \tag{4.18}$$

Důkaz. Podle věty o střední hodnotě je při pevném $E \in \Omega$

$$f(E, B') - f(E, B'') = (B' - B'') \frac{\partial}{\partial B} \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)} \bigg|_{B = B_1} , \quad B' < B_1 < B'' .$$

Protože $\Sigma(E) > 0$ pro $E \in \Omega$, je

$$\min_{\substack{E \in \Omega \\ B \in G}} (f(E, B') - f(E, B'')) > 0 ,$$

a tudíž pro $x \in \mathscr{K}$, $E \in \Omega$, $B' < B''$

$$[f(E, B') - f(E, B'')]\, x(E) \geqq \alpha(B', B'')\, x(E) ,$$

kde $\alpha(B', B'')$ je definováno v (4.18). To však znamená, že pro $x \in \mathscr{K}$ platí

$$F(B')\, x \succ F(B'')\, x + \alpha(B', B'')\, x$$

a tvrzení lemmatu je důsledkem $\mathscr{K}$-kladnosti operátorů C a D.

Z lemmat 4.4–4.6 plyne, že jsou splněny předpoklady vět **B**, **C**, **D**, podle nichž obdržíme řešení úlohy 2'.

Řešení úlohy 2'. *Pro každé* $B \in \langle 0, B_\infty \rangle$ *existuje právě jedno jednoduché dominantní kladné vlastní číslo* $\tilde{\tau}(B)$ *operátoru* $A(B)$, *jemuž přísluší kladná v* Ω *vlastní funkce* $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(E, B)$. *Funkce* $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(B)$ *je spojitá a klesající v* $\langle 0, B_\infty \rangle$.

Odtud okamžitě vyplývá

Řešení úlohy 2. *Nutná a postačující podmínka, aby existovalo* $B_0 \in \langle 0, B_\infty \rangle$ *a kladná v* Ω *vlastní funkce* $\tilde{\psi} = \tilde{\psi}(E, B_0)$ *integrální rovnice* (1.5a) *jest: Pro dominantní vlastní číslo* τ *rovnice* (1.3) *platí*

$$\tau \geqq 1 . \tag{4.19}$$

Je-li tato podmínka splněna, je řešení $\tilde{\psi}$ *rovnice* (1.5a) *určeno jednoznačně, požadujeme-li, aby* $\|\tilde{\psi}\| = 1$. O fysikální interpretaci podmínky (4.19) pojednáme v odstavci 5.

Řešení úlohy 3′ obdržíme na základě týchž úvah, jež jsme prováděli při řešení úlohy 2′. Místo operátoru $F(B)$ vyšetřujeme operátor $H(\gamma)$:

$$H(\gamma)\, x = y \equiv y(E) = \frac{\Sigma(E)}{\Sigma(E) + \gamma/V(E)}\, x(E)\,.$$

Snadno se přesvědčíme, že pro operátor $H(\gamma)$ platí lemmata 4.4—4.6, takže pro operátor-funkci $A = A(\gamma) = (C + D)\, H(\gamma)$ platí věty **B**, **C**, **D**, při čemž $\mathfrak{G}_\gamma = \langle 0, \gamma_\infty \rangle$, kde γ_∞ jsou pro různá obohacení isotopem U^{235} uvedena v tabulce 2.

Tabulka 2

Obohacení U^{235} %	$10^{-8}\gamma_\infty$
10	0,170
20	0,300
30	0,510
40	0,830
50	0,995
60	1,200
70	1,400
80	1,700
90	1,900
100	2,120

Jak jsme již poznamenali, obdržíme řešení úlohy 3′ týmž postupem, jakým jsme obdrželi řešení úlohy 2′. Nebudeme proto úvahy opakovati a uvedeme pouze výsledek.

Řešení úlohy 3′. *Pro každé $\gamma \in \langle 0, \gamma_\infty \rangle$ existuje právě jedno jednoduché kladné dominantní vlastní číslo $\hat{\tau}(\gamma)$ operátoru $A(\gamma)$, jemuž přísluší kladná v Ω vlastní funkce $\hat{\psi} = \hat{\psi}(E, \gamma)$. Funkce $\hat{\tau} = \hat{\tau}(\gamma)$ je spojitá a klesající v $\langle 0, \gamma_\infty \rangle$.*

Odtud vyplývá

Řešení úlohy 3. *Nutná a postačující podmínka, aby existovalo $\gamma_0 \in \langle 0, \gamma_\infty \rangle$ a kladná v Ω vlastní funkce $\hat{\psi} = \hat{\psi}(E, \gamma_0)$ rovnice* (1.5b) *jest: Pro dominantní vlastní číslo τ rovnice* (1.3) *platí* (4.19). *Je-li tato podmínka splněna, je γ_0 určeno jednoznačně a rovněž tak $\hat{\psi}_0 = \hat{\psi}_0(E, \gamma_0)$, požadujeme-li, aby $\|\tilde{\psi}_0\| = 1$.*

5. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

V odstavci 4 jsme dokázali, že za předpokladu, že v rovnici (1.3) je $\tau > 1$, existují parametry $B_0 > 0, \gamma_0 > 0$ takové, že $\tilde{\tau}(B_0) = 1, \hat{\tau}(\gamma_0) = 1$ v (1.5a), (1.5b). Veličina B_0 se nazývá materiálním parametrem a γ_0 reaktivitou nekonečného prostředí. Dokázali jsme, že pro prostředí vyplněné směsí isotopů U^{238} a U^{235} je materiální parametr tím větší, čím je obohacení isotopem U^{235} větší. Zjištěných hodnot B_0 lze užívati při určování asymptotických kritických rozměrů reaktoru pracujícího s rychlými neutrony pro obecný případ geometrického tvaru reaktoru. Rovněž tak reaktivita nekonečného prostředí je rostoucí funkcí obohacení směsi isotopem U^{235}. Pomocí reaktivity nekonečného prostředí lze jak známo určovati dobu rozběhu zmíněného typu reaktoru.

Všimněme si blíže některých vlastností řešení úloh 1—3, jež mají fysikální význam. Vzhledem k fysikálnímu významu veličin $\psi(E)$, $\tilde{\psi}(E, B_0)$, $\hat{\psi}(E, \gamma_0)$ je zřejmé, že musí být nezáporné. Zajímavé je též, že se nemohou anulovati v žádném bodě $E \in \Omega$, tj. ve vyšetřovaném prostředí se nutně vyskytují neutrony všech energií z oboru $\langle E_0, E_\infty \rangle$.

Při řešení úloh 2 a 3 jsme narazili na podmínku kritičnosti, jež byla vyjádřena vztahem $\tau \geqq 1$. Tato podmínka má zřejmý fysikální význam. Je-li $\tau > 1$, je „nekonečně tlustá" deska nadkritická a dá se očekávati, že určitá její „konečná" část bude právě kritická, což znamená, že vyšetřované prostředí bude v rovnovážném stavu. Že tomu tak skutečně je, plyne ze spojitosti a z monotonie funkce $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(B)$. Řetězová reakce bude probíhati též v desce o „konečné" tloušťce d určené vztahem $d = \pi/B_0$ a v každé desce, jejíž tloušťka bude menší než d, řetězová reakce zanikne.

Podobně je tomu v případě, kdy zkoumáme časovou závislost změn počtu neutronů. Je-li „nekonečně tlustá" deska nadkritická, tj. je-li v (1.3) $\tau > 1$, dá se očekávati, že s rostoucím časem bude počet neutronů vzrůstati. To je zřejmé z vyjádření řešení v (1.4b). V odstavci 4 jsme dokázali, že existuje právě jedno $\gamma_0 > 0$ – reaktivita nekonečného prostředí – tak, že příslušné $\hat{\tau}(\gamma_0)$ je rovno 1. Lze tedy právě jedním způsobem docíliti toho, že pro každé t (t označuje čas) bude uvažované prostředí v rovnovážném stavu.

Uvedli jsme vlastnosti řešení a podmínky existence těchto řešení, jež mají fysikální význam. Na druhé straně se zmíníme o činitelích, jež byli při vyšetřování pouze pomocnými a neměli bezprostřední fysikální význam. Sem patří definice čísel B_∞, γ_∞ pro různé koncentrace směsi U^{238} a U^{235}. Veličiny B_∞, γ_∞ byly určeny odhadem. Požadovali jsme totiž, aby pro $B \in \langle 0, B_\infty \rangle$ a $\gamma \in \langle 0, \gamma_\infty \rangle$ funkce

$$f(E, B) = \frac{\operatorname{arctg} B/\Sigma(E)}{B/\Sigma(E)}, \quad g(E, \gamma) = \frac{\Sigma(E)}{\Sigma(E) + \gamma/V(E)}$$

byly pro všechna $E \in \langle E_0, E_\infty \rangle$ takřka konstantními. To, že takové hodnoty B_∞, γ_∞ existují, je způsobeno vlastnostmi funkcí $\Sigma = \Sigma(E)$, $V = V(E)$. Není vyloučeno, že požadované vlastnosti mají i čísla B'_∞, γ'_∞ obecně větší než B_∞, γ_∞. Jak jsme ukázali, nemá však tato okolnost žádný vliv na existenci kritických parametrů B_0, γ_0, pro něž $\hat{\tau}(B_0) = 1$, $\hat{\tau}(\gamma_0) = 1$.

Autor vyjadřuje vřelý dík J. Ročkovi za cenné diskuse týkající se rozboru problému i jeho řešení.

Seznam literatury

[1] *J. M. Blatt, V. F. Weisskopf*: Theoretical nuclear physics. New York 1952.

[2] *M. Feix, P. Nicourd, S. Valentin*: Comptes rendus Acad. Sci. 244 (1957), 20, 2502–2505. Český překlad: Jaderná energie 1958, 413–414.

[3] *M. Г. Крейн, M. A. Рутман:* Линейные операторы оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. Усп. мат. наук III (1948), N 1, 3–97.

[4] *И. Ц. Гохберг, M. Г. Крейн:* Основные положения о дефектных числах линейных операторов. Усп. мат. наук XII (1957), N 2, 43–118.

[5] *D. J. Hughes, J. A. Hurvey*: Neutron cross sections. BNL 325.

[6] Reactor handbook. Physics. USAEC, Ženeva 1955.

[7] *A. E. Taylor*: Introduction to functional analysis. J. Wiley publ. New York 1958.

[8] *C. M. Никольский:* Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Изв. AH CCCP, сер. мат. 7 (1943), N 3, 147–166.

Резюме

ЦЕПНАЯ РЕАКЦИЯ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ

ИВО МАРЕК (Ivo Marek)

Доказывается существование решения проблемы, определенной в [2], где она решается только приближенно. Исследуется возможность цепной реакции в пластинчатой среде, заполненой смесью изотопов U^{238} и U^{235}, в зависимости от материального параметра B и реактивности γ.

Доказывается, что критичность рассматриваемой среды зависит от названных параметров строго монотонно. Отсюда следует существование, несуществование и в случае существования единственность критических параметров.

Исследования проводятся функционально-аналитическими методами в пространстве Банаха с конусом положительных элементов. Самостоятельное значение имеют доказанные теоремы о монотонной зависимости доминантного собственного значения $\mathscr{K}$-положительного оператора Радона-Никольского, зависящего от параметра.

Теорема D. *Пусть*

1. $\mathscr{K}$ — телесный конус.

2. *Для* $\beta \in \mathfrak{G}$ $A(\beta) = C(\beta) + D(\beta)$ *является сильно* $\mathscr{K}$*-положительным оператором Радона-Никольского.* ($\mathfrak{G}$ *обозначает интервал вещественной оси.*)

3. *Оператор-функция* $A = A(\beta)$ *непрерывна в* $\mathfrak{G}$.

4. *Для спектральных радиусов* $R_{A(\beta)}$, $R_{D(\beta)}$ *справедливы неравенства*

$$R_{A(\beta)} \geqq R > R_{D(\beta)}\,, \quad \beta \in \mathfrak{G}\,,$$

где R *не зависит от* β.

5. *Для всякого внутреннего вектора* $x \in \mathscr{K}$ *справедливо соотношение*

$$\{[A(\beta) - A(\beta')]\, x - \alpha(\beta, \beta')\, x\} \in \mathscr{K}\,,$$

где $\alpha(\beta, \beta') > 0$ *для* $\beta' > \beta$.

При выполнении условий 1.—5. Функция $\mu_0 = \mu_0(\beta)$ *непрерывна и строго монотонна в* $\mathfrak{G}$, *т.е. для доминантных собственных значений* $\mu_0(\beta')$, $\mu_0(\beta)$ *операторов* $A(\beta')$, $A(\beta)$ *имеет место неравенство*

$$\mu_0(\beta') < \mu_0(\beta) \quad \text{для} \quad \beta < \beta'\,.$$

Существование положительного доминантного собственного значения сильно $\mathscr{K}$-положительного оператора Радона-Никольского доказывается так же, как в случае вполне непрерывного оператора [3] (см. теорему **B**).

Summary

NEUTRON CHAIN REACTION WITH FAST NEUTRONS

IVO MAREK

This paper is concerned with the existence of the exact solution of the problem defined in [2], where this problem is solved only approximately. The possibility of sustaining of the neutron chain reaction in a given slab medium containing a mixture of U^{238} and U^{235} is studied in dependence on the material parameter B and on the reactivity γ.

It is proved that the criticality of the studied medium depends monotonously on each parameter. The existence or non-existence and the unicity of critical parameters in case of existence follows hence.

The examination is based on an application of functional-analytical methods in Banach space with a cone of positive elements. The theorems **A-D** possess a significance of their own without being independent on the problems solved in this paper.

Theorem D. *Suppose the following*:

1. *$\mathcal{K}$ is volume-type cone.*

2. *For any $\beta \in G$, $A(\beta) = C(\beta) + D(\beta)$ is a strongly $\mathcal{K}$-positive Radon-Nicolski operator.* (*$\mathfrak{G}$ denotes an interval of real numbers.*)

3. *The operator-function $A = A(\beta)$ is continuous in the set $\mathfrak{G}$.*

4. *The inequalities*

$$R_{A(\beta)} \geqq R > R_{D(\beta)}\,, \quad \beta \in \mathfrak{G}$$

hold for the spectral radii $R_{A(\beta)}$, $R_{D(\beta)}$ of the operators $A(\beta)$, $D(\beta)$, where R is independent of β.

5. *For any $x \in \operatorname{Int} \mathcal{K}$ ($\operatorname{Int} \mathcal{K}$ denotes the interior of the cone $\mathcal{K}$) and for $\beta < \beta'$, $\beta \in \mathfrak{G}$, $\beta' \in \mathfrak{G}$ there holds*

$$\{[A(\beta) - A(\beta')]\, x - \alpha(\beta, \beta')\, x\} \in \mathcal{K}\,,$$

where $\alpha(\beta, \beta') > 0$.

Then the function $\mu_0 = \mu_0(\beta)$ is continuous and strongly monotonous in the set $\mathfrak{G}$, i. e. the inequality

$$\mu_0(\beta') < \mu_0(\beta)\,, \quad \beta < \beta'\,,$$

holds for the dominant eigenvalues of the operators $A(\beta')$, $A(\beta)$.

The existence of a positive eigenvalue of a strongly $\mathcal{K}$-positive Radon-Nicolski operator can be proved similarly as in the case of a compact operator [3] (see theorem **B**).

Adresa autora: *Ivo Marek* C.Sc., Ústav jaderného výzkumu ČSAV, Řež, p. Klecany.