G. M. Hatiashvili

Задача Альманзи для однородного ортотропного цилиндрического бруса

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 4, 231–235,236–260

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102858

ЗАДАЧА АЛЬМАНЗИ ДЛЯ ОДНОРОДНОГО ОРТОТРОПНОГО ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО БРУСА

Г. М. ХАТИАШВИЛИ

(Поступило в редакцию 8-го октября 1962 г.)

В работе получено эффективное решение задачи Альманзи для ортотропного цилиндрического бруса. В частном случае эллиптического ортотропного цилиндра даются напряжения в виде сходящихся рядов.

Задача об упругом равновесии однородного изотропного цилиндрического бруса, когда составляющие внешних усилий, действующих на боковую поверхность бруса, заданы в виде полиномов по степеням осевой координаты z, впервые была решена Е. Альманзи в работе [1]. В дальнейшем эту задачу будем называть задачей Альманзи.

Аналогичная задача для цилиндрического бруса с произвольной анизотропией изучена в работе [2]. Доказано, что задача может быть сведена к задаче нахождения определенной последовательности функций двух координат.

Задача Альманзи для бруса обладающей прямолинейной анизотропией с одной плоскостью упругой симметрии, когда внешние усилия приводятся к скручиваемым парам, рассмотрена в работе [3].

В настоящей статье дается эффективное решение задачи Альманзи для ортотропного бруса и с применением теорий интегральных уравнений, для эллиптического бруса компоненты напряжения, найдены в виде сходящихся рядов, являющиеся решением задачи Альманзи.

§ 1. Рассмотрим однородный ортотропный цилиндрический брус. Начало координат поместим в центре инерций одного из оснований бруса. Назовем условно это основание нижним. Оси ox и oy направим по главным осям инерции нижнего основания, а ось oz – параллельно образующим цилиндрического бруса. Пусть оси координат совпадают с главными направлениями упругости, ортотропного бруса. Тогда, зависимость между компонентами деформации e_{jk} и компонентами напряжений τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$, как известно [4], можно записать в следующем виде:

$$(1.1)\quad e_{11} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{11}\tau_{11} + \sigma_{12}\tau_{22} - \sigma_1\tau_{33}\right), \quad e_{22} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{12}\tau_{11} + \sigma_{22}\tau_{22} - \sigma_2\tau_{33}\right),$$

$$e_{33} = \frac{1}{E}\left(\tau_{33} - \sigma_1\tau_{11} - \sigma_2\tau_{22}\right), \qquad e_{12} = \frac{1}{N}\tau_{12},\ e_{13} = \frac{1}{M}\tau_{13},\ e_{23} = \frac{1}{L}\tau_{23},$$

где E — модуль Юнга, соответствующий растяжению в направлении оси oz; $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \sigma_1, \sigma_2$ — коэффициенты Пуассона. Например, σ_1 — коэффициент Пуассона для укорочения в направлении оси ox напряжения τ_{33}; L, M, N — модули сдвига.

Для простоты изложения предположим, что сечение бруса плоскостью церпендикулярной оси oz, представляет собой односвязную область G ограниченную кривой S. Через n обозначим внешнюю нормаль к S. Будем считать, что объемные силы отсутствуют. Обозначим цилиндрическую поверхность, ограничивающую брус, через T.

Определим упругое равновесие ортотропного цилиндрического бруса, когда составляющие по осям координат внешних усилий, действующих на внешнюю боковую поверхность T бруса имеют следующий вид:

$$(1.2)\qquad \tau_j = \sum_{k=0}^{l} \chi_k^{(j)}(x, y)\, z^k \quad (j = 1, 2, 3),$$

где $\chi_j(x, y)$ заданные на T функций, а l — произвольное целое неотрицательное число.

Рассмотрим частный случай нагрузки (1.2). Пусть τ_j $(j = 1, 2, 3)$ определены равенствами:

$$(1.3^*)\qquad \tau_j^* = \chi_j(x, y)\, z^l \quad (j = 1, 2, 3).$$

Очевидно, зная способ решения задачи упругого равновесия бруса при боковой нагрузке (1.3*), легко можно найти решение задачи и в случае нагрузки (1.2).

Рассмотрим задачу Альманзи с граничными условиями (1.3*). Допустим, что решение этой задачи известно, т. е. известны компоненты напряжения τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ удовлетворяющие граничным условиям $\tau_{1j}\cos(n, x) + \tau_{2j}\cos(n, y) = \chi_j(x, y)\, z^l$ (1.3) и определим упругое равновесие цилиндрического бруса, когда составляющие по координатным осям усилий, действующих на поверхность T имеют следующий вид:

$$(1.4)\qquad \tau_j = \chi_j(x, y)\, z^{l+1}.$$

Таким образом, нашей задачей является найти компоненты напряжений τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ соответствующие нагрузке (1.4), когда известны компоненты τ_{jk}^* $(j, k = 1, 2, 3)$, соответствующие нагрузке (1.3).

Как известно, искомые компоненты напряжений τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ должны удовлетворять во всей области занятой телом однородным уравнениям равновесия:

$$(1.5)\qquad \frac{\partial \tau_{1j}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{2j}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{3j}}{\partial z} = 0 \quad (j = 1, 2, 3);$$

компоненты деформаций e_{jk} связанные с компонентами напряжений τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ равенствами (1.1), должны удовлетворять условиям совместимости Сен-Венана:

$$\begin{aligned}
(1.6)\qquad & \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 e_{32}}{\partial y\,\partial z}, \quad 2\frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial e_{23}}{\partial x} + \frac{\partial e_{13}}{\partial y} + \frac{\partial e_{12}}{\partial z}\right),\\
& \frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 e_{13}}{\partial x\,\partial z}, \quad 2\frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial e_{13}}{\partial y} + \frac{\partial e_{12}}{\partial z} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x}\right),\\
& \frac{\partial^2 e_{11}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_{22}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 e_{12}}{\partial x\,\partial y}, \quad 2\frac{\partial^2 e_{33}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial e_{12}}{\partial z} + \frac{\partial e_{23}}{\partial x} + \frac{\partial e_{13}}{\partial y}\right);
\end{aligned}$$

кроме того, компоненты τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ должны удовлетворять следующим граничным условиям:

$$(1.7)\qquad \tau_{1j}\cos(n, x) + \tau_{2j}\cos(n, y) = \chi_j(x, y)\, z^{l+1} \quad (j = 1, 2, 3)$$

на поверхности T.

Будем искать некоторое частное решение уравнений (1.5) и (1.6) (о чем будет сказано ниже) в следующем виде:

$$(1.8)\qquad \tau'_{jk} = (l+1)\left[\int_0^z \tau^*_{jk}\,\mathrm{d}z + \psi_{jk}(x, y)\right] \quad (j, k = 1, 2, 3),$$

где ψ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ искомые неизвестные функции.

Компоненты деформации e'_{jk} соответствующие компонентам τ'_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ будут определены равенствами:

$$\begin{aligned}
(1.9)\qquad e'_{11} &= (1+l)\int_0^z e^*_{11}\,\mathrm{d}z + \frac{1+l}{E}(\sigma_{11}\psi_{11} + \sigma_{12}\psi_{22} - \sigma_1\psi_{33}),\\
e'_{22} &= (1+l)\int_0^z e^*_{22}\,\mathrm{d}z + \frac{1+l}{E}(\sigma_{12}\psi_{11} + \sigma_{22}\psi_{22} - \sigma_2\psi_{33}),\\
e'_{33} &= (1+l)\int_0^z e^*_{33}\,\mathrm{d}z + \frac{1+l}{E}(\psi_{33} - \sigma_1\psi_{11} - \sigma_2\psi_{22}),\\
e'_{12} &= (1+l)\left(\int_0^z e^*_{12}\,\mathrm{d}z + \frac{\psi_{12}}{N}\right),\\
e'_{13} &= (1+l)\left(\int_0^z e^*_{13}\,\mathrm{d}z + \frac{\psi_{13}}{M}\right),\\
e'_{23} &= (1+l)\left(\int_0^z e^*_{23}\,\mathrm{d}z + \frac{\psi_{23}}{L}\right).
\end{aligned}$$

Подставляя значения τ'_{jk} из (1.8) в уравнения (1.5) и значения e'_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ из (1.9) — в условия совместимости (1.6), получим, что искомые функции ψ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ должны удовлетворять следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных:

$$(1.10)\qquad \frac{\partial \psi_{1j}}{\partial x} + \frac{\partial \psi_{2j}}{\partial y} + \tau^*_{j3}(x, y, 0) = 0 \quad (j = 1, 2, 3)\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_{11}\psi_{11} + \sigma_{12}\psi_{22} - \sigma_1\psi_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_{12}\psi_{11} + \sigma_{22}\psi_{22} - \sigma_2\psi_{33}) = \frac{E}{N}\frac{\partial^2 \psi_{12}}{\partial x\,\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\psi_{33} - \sigma_1\psi_{11} - \sigma_2\psi_{22}) = E\left[\frac{\partial e^*_{23}}{\partial y} - \frac{\partial e^*_{22}}{\partial z}\right]_{z=0}\,,$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\psi_{33} - \sigma_1\psi_{11} - \sigma_2\psi_{22}) = E\left[\frac{\partial e^*_{13}}{\partial x} - \frac{\partial e^*_{11}}{\partial z}\right]_{z=0}\,,$$

$$2\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\psi_{33} - \sigma_1\psi_{11} - \sigma_2\psi_{22}) = E\left[\frac{\partial e^*_{13}}{\partial y} + \frac{\partial e^*_{23}}{\partial x} - \frac{\partial e^*_{12}}{\partial z}\right]_{z=0}\,;$$

$$(1.11)\qquad \frac{1}{M}\frac{\partial^2 \psi_{13}}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{L}\frac{\partial^2 \psi_{23}}{\partial x^2} = \left[2\frac{\partial e^*_{11}}{\partial y} - \frac{\partial e^*_{12}}{\partial x}\right]_{z=0}\,,$$

$$\frac{1}{L}\frac{\partial^2 \psi_{23}}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{M}\frac{\partial^2 \psi_{13}}{\partial y^2} = \left[2\frac{\partial e^*_{22}}{\partial x} - \frac{\partial e^*_{12}}{\partial y}\right]_{z=0}\,;$$

где e^*_{jk} компоненты деформации соответствующие известным компонентам напряжения τ^*_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$.

Функции ψ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ будем искать, как и для изотропного тела [5], в следующем виде:

$$(1.12)\qquad \psi_{11} = \frac{\partial^2 \Phi^*_1}{\partial y^2} - \int \tau^*_{13}(x, y, 0)\,dx\,, \quad \psi_{22} = \frac{\partial^2 \Phi^*_1}{\partial x^2} - \int \tau^*_{23}(x, y, 0)\,dy\,,$$

$$\psi_{12} = -\frac{\partial^2 \Phi^*_1}{\partial x\,\partial y}\,, \quad \psi_{13} = \frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{1}{2}\int \tau^*_{33}(x, y, 0)\,dx\,,$$

$$\psi_{23} = -\frac{\partial \omega_1}{\partial x} - \frac{1}{2}\int \tau^*_{33}(x, y, 0)\,dy\,.$$

Значения ψ_{33} легко найти из уравнений (1.10). Выражения (1.12) тождественно удовлетворяют первому уравнению из (1.10). Легко проверить, что выражения

(1.12) будут удовлетворять всем уравнениям (1.10) если Φ_1^* является частным решением уравнения:

$$\beta_{22} \frac{\partial^4 \Phi_1^*}{\partial x^4} + (\beta_{66} + 2\beta_{12}) \frac{\partial^4 \Phi_1^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_{11} \frac{\partial^4 \Phi_1^*}{\partial y^4} =$$

$$= \left[\beta_{22} \int \frac{\partial^2 \tau_{23}^*}{\partial x^2} \mathrm{d}y + \beta_{11} \int \frac{\partial^2 \tau_{13}^*}{\partial y^2} \mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial z} (\beta_{12} \tau_{33}^* + \sigma_1 e_{22}^* + \sigma_2 e_{11}^*) \right]_{z=0},$$

где

$$\beta_{11} = \frac{\sigma_{11} - \sigma_1^2}{E}, \quad \beta_{22} = \frac{\sigma_{22} - \sigma_2^2}{E}, \quad \beta_{12} = \frac{\sigma_{12} - \sigma_1 \sigma_2}{E}, \quad \beta_{66} = \frac{1}{N}.$$

Подставляя (1.12) в уравнения (1.11), получим, что ω_1 должна быть каким либо решением уравнения

$$M \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + L \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} = \left[\int \left(2ML \frac{\partial e_{11}^*}{\partial y} + \frac{L}{2} \frac{\partial \tau_{33}^*}{\partial y} \right) \mathrm{d}x - \right.$$
$$\left. - \frac{M}{2} \int \frac{\partial \tau_{33}^*}{\partial x} \mathrm{d}y - \frac{ML}{N} \tau_{22}^* \right]_{z=0} - 2ML \left[\int \frac{\partial e_{22}^*}{\partial x} \mathrm{d}y - \frac{1}{N} \tau_{12}^* \right]_{\substack{x=0 \\ z=0}}. \tag{1.13}$$

Если ограничится компонентами τ'_{jk}, для решения уравнений (1.5) и (1.6) с граничными условиями (1.7), очевидно, что после подстановки τ'_{jk} в условия (1.7), за счет известных величин $\psi_{jk}(x, y)$ $(j, k = 1, 2, 3)$ получается дополнительная боковая нагрузка не меняющаяся вдоль образующей цилиндра. Т. е. нам придется дополнительно решить задачу Альманзи-Митчела для ортотропного бруса. Эффективное решение этой задачи дано в работе автора этой статьи [6].

Добавляя указанное решение к выражению (1.7) окончательно неизвестные компоненты напряжений τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$, удовлетворяющие уравнениям (1.5), (1.6) и граничным условиям (1.7), будем искать в следующем виде:

$$\frac{1}{1+l} \tau_{11} = \int_0^z \tau_{11}^* \mathrm{d}z - \int \tau_{13}^*(x, y, 0) \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - 2MF + a_2 P_2 x, \tag{1.14}$$

$$\frac{1}{1+l} \tau_{22} = \int_0^z \tau_{22}^* \mathrm{d}z - \int \tau_{23}^*(x, y, 0) \mathrm{d}y + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - 2LF + a_3 P_3 y,$$

$$\frac{1}{1+l} \tau_{12} = \int_0^z \tau_{12}^* \mathrm{d}z - \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + 2a_1(My^2 - Lx^2),$$

$$\frac{1}{1+l} \tau_{13} = \int_0^z \tau_{13}^* \mathrm{d}z - \frac{1}{2} \int \tau_{33}^*(x, y, 0) \mathrm{d}x + \frac{\partial \omega_1}{\partial y} + 2M \frac{\partial F}{\partial x} - a_2 P_2 z -$$
$$- \frac{2}{3} a_2 E x^2 z + M \frac{\partial F_1}{\partial x} + a_1 E x - 4M a_4 y z,$$

$$\frac{1}{1+l}\tau_{23} = \int_0^z \tau_{23}^* \,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int \tau_{33}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}y - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + 2L\frac{\partial F}{\partial y} - a_3 P_3 z -$$
$$- \frac{2}{3} a_3 E y^2 z + L\frac{\partial F_1}{\partial y} + a_1 E y + 4 L a_4 x z\,,$$

$$\frac{1}{1+l}\tau_{33} = \int_0^z \tau_{33}^* \,\mathrm{d}z + \sigma_1\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}\right) + \sigma_2\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}\right) -$$
$$- \sigma_2 \int \tau_{23}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}y + \int\left[\left(\frac{E}{M} - \sigma_1\right)\tau_{13}^* - E\int \frac{\partial e_{11}}{\partial z}\,\mathrm{d}x\right]_{z=0}\mathrm{d}x +$$
$$+ E\int\left[\frac{1}{L}\tau_{23}^* - \int \frac{\partial e_{22}^*}{\partial z}\,\mathrm{d}y\right]_{\substack{x=0\\ z=0}}\mathrm{d}y +$$
$$+ x\frac{E}{2}\int\left[\frac{\partial e_{23}^*}{\partial x} - \frac{\partial e_{13}^*}{\partial y} - \frac{\partial e_{12}^*}{\partial z}\right]_{\substack{x=0\\ z=0}}\mathrm{d}y - 2(M\sigma_1 + L\sigma_2 - E)\,F +$$
$$+ a_2\sigma_1 P_2 x + a_3 \sigma_2 P_3 y + \frac{a_2}{3} E x^3\left(\sigma_1 - \frac{E}{M}\right) +$$
$$+ \frac{a_3}{M} E y^3\left(\sigma_2 - \frac{E}{L}\right) + (a_2\sigma_2 y + a_3\sigma_1 x)\,Exy - 2a_1 E z +$$
$$+ a_2 E x z^2 + a_3 E y z^2\,;$$

где введены следующие обозначения:

$$(1.15)\qquad P_2 = \tfrac{1}{3}Ex^2 - 2M\sigma_2 y^2\,,\quad P_3 = \tfrac{1}{3}Ey^2 - 2L\sigma_1 x^2\,,\quad F = \sum_{k=2}^{4} a_k F_k\,;$$

$\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}, \sigma_1, \sigma_2, E, 1/N, 1/M, 1/L$ – модули упругости, τ_{jk}^* и e_{jk}^* $(j, k = 1, 2, 3)$ – – известные компоненты напряжения и деформации определяющие упругое равновесие бруса при граничных условиях (1.3); l – целое неотрицательное число, $\chi_j(x, y)$ $(j = 1, 2, 3)$ – заданные на T функции, постоянные a_j $(j = 1,2,3,4)$ и функции $F_j(x, y)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$, $\Phi(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$ – подлежат определению, $\omega_1(x, y)$ – является частным решением уравнения (1.13) в G.

Непосредственной подстановкой устанавливаем, что компоненты напряжения (1.14) и соответствующие им компоненты деформации будут удовлетворять уравнениям (1.5), (1.6) и граничным условиям (1.7), если функции F_j $(j=1,2,3,4)$ и Φ являются решениями следующих граничных задач:

1°. $\Delta_1 F_j = 0$ в области G,

$\dfrac{\mathrm{d}_1 F_j}{\mathrm{d}n} = \Psi_j$ на границе S;

где

$$(1.16)\qquad \Delta_1 = M\frac{\partial^2}{\partial x^2} + L\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad \frac{\mathrm{d}_1}{\mathrm{d}n} = M\frac{\partial}{\partial x}\cos(n, x) + L\frac{\partial}{\partial y}\cos(n, y);$$

$$(1.17)\qquad \Psi_1 = -a_1E[x\cos(n, x) + y\cos(n, y)] + \frac{\partial\omega_1}{\partial x}\cos(n, y) - \frac{\partial\omega_1}{\partial y}\cos(n, x) + $$
$$+ \frac{1}{2}\cos(n, x)\int\tau_{33}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\cos(n, y)\int\tau_{33}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}y,$$

$$\Psi_2 = \frac{E}{2}x^2\cos(n, x) - M\sigma_2y^2\cos(n, x),$$

$$\Psi_3 = \frac{E}{2}y^2\cos(n, y) - L\sigma_1x^2\cos(n, y),$$

$$\Psi_4 = 2[My\cos(n, x) - Lx\cos(n, y)];$$

2°. $\Delta_2\Phi = 0$ в G,

$$(1.18)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial x} + \int_0^s\Big[2a_4(My^2 - Lx^2)\cos(n, x) - 2LF\cos(n, y) -$$
$$+ a_3P_3y\cos(n, y) - \cos(n, y)\int\tau_{23}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}x\Big]\mathrm{d}s,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = -\frac{\partial\Phi_1}{\partial y} - \int_0^s\Big[2a_4(My^2 - Lx^2)\cos(n, y) - 2MF\cos(n, x) +$$
$$+ a_2P_2x\cos(n, x) - \cos(n, x)\int\tau_{13}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}s, \quad \text{на} \quad S;$$

где

$$(1.19)\qquad \Delta_2 = \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x^4} + (\beta_{66} + 2\beta_{12})\frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial y^2} + \beta_{12}\frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

s — дуга произвольной точки кривой S,

$\Phi_1(x, y)$ — частное решение уравнения:

(1.20)

$$\Delta_2\Phi_1 = \left[\beta_{11}\int\frac{\partial^2\tau_{32}^*}{\partial x^2}\,\mathrm{d}y + \beta_{22}\int\frac{\partial^2\tau_{13}^*}{\partial y^2}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial z}(\beta_{12}\tau_{33}^* + \sigma_1e_{22}^* + \sigma_2e_{11}^*)\right]_{z=0} +$$
$$+ 2M(\beta_{22} + 2\sigma_1)\frac{\partial^2F}{\partial y^2} + 2L(\beta_{11} + 2\sigma_2)\frac{\partial^2F}{\partial x^2} + 2E(\sigma_{12} + \sigma_1\sigma_2)(a_3y + a_2x) -$$
$$- 2(a_2\sigma_2x + a_3\sigma_1y) + (a_2L\sigma_2\beta_{11} + a_3M\sigma_1\beta_{22}) \quad \text{в области } G.$$

Как известно [7], необходимое и достаточное условие существования граничных задач [1°] состоит в следующем:

$$\int_S \Psi_j(s)\,\mathrm{d}s = 0 \quad (j = 1, 2, 3, 4)\,. \tag{1.21}$$

Легко проверить, что условие (1.21) при $j = 4$ выполнено, при $j = 2, 3$ — сводится к равенствам $\iint_G y\,\mathrm{d}\sigma = \iint_G x\,\mathrm{d}\sigma = 0$, что выполнены за счет выбора начала системы координат, а для выполнения (1.21) при $j = 1$, должны иметь:

$$\int_S \Big[a_1 E(x\cos(n, x) + y\cos(n, y)) - \frac{\mathrm{d}\omega_1}{\mathrm{d}s} + \frac{1}{2}\cos(n, x)\int \tau_{33}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}x + \\ + \frac{1}{2}\cos(n, y)\int \tau_{33}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}y\Big]\mathrm{d}s = 0\,;$$

что будет выполнено если постоянное a_1 будет выбран следующим образом:

$$a_1 = \frac{1}{2E\Omega_G}\iint_G \tau_{33}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}\sigma\,, \tag{1.22}$$

где Ω_G — площадь области G.

Мы считаем, что ω_1 является однозначной функцией дуги s кривой S. В противном случае в правой части (1.22) мы получим дополнительное слагаемое.

Для существования решения граничной задачи 2° необходимо и достаточно [8], чтобы граничные значения на S выражений $\partial\Phi/\partial x$, $\partial\Phi/\partial y$ и Φ оставались однозначными при обходе контура.

Учитывая выражения (1.18), простые вычисления показывают что для однозначности $\partial\Phi/\partial x$ и $\partial\Phi/\partial y$ постоянные a_2 и a_3 должны быть определены равенствами:

$$a_2 = -\frac{1}{2EI_y}\iint_G \tau_{13}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad a_3 = \frac{1}{2EI_x}\iint_G \tau_{23}^*(x, y, 0)\,\mathrm{d}\sigma\,; \tag{1.23}$$

где

$$I_y = \iint_G x^2\,\mathrm{d}\sigma\,, \quad I_x = \iint_G y^2\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Для однозначности функции Φ, постоянное a_4 должно быть определено равенством:

$$a_4 = \frac{M^* + \iint_G [y\tau_{13}^*(x, y, 0) - x\tau_{23}^*(x, y, 0)]\,\mathrm{d}\sigma}{\iint_G \left[M\left(\frac{\partial F_4}{\partial x} - y\right)^2 + L\left(\frac{\partial F_4}{\partial y} + x\right)^2\right]\mathrm{d}\sigma}\,, \tag{1.24}$$

где

$$M^* = \iint_G \left[\sum_{j=2}^{4}\left(My\frac{\partial F_j}{\partial x} + Lx\frac{\partial F_j}{\partial y}\right) + 2(M\sigma_2 y^3 + L\sigma_1 x^3) - Exy(a_3 y + a_2 x)\right]\mathrm{d}\sigma\,.$$

Определив искомые постоянные a_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ и доказав существование решения граничных задач 1° и 2°, этим самым мы доказали, что компоненты напряжения τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ определенные равенствами (1.14) удовлетворяют уравнениям (1.5), (1.6) и граничным условиям (1.7), если известны компоненты τ^*_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ удовлетворяющие тем же уравнениям и граничным условиям (1.3). Т. е., если определено упругое равновесие ортотропного цилиндрического бруса, когда составляющие по координатным осям внешних усилий на боковую поверхность имеют вид $\tau_j = \chi_j(x, y)\, z^l$, где l — целое неотрицательное число, тогда мы можем решить задачу и в том числе, когда $\tau_j = \chi_j(x, y)\, z^{l+1}$ $(j = 1, 2, 3)$.

Так как, в указанной статье [6] нами решена задача, когда $l = 0$, то последовательно переходя от l к $l + 1$, можем решить задачу Альманзи для любого неотрицательного целого числа l.

Заметим, что зная явное выражение компонентов напряжения задачи Альманзи для ортотропного бруса, для случая $l = 0$ последовательным интегрированием по z по указанной схеме мы могли, для любого целого неотрицательного l написать явное выражение компонентов напряжения задачи Альманзи. Но это не сделано потому, что во первых: эти выражения были бы очень громоздки, и во вторых: при решении конкретных задач надо строить компоненты напряжения, начиная с $l = 0$, хотя-бы для вычислений правых частей уравнений (1.13) и (1.20). Все это станет ясным при решении задачи Альманзи для конкретных тел.

§ 2. Для примера рассмотрим упругое равновесие ортотропного эллиптического бруса. Пусть сечение бруса, плоскостью перпендикулярной оси oz представляет собой эллиптическую област G ограниченную эллипсом S. Обозначим большую и малую полуоси эллипса соответственно через a и b. Пусть оси ox и oy по направлению совпадают соответственно с полуосями a и b. Начало системы координации делит фокусное расстояние пополам. Для точки $Q(\xi, \eta)$ эллипса S имеем:

$$\xi = a \cos \vartheta\,, \quad \eta = a \sin \vartheta\,,$$

$$(2.1)\quad \cos(n, x) = \frac{b \cos \vartheta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}}\,, \quad \cos(n, y) = \frac{a \sin \vartheta}{\sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta}}\,.$$

Введем некоторые обозначения:

$$(2.2)\quad m = \sqrt{\frac{M}{L}}, \quad \lambda = \frac{a - mb}{a + mb}, \quad \mathfrak{z} = x + imy - (\xi + im\eta)\,, \quad z_0 = x + imy\,;$$

$$(2.3)\quad t_1 = \frac{1}{a + mb}\left(z_0 + \sqrt{z_0^2 - (a^2 - m^2b^2)}\right),$$

$$t_2 = \frac{1}{a + mb}\left(z_0 - \sqrt{z_0^2 - (a^2 - m^2b^2)}\right);$$

$$(2.4)\qquad \zeta_1 = -\frac{Eb^2 + 2L\sigma_1 a^2}{L(a^2 + 3m^2b^2)}, \quad \zeta_2 = \frac{Ea^2 + 2M\sigma_2 b^2}{M(3a^2 + m^2b^2)}, \quad \zeta_3 = \frac{I_1}{I_2};$$

$$(2.5)\qquad I_1 = a^2 - m^2b^2, \qquad I_2 = a^2 + m^2b^2, \qquad I_3 = 3Eb^2 - 2L\sigma_1 a^2,$$
$$I_4 = 3Ea^2 - 2M\sigma_2 b^2, \quad I_5 = 3a^2 - m^2b^2, \quad I_6 = a^2 - 3m^2b^2.$$

Пусть ib_k и $-ib_k$ ($k = 1, 2$; $b_k > 0$, $i^2 = -1$) — корни характеристического биквадратного уравнения:

$$(2.6)\qquad \beta_{11}\alpha^4 + (\beta_{66} + 2\beta_{12})\,\alpha^2 + \beta_{22} = 0.$$

Рассмотрим постоянные [9]:

$$(2.7)\qquad r_j = \frac{i(-1)^j}{b_2 - b_1}, \quad s_j = -\frac{(-1)^j\, b_1 b_2}{b_j(b_2 - b_1)}, \quad p_j = \frac{(-1)^j\, b_k}{b_2 - b_1},$$
$$q_j = \frac{i(-1)^j\, b_1 b_2}{b_2 - b_1}, \quad (j = 1, 2).$$

Введем обозначения:

$$(2.8)\qquad \lambda_j = \frac{a - b_j b}{a + b_j b}, \quad z_j = x + ib_j y, \quad \mathfrak{z}_j = z_j - \xi - ib_j\eta, \quad (j = 1, 2),$$
$$t_{j_1} = \frac{1}{a + b_j b}\left(z_j + \sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}\right), \quad t_{j_2} = \frac{1}{a + b_j b}\left(z_j - \sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}\right);$$

где $P(x, y)$ — внутренняя точка эллиптической области G, а $Q(\xi, \eta)$ — точка эллипса S, границы области G.

В работе [6] доказано, что, в чем можно непосредственно убедится, компоненты напряжения τ_{jk}^* ($j, k = 1, 2, 3$), которые являются решением задачи Альманзи-Митчела, т. е. компоненты напряжения τ_{jk}^*, которые удовлетворяют уравнениям (1.5), (1,6) следующим граничным условиям

$$(2.9)\qquad \tau_{1j}^* \cos(n, x) + \tau_{2j}^* \cos(n, y) = \tau_j(x, y) \quad \text{на} \quad T \quad (j = 1, 2, 3),$$

(где $\tau_j(x, y)$ заданные функции) определены равенствами:

(2.10)

$$\tau_{11}^* = \frac{\beta_1^0}{2ab}\left[4 - (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2) - \frac{a\gamma_1^0}{2b^2}(1 - \lambda_1)(1 + \lambda_2)\right] +$$
$$+ \frac{1}{2b}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(1 - \lambda_j)\left[p_j(\alpha_k^0 - i\beta_k^0) + q_j(\gamma_k^0 - i\delta_k^0)\right] \frac{t_{j_1}^k + t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}} -$$
$$- \frac{a_3^0}{6} M\zeta_1 v_1(x, y) - \frac{a_3^0}{4} m^2 I_3 y - \frac{a_2^0}{6} M\zeta_2 v_2(x, y) - \frac{a_2^0}{4} I_4 x + 8a_4^0 M\zeta_3 xy -$$
$$- 2a_2^0 M\sigma_2 y^2 x + \frac{a_2^0}{3} Ex^3 + \frac{\Gamma_1^0}{6\beta_{22}} y^3 + \frac{\Gamma_3^0}{2(2\beta_{12} + \beta_{66})} x^2,$$

$$\tau_{22}^* = -\frac{\beta_1^0 b}{2a}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) - \frac{\gamma_1^0}{2ab}[4-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)] -$$

$$-\frac{1}{2a}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(1+\lambda_j)\,[r_j(\alpha_k^0 - i\beta_k^0) + s_j(\gamma_k^0 - i\delta_k^0)]\,\frac{t_{j_1}^k - t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}} -$$

$$-\frac{a_3^0}{6}L\zeta_1 v_1(x, y) - \frac{a_3^0}{4}I_3 y - \frac{1}{6}a_2^0 L\zeta_2 v_2(x, y) - \frac{a_2^0}{4m^2}I_4 x + 8a_4^0 L\zeta_3 xy -$$

$$-2a_3^0 L\sigma_1 x^2 y + \frac{a_3^0}{3}Ey^3 + \frac{\Gamma_2^0}{6\beta_{11}}x^3 + \frac{\Gamma_3^0}{2(2\beta_{12}+\beta_{66})}y^2,$$

$$\tau_{33}^* = \sigma_1\frac{\beta_1^0}{2ab}[4-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)] - \sigma_1\frac{a\gamma_1^0}{2b^2}(1-\lambda_1)(1+\lambda_2) -$$

$$-\sigma_2\frac{\beta_1^0 b}{2a^2}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) - \sigma_2\frac{\gamma_1^0}{2ab}[4-(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)] +$$

$$+\frac{1}{2ab}\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty}\{k\sigma_1 a(1-\lambda_j)\,[p_j(\alpha_k^0 - i\beta_k^0) + q_j(\gamma_k^0 - i\delta_k^0)] -$$

$$-\sigma_2 bk(i+\lambda_j)\,[r_j(\alpha_k^0 - i\beta_k^0) + s_j(\gamma_k^0 - i\sigma_k^0)]\}\,\frac{t_{j_1}^k - t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}} +$$

$$+\sigma_1\frac{\Gamma_1^0 y^3}{6\beta_{22}} + \sigma_2\frac{\Gamma_2^0 x^3}{6\beta_{11}} + \frac{\Gamma_3^0}{2(2\beta_{12}+\beta_{66})}(\sigma_1 x^2 + \sigma_2 y^2) + Exy(a_2^0\sigma_2 y + a_3^0\sigma_1 x) -$$

$$-2\sigma_1\sigma_2 xy(a_3^0 Lx + a_2^0 My) + \frac{a_2^0}{3}Ex^3\left(2\sigma_1 - \frac{E}{M}\right) + \frac{a_3^0}{3}Ey^3\left(2\sigma_2 - \frac{E}{L}\right) +$$

$$+a_2^0 Exz^2 + a_3^0 Eyz^2 - 2a_1^0 Ez + \frac{1}{6}(E - \sigma_1 M - \sigma_2 L)\,.$$

$$\cdot\left[a_3^0\zeta_1 v_1(x, y) + \frac{3}{2L}I_3 y - a_2^0\zeta_2 v_2(x, y) + \frac{3}{2M}I_4 x - 24a_4^0\zeta_3 xy\right],$$

$$\tau_{12}^* = -\frac{1}{2a}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\left[\alpha_1^0 - \frac{a(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{b(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)}\delta_1^0\right] -$$

$$-\frac{1}{2a}\,\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty}k(1+\lambda_j)\,[p_j(\alpha_k^0 - i\beta_k^0) + q_j(\gamma_k^0 - i\delta_k^0)]\,\frac{t_{j_1}^k - t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}} -$$

$$-\frac{\Gamma_3^0}{2\beta_{12}+\beta_{66}}xy - 2a_1^0(My^2 - Lx^2),$$

$$\tau_{13}^* = \left[2M\zeta_1 a_3^0 xy + L\zeta_2 a_2^0(x^2 - m^2y^2) - \frac{a_2^0}{4} L\zeta_2 I_1 + \frac{a_2^0}{4} I_4 - 8a_4^0 M\zeta_3 y\right] z +$$

$$+ 2M\left(a_2^0\sigma_2 y^2 - \frac{a_2^0}{2M} Ex^2 - 2a_4^0 y\right) z + a_1^0 Ex -$$

$$- m \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^0 - iB_k^0) \frac{t_1^k - t_2^k}{\sqrt{z_0^2 - a^2 + m^2b^2}} ,$$

$$\tau_{23}^* = \left[La_3^0\zeta_1(x^2 - m^2y^2) - 2L\zeta_2 a_2^0 mxy - \frac{a_3^0}{4} L\zeta_1 I_1 + \frac{a_3^0}{4} I_3 - 8a_4^0 M\zeta_3 x\right] z +$$

$$+ 2L\left(a_2^0\sigma_1 x^2 - \frac{a_2^0 E}{2L} y^2 + 2a_4^0 x\right) z + a_1^0 Ey -$$

$$- \frac{1}{m} \operatorname{Re} \sum_{k=1}^{\infty} (B_k^0 + iA_k^0) \frac{t_1^k - t_2^k}{\sqrt{z_0^2 - a^2 + m^2b^2}} ,$$

где σ_{11}, σ_{12}, σ_{22}, σ_1, σ_2, E, $1/L$, $1/M$, $1/N$ — модули упругости, m, λ, ζ_j $(j = 1, 2, 3)$, $z_k((k = 0, 1, 2)$, t_1, t_2, t_{j_1}, t_{j_2}, I_j $(j = 1, 2, \ldots, 6)$; r_j, p_j, s_j, q_j $(j = 1, 2)$ определены равенствами (1.1)—(1.8); для сокращения записи введены следующие обозначения:

$$v_1(x, y) = 6x^2y - 2m^2y^3 - \frac{3}{2}(a^2 - m^2b^2)\, y ,$$

$$v_2(x, y) = 2x^3 - 6m^2xy^2 - \frac{3}{2}(a^2 - m^2b^2)\, x ;$$

(2.11) $$a_1^0 = \frac{\int_0^{2\pi} \tau_3^0(\vartheta)\, d\vartheta}{2\pi Eab} , \quad a_2^0 = -\frac{\int_0^{2\pi} \tau_1^0(\vartheta)\, d\vartheta}{\pi Ea^3b} , \quad a_3^0 = -\frac{\int_0^{2\pi} \tau_2^0(\vartheta)\, d\vartheta}{\pi Eab^3} ,$$

$$a_4^0 = \frac{2I_2 \int_0^{2\pi} (\tau_1^0 \sin\vartheta - \tau_2^0 \cos\vartheta)\, d\vartheta}{\pi abL(I_2^2 + 4m^2a^2b)} ;$$

(2.12) $$A_1^0 = \frac{1}{\pi(\lambda - 1)} \int_0^{2\pi} \tau_3^0(\vartheta) \cos\vartheta\, d\vartheta , \quad B_1^0 = \frac{1}{\pi(\lambda + 1)} \int_0^{2\pi} \tau_3^0(\vartheta) \sin\vartheta\, d\vartheta ,$$

$$\alpha_1^0 = \frac{a(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{b(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)} , \quad \delta_2^0 = \frac{2(C_1^0 + h_1^0)}{(L + \lambda_1)(L + \lambda_2)} ,$$

$$\beta_1^0 = \frac{D_1^0 + G_1^0}{1 + \lambda_1\lambda_2} + \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{4b(1 - \lambda_1\lambda_2)} [a(l_1^0 + H_1^0) - b(D_1^0 + G_1^0)] ,$$

$$\gamma_1^0 = \frac{l_1^0 - H_1^0}{1 - \lambda_1\lambda_2} + \frac{(1 + \lambda_2)(1 + \lambda_2)}{4a(1 - \lambda_1\lambda_2)} [b(D_1^0 + G_1^0) - a(l_1^0 + H_1^0)] ,$$

$$A_k^0 = \frac{1}{\pi(\lambda^k - 1)} \int_0^{2\pi} \tau_3^0(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta \,, \quad B_k^0 = \frac{1}{\pi(\lambda^k + 1)} \int_0^{2\pi} \tau_3^0(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta \,,$$

$$\alpha_k^0 = \frac{1}{\Delta_2^{(k)}} \left[(C_k^0 + h_k^0) \left(1 - \sum_{j=1}^{2} s_j \lambda_j^k\right) + i(K_k^0 - P_k^0) \sum_{j=1}^{2} q_j \lambda_j^k \right],$$

$$\beta_k^0 = \frac{1}{\Delta_1^{(k)}} \left[(D_k^0 + G_k^0) \left(1 + \sum_{j=1}^{2} s_j \lambda_j^k\right) + i(l_k^0 - H_k^0) \sum_{j=1}^{2} q_j \lambda_j^k \right], \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$\gamma_k^0 = \frac{1}{\Delta_1^{(k)}} \left[(l_k^0 - H_k^0) \left(1 - \sum_{j=1}^{2} p_j \lambda_j^k\right) + i(D_k^0 + G_k^0) \sum_{j=1}^{2} r_j \lambda_j^k \right],$$

$$\delta_k^0 = \frac{1}{\Delta_2^{(k)}} \left[(K_k^0 - P_k^0) \left(1 + \sum_{j=1}^{2} p_j \lambda_j^k\right) + (h_k^0 + C_k^0) \sum_{j=1}^{2} r_j \lambda_j^k \right];$$

где:

$$(2.13) \quad \Delta_1^{(k)} = 1 + \frac{1 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^k - \lambda_2^k) - \lambda_1^k \lambda_2^k \,,$$

$$\Delta_2^{(k)} = 1 - \frac{1 - \lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2} (\lambda_1^k - \lambda_2^k) - \lambda_1^k \lambda_2^k \,,$$

$$\tau_j^0 = \tau_j \sqrt{a^2 \sin^2 \vartheta + b^2 \cos^2 \vartheta} \quad (j = 1, 2, 3) \,.$$

$C_k^0 = D_k^0 = H_k^0 = P_k^0 = 0$ при $k = 5, 6, 7, \ldots$, а остальные коэффициенты определены равенствами:

$$(2.14) \quad h_k^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta \,, \quad G_k^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta \,,$$

$$l_k^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta \,, \quad K_k^0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_2(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta \,,$$

$$f_j(\vartheta) = \int_0^{\vartheta} \tau_j^0(\vartheta) \, d\vartheta - \frac{\vartheta}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_j^0(\vartheta) \, d\vartheta \,, \quad (j = 1, 2,; \; k = 1, 2, 3, \ldots);$$

$$\Gamma_1^0 = 2a_3^0[\zeta_1 M m^2(\beta_{11} + 2E\sigma_1) + \zeta_1(\beta_{22} + 2E\sigma_2) - E(\sigma_{12} - \tfrac{1}{2}\sigma_1\sigma_2) - \sigma_1] \,,$$

$$\Gamma_2^0 = -2a_2^0[\zeta_2 M m^2(\beta_{11} + 2E\sigma_1) - \zeta_2 L(\beta_{22} + 2E\sigma_2) + E(\sigma_{12} - \tfrac{1}{2}\sigma_1\sigma_2)] \,,$$

$$\Gamma_3^0 = a_2^0 \sigma_2 L \beta_{11} + a_3^0 \sigma_1 M \beta_{22} \,;$$

$$H_1^0 = -H_3^0 = -\frac{\Gamma_3^0 a b^3}{8(2\beta_{22} + \beta_{66})} \,;$$

$$H_2^0 = \frac{L}{8} a_2^0 \zeta_2 a^2 I_6 \left(\frac{1}{3} L - \frac{1}{2m^2} \right) + \frac{I_4}{16m^2} a_2^0 a^2 - \frac{\Gamma_2^0}{48\beta_{11}} \,,$$

$$H_4^0 = \frac{a_2^0}{96} \zeta_2 a^2 L^2 (a^2 + 3m^2 b^2) - \frac{\Gamma_2^0 a^4}{48\beta_{11}} \,, \quad P_1^0 = -\frac{1}{2} a_4^0 L b I_5 + \frac{a_4^0}{2} L \zeta_3 a^2 b \,,$$

$$P_2^0 = \frac{1}{12} ML\zeta_1 a_3^0 ab^3 - \frac{L^2}{16} \zeta_1 a_3^0 abI_1 + \frac{a_3^0}{16} abI_3 - \frac{E}{12} a_3^0 ab^3 ,$$

$$P_3^0 = -\frac{a_4^0}{6} LbI_2 - \frac{a_4^0}{6} La^2 b , \quad P_4^0 = \frac{L^2}{96} \zeta_1 a_3^0 abI_5 + \frac{a^3 b}{16} a_3^0 L\sigma_1 + \frac{a_3^0}{96} Eab^3 ,$$

$$C_1^0 = -\frac{a}{2} a_4^0 LI_6 + \frac{ab^2}{2} M\zeta_3 a_4^0 , \quad C_2^0 = -\frac{b^2}{24} \zeta_1 a_3^0 MLI_5 + \frac{b^2}{16} \zeta_1 MLa_3^0 I_1 -$$

$$-\frac{b^2}{16} m^2 a_3^0 I_4 + \frac{\Gamma_1^0 b^4}{48\beta_{22}} , \quad C_3^0 = -\frac{a_4^0}{6} aMI_2 + \frac{M}{6} a_4^0 \zeta_3 ab^2 ,$$

$$C_4^0 = \frac{b^2}{96} \zeta_1 a_3^0 ML(3a^2 + m^2 b^2) - \frac{\Gamma_1^0 b^4}{112\beta_{22}} ,$$

$$D_1^0 = -D_3^0 = -\frac{Na^2 b}{8(2\beta_{12} + \beta_{66})} ,$$

$$D_2^0 = \frac{a^2 b}{12} \zeta_2 a_2^0 ML - \frac{ab}{16} \zeta_2 a_2^0 MLI_1 + \frac{ab}{16} a_2^0 (3Ea^2 - 2Mb^2) - \frac{E}{12} a^3 b ,$$

$$D_4^0 = \frac{ab}{96} \zeta_2 a_2^0 ML(3mb^2 + a^2) - \frac{ab^3}{16} M\sigma_2 a_2^0 - \frac{E}{96} a^3 b .$$

Решим теперь задачу об упругом равновесии ортотропного эллиптического цилиндрического бруса, когда составляющие по осям координат внешних усилий определены равенствами $\tau_j = \tau_j(x, y)\, z$ $(j = 1, 2, 3)$; т.е. мы должны определить компоненты напряжения τ_{ij}, которые удовлетворяют в области занятой телом уравнениям (1.5), (1.6) и следующим граничным условиям:

$$(2.15) \qquad \tau_{1j} \cos(n, x) + \tau_{2j} \cos(n, y) = \tau_j(x, y)\, z \quad (j = 1, 2, 3) \quad \text{на} \quad T .$$

Как было показано в предыдущем параграфе, искомые компоненты напряжения будут определены равенствами (1.14), где τ_{jk} $(j, k = 1, 2, 3)$ в нашем случае будут определены формулами (2.10). Нашей задачей является определить неизвестные функции F_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, $\omega_1(x, y)$, $\Phi_1(x, y)$, $\Phi(x, y)$, и неизвестные постоянные a_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ входящие в выражения (1.14).

Учитывая значения (2.1), граничные условия (1.17) и решая граничную задачу 1° предыдущего параграфа, для функций F_j $(j = 2, 3, 4)$, легко находим, что:

$$(2.16) \qquad F_2 = \frac{1}{12} \zeta_2 v_2(x, y) + \frac{1}{8M} I_4 y , \quad F_3 = \frac{1}{12} \zeta_1 v_1(x, y) + \frac{1}{8L} I_3 x ,$$

$$F_4 = -4\zeta_3 xy$$

ζ_1, v_1, I_j определены равенствами (2.4), (2.5) и (2.11).

Легко показать, что

$$(2.17)\quad \mathfrak{z} = x + imy - (\xi + im\eta) = -\frac{a + mb}{2} e^{i\vartheta}(1 - t_1 e^{-i\vartheta})(1 - t_2 e^{-i\vartheta}),$$

$$\mathfrak{z}_j = x + ib_j y - (\zeta + ib_j y) =$$

$$= -\frac{a + b_j b}{2} e^{i\vartheta}(1 - t_{j_1} e^{-i\vartheta})(1 - t_{j_2} e^{-i\vartheta}), \quad (j = 1{,}2).$$

$$\operatorname{Re}\ln \mathfrak{z} = -\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_1^k + t_2^k}{k} e^{-ik\vartheta}, \quad \operatorname{Re}\ln \mathfrak{z}_j = -\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_{j_1}^k + t_{j_2}^k}{k} e^{-ik\vartheta};$$

$Q(\xi, \eta)$, где $\xi = a\cos\vartheta$, $\eta = b\sin\vartheta$ – точка эллипса S; $m, t_1, t_2, t_{j_1}, t_{j_2}$ – определены соответственно равенствами (2.2). (2.3) и (2.8), а ib_j и $-ib_j$ $(j = 1, 2)$ – – корни характеристического уравнения (2.6) (постоянные отброшены).

Учитывая (2.17), а также значение τ_{jk}^* $(j, k = 1, 2, 3)$ и F_j $(j = 2, 3, 4)$, определенных соответственно равенствами (2.10) и (2.16), после простых вычислений уравнения (1.13) и (1.20) в рассматриваемом случае примут вид:

$$(2.18)\quad \Delta_1\omega_1 = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_S (r_j\mu_1^0 + s_j\mu_2^0)(-ib_j\cos(n, x) + \cos(n, y)) \,.$$

$$.\left(\frac{C_j}{\mathfrak{z}_j^2} + \left.\frac{D_j}{\mathfrak{z}_j^2}\right|_{x=0}\right) + \sum_{k,j=0}^{3} A_{kj}y^k x^j, \quad (A_{kj} = 0 \;\text{ при }\; k + j = 0, 4, 5, 6),$$

$$\Delta_2\Phi_1 = \frac{m}{M}(\beta_{11}Mm^2 - L\beta_{22})\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}(A_k^0 - iB_k^0)\,.$$

$$.\left[k\frac{t_1^k + t_2^k}{z_0^2 - a + m^2b^2} - z_0\frac{t_1^k - t_2^k}{(z_0^2 - a^2 + m^2b^2)^{3/2}}\right] +$$

$$+ 2\{[L(\beta_{22} + 2\sigma_2) - m^2M(\beta_{11} + 2\sigma_1)]\,\zeta_2 + E(\sigma_{12} + \sigma_1\sigma_2) - \sigma_2\}\,.$$

$$.\, a_2^0 x + 2\{[L(\beta_{22} + 2\sigma_2) - m^2M(\beta_{11} + 2\sigma_1)]\,\zeta_1 +$$

$$+ E(\sigma_{12} + \sigma_1\sigma_2) - \sigma_1\}\, a_3^0 y + a_2^0 L\sigma_2\beta_{22} + a_3^0 M\sigma_1\beta_{11}\,;$$

где:

$$(2.19)\qquad \mu_1^0 = \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k^0\cos k\vartheta + \beta_k^0\sin k\vartheta),$$

$$\mu_2^0 = \sum_{k=1}^{\infty}(\gamma_k^0\cos k\vartheta + \delta_k^0\sin k\vartheta);$$

$A_k^0, B_k^0, \alpha_k^0, \beta_k^0, \gamma_k^0, \delta_k^0$ – определены равенствами (2.12); a_j^0 $(j = 1, 2, 3, 4)$ – определены равенствами (2.11); $m, z_0, \zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, r_j, s_j, p_j, q_j$ $(j = 1, 2)$ – определены равенствами (2.3), (2.4) и (2.7); $\sigma_{kj}, \sigma_j, 1/L, 1/M, 1/N$ – модули упругости, а через A_{kj} $(k, j = 1, 2, 3)$ C_j и D_j $(j = 1, 2)$ — обозначены следующие выражения:

$$A_{01} = \frac{ML}{E}\left[\frac{3I_1}{E}(\sigma_{11} - \sigma_{12}) - \frac{a_3^0}{2E} I_3(\sigma_{11}m^2 + \sigma_{12}) - \frac{\sigma_1}{2} G_1 I_1 + 6a^2\sigma_1^2\right] - \tag{2.20}$$

$$- \frac{L}{8} G_1\left(I_1 + \frac{1}{L} I_3\right) - \frac{ML}{4N} a_2^0 M\zeta_2 I_1 ,$$

$$A_{02} = \frac{8}{E} MLa_1^0\zeta_3\left(M\frac{\sigma_{11}}{E} + L\frac{\sigma_{12}}{E} + G_1\sigma_1\right) - La_1^0\zeta_3 G_1 - \frac{\Gamma_3^0 ML}{2N(2\beta_{12}+\beta_{66})},$$

$$A_{03} = \frac{2}{3} MLa_3^0\zeta_1 \frac{1}{E}\left(-M\frac{\sigma_{11}}{E} - L\frac{\sigma_{12}}{E} + 2EL\frac{\sigma_1}{\zeta_1} - G_1\sigma_1\right) +$$

$$+ \frac{1}{6} G_1 L + \frac{ML}{3N} a_2^0(M\zeta_2 - E),$$

$$A_{10} = \frac{M}{8}\left(I_1 - \frac{1}{M} I_4\right) G_1 - a_3^0\frac{ML}{4N}(m^2 I_3 + M\zeta_1 I_1) +$$

$$+ \frac{a_2^0}{4E} ML\left[\frac{E}{m^2} a_2^0 I_4 - 2\frac{\sigma_{12}}{E}(\zeta_2 I_1 - I_4)\right] -$$

$$- 2\frac{\sigma_{22}}{E} L\zeta_2 I_1 - 4\sigma_2\left(3\zeta_2 I_1 - \frac{3}{Ma_2^0} I_4\right),$$

$$A_{20} = a_1\zeta_3 MG_1 - \frac{M^2L}{N} a_2^0 m^2\zeta_2 -$$

$$- \frac{4ML}{E}\left(2\frac{\sigma_{12}}{E} a_1^0 M\zeta_3 - 2\frac{\sigma_{12}}{E} L\zeta_3 - 3a_1^0\sigma_2\zeta_3\right) - \frac{4ML}{N} a_1^0 M ,$$

$$A_{30} = \frac{1}{6} m^2 MG_1 - \frac{ML}{6N\beta_{22}}(2a_3^0 m^2\beta_{22} + \Gamma_1^0 N) +$$

$$+ \frac{2}{3E} a_2^0 ML\left(2M\sigma_2\frac{\sigma_{12}}{E} - \frac{\sigma_{22}}{E} Mm^2\zeta_2 - 6m^2\sigma_2\zeta_2\right),$$

$$A_{11} = 2ML\frac{1}{E}\left[\frac{\sigma_{11}}{E} a_2^0\zeta_2 m^2 + \frac{\sigma_{12}\Gamma_3^0}{E(2\beta_{12} + \beta_{66})} - \frac{\sigma_1\sigma_2\Gamma_3^0}{3(2\beta_{12} + \beta_{66})} -\right.$$

$$\left. - 2a_2^0 E\sigma_1\sigma_2 + 4\sigma_1^2\sigma_2 a_2 M + m^2\sigma_1 G_1\right] - \frac{M\sigma_1\Gamma_3^0}{6(2\beta_{12}+\beta_{66})} - \frac{8M^2L}{N} a_1^0\zeta_3 ,$$

$$A_{12} = \frac{2}{E} MLa_2^0\zeta_2 m^2\left(6\sigma_1 + L\frac{\sigma_{12}}{E}\right) + \frac{a_2^0}{E}[(E - 2M\sigma_1)\sigma_2 - m^2\zeta_2 G_1] -$$

$$- \frac{M}{2} G_1 + \frac{a_3^0 M^2 L}{N}\zeta_1 ,$$

$$A_{21} = \frac{2ML}{E} a_3^0 \left[\frac{\sigma_{11}}{E} Mm^2\zeta_1 + \frac{\Gamma_1^0}{a_3^0\beta_{22}} \left(\frac{\sigma_{11}\Gamma_1^0}{3E} - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) + \frac{\sigma_{12}}{E} Lm^2\zeta_1 + \sigma_{22} - \right.$$

$$\left. - E\sigma_1 \left(2\sigma_2 - \frac{E}{L} \right) \right] + L \left[\frac{\sigma_1 \Gamma_1^0}{2\beta_{22}} + a_3^0 E \left(2\sigma_2 - \frac{E}{L} \right) + m^2 G_1 \right] -$$

$$- \frac{a_3^0 M}{2} \left[\sigma_1 (E - 2M\sigma_2) + \zeta_1 G_1 \right],$$

$$C_j = ib_j \left[- 2ML(ib_j\beta_{11} + \beta_{12}) - \frac{L}{2} (\sigma_2 - \sigma_1 b_j^2) - \frac{M}{2b_j^2} (\sigma_2 - \sigma_1 b_j^2) + \right.$$

$$\left. + i \frac{ML}{N} b_j \right],$$

$$D_j = iMLb_j \left[\frac{1}{N} - \frac{1}{b_j^2} (\beta_{22} - \beta_{12} b_j^2) \right],$$

$$G_1 = E - M\sigma_1 - L\sigma_2 ;$$

$$A_{k+j} = 0 \quad \text{при} \quad k + j = 0, 4, 5, 6 .$$

Входящие в эти выражения все постоянные определены выше.

За частное решени уравений (2.18) соответственно можем взять следующие выражения:

$$(2.21) \quad \omega_1 = - \frac{1}{\pi} \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{2} \int_S (r_j \mu_1^0 + s_j \mu_2^0) (-ib_j \cos(n, x) + \cos(n, y)) \, .$$

$$\cdot \left(\frac{C_j ln \mathfrak{z}_j}{ib_j L + M} + \frac{D_j}{ib_j L} \ln \mathfrak{z}_j \bigg|_{x=0} \right) ds_Q + \sum_{k=1}^{2} \frac{LA_{0k} x^{k+2} + A_{k0} M y^{k+2}}{LM(1 + k)(2 + k)} +$$

$$+ \frac{1}{12LM} \left[Lx^3 y (A_{11} + A_{12} x) + Mxy^3 (A_{11} + A_{21} y) \right],$$

$$(2.22) \quad \Phi_1 = \frac{\beta_{11} m^2 - \beta_{22}}{4Lm(m^2 - b_1^2)(m^2 - b_2^2)} \operatorname{Re} \int_S \mu_{\mathfrak{z}}^0 (3\mathfrak{z}^2 - 2\mathfrak{z}^2 \ln \mathfrak{z}) \, ds_Q + \frac{a_2^0 \Lambda_1^0}{60\beta_{22}} x^5 +$$

$$+ \frac{a_3^0 \Lambda_2^0}{60\beta_{11}} y^5 + \frac{a_2^0}{24} L\sigma_2 x^4 + \frac{a_3^0}{24} M\sigma_1 y^4 + \frac{a_1^0}{2} Ex^2 - \frac{2}{\beta_{66}} a_1^0 \sigma_1 \sigma_2 y^2 ;$$

где:

$$(2.23) \qquad \mathfrak{z} = x + imy - (\xi + imy),$$

$$\mu^0 = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^0 \cos k\vartheta + B_k^0 \sin k\vartheta),$$

A_k^0, B_k^0 — определены равенствами (2.12), а через

$\Lambda_k^0 (k = 1, 2)$ — обозначены выражения:

$$(2.23^*)\quad \Lambda_k^0 = [L(\beta_{22} + 2\sigma_2) - m^2M(\beta_{11} + 2\sigma_1)]\,\zeta_k + E(\sigma_{12} + \sigma_1\sigma_2) - \sigma_k \qquad (k = 1, 2)\,.$$

Теперь перейдем к решению граничной задачи 1°, для функции F_1 (см. § 1). Для сокращения записи введем обозначения:

$$(2.24)\quad 1 - \lambda_j^k = \Psi_k^j, \quad p_j\beta_k^0 - iq_j\gamma_k^0 = \chi_k^j, \quad p_j\alpha_k' - iq_j\delta_k^0 = \varphi_k^j,$$

$$1 + \lambda_j^k = \Psi_k'^j, \quad p_j\beta_k^0 + iq_j\gamma_k^0 = \chi_k'^j, \quad p_j\alpha_k'^j + iq_j\delta_k^0 = \varphi_k'^j,$$

$$s_j\gamma_k^0 - ir_j\beta_k^0 = T_k^j, \quad s_j\delta_k^0 - ir_j\alpha_k^0 = \varepsilon_k^j, \quad M^2 + b_j^2L^2 = L_j,$$

$$s_j\gamma_k^0 + ir_j\beta_k^0 = T_k'^j, \quad s_j\delta_k^0 + ir_j\alpha_k^0 = \varepsilon_k'^j,$$

$$M^2Lb_j^2\left(2\beta_{11} - \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}Lb_j^2\left(M\sigma_1 - \frac{M\sigma_2}{b_j^2} - L\sigma_2 + L\sigma_1b_j^2 - 4ML\beta_{12}\right) = M_j,$$

$$\frac{1}{2}\left(M\sigma_1 - \frac{M\sigma_2}{b_j^2} - L\sigma_2 + L\sigma_1b_j^2 - 4ML\beta_{12}\right) - ML^2b_j^2\left(2\beta_{11} - \frac{1}{N}\right) = R_j\,.$$

$$(2.25)\quad B_{11} = \frac{1}{6M}A_{01}a^3 - \frac{3}{32M}A_{03}a^5 + \frac{5}{96L}A_{21}ab^4 +$$

$$+ \frac{7}{192}\left[\frac{\Gamma_1^0}{2\beta_{22}}\sigma_1 + a_3^0\left(2\sigma_2 - \frac{E}{L}\right) - a_3^0G_1\zeta_1m^2\right] -$$

$$- \frac{a^3b^2}{16}a_3^0\left(\frac{1}{2}E\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2L + \frac{1}{2}G_1\zeta_1\right) + \frac{3}{64}ab^2G_1\left(\frac{1}{L}I_3 - I_1\zeta_1a_3^0\right),$$

$$B_{12} = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{M}A_{02}a^4 + \frac{1}{2L}A_{20}b^4\right) - \frac{1}{2}a^2b^2G_1a_4^0\zeta_3\,,$$

$$B_{13} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{M}A_{01}a^3 + \frac{3}{8M}A_{03}a^5 - \frac{5}{24L}A_{21}ab^5\right) +$$

$$+ \frac{3}{32}a^3b^2a_3^0\left(\frac{1}{2}E\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2L + \frac{1}{2}G_1\zeta_1\right) - \frac{1}{384}ab^4\left[\frac{\Gamma_1^0\sigma_1}{2\beta_{22}} +\right.$$

$$\left. + a_3^0E\left(2\sigma_2 - \frac{E}{L}\right) - G_1a_3^0\zeta_1m^2\right] - \frac{ab^2}{64}G_1\left(\frac{1}{L}I_3 - \zeta_1I_1a_3^0\right),$$

$$B_{14} = \frac{1}{24}\left(\frac{1}{M}A_{02}a^4 + \frac{1}{L}A_{20}b^4\right),$$

$$B_{15} = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{M}A_{03}a^5 + \frac{1}{3L}A_{21}ab^4\right) - \frac{3}{384}\left[\frac{\Gamma_1^0\sigma_1}{2\beta_{22}} + a_3^0E\left(2\sigma_2 - \frac{E}{L}\right) -\right.$$

$$\left. - G_1a_3^0\zeta_1m^2\right] - \frac{1}{96}a_3^0\left(\frac{1}{2}E\sigma_1 - \sigma_1\sigma_2L + \frac{1}{2}G_1\zeta_1\right),$$

$$B_{21} = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{L}A_{10}b^3 + \frac{1}{4L}A_{30}b^5 + \frac{1}{12M}A_{12}a^4b + \frac{1}{2L}A_{11}b^3\right) +$$

$$+ \frac{13}{384}a^4b\left[\frac{\Gamma_2^0\sigma_2}{2\beta_{11}} + a_2^0E\left(2\sigma_1 - \frac{E}{M}\right) + a_2^0G_1\zeta_2\right] -$$

$$- \frac{5}{48}a^2b^3a_2^0\left(\frac{E}{2}\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2M - \frac{1}{4}G_1\zeta_2m^2\right) - \frac{1}{8}a^2bG_1\left(I_1\zeta_2a_2^0 - \frac{1}{M}I_4\right),$$

$$B_{22} = -\frac{A_{11}}{24L}ab(a^2 + b^2) - \frac{\Gamma_3^0\sigma_2ab^3}{72(2\beta_{12} + \beta_{66})},$$

$$B_{23} = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{L}A_{10}b^3 - \frac{3}{8L}A_{30}b^5 - \frac{5}{24M}A_{12}a^4b + \frac{1}{2L}A_{11}b^3 - \frac{1}{8M}A_{11}a^4b\right) +$$

$$+ \frac{1}{384}a^4b\left[\frac{\Gamma_2^0\sigma_2}{2\beta_{11}} + a_2^0E\left(2\sigma_1 - \frac{E}{M}\right) + a_2^0G_1\zeta_2\right] +$$

$$+ \frac{1}{32}a_2^0\left(\frac{E}{2}\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2M - 5G_1\zeta_2m^2\right) + \frac{a^2b}{32}G_1\left(I_1a_2^0\zeta_2 - \frac{1}{M}I_4\right),$$

$$B_{24} = \frac{A_{11}}{96}ab\left(\frac{1}{L}b^2 - \frac{1}{M}a^2\right) - \frac{\Gamma_3^0ab}{144(2\beta_{12} + \beta_{66})}(b\sigma_2 + a\sigma_1),$$

$$B_{25} = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{L}A_{30}b^5 + \frac{5}{3}A_{12}a^4b\right) - \frac{1}{128}\left[\frac{\Gamma_2^0\sigma_2}{2\beta_{11}} + a_2^0E\left(2\sigma_1 - \frac{E}{M}\right) +\right.$$

$$\left. + a_2^0G_1\zeta_2\right] - \frac{1}{96}a^2b^3a_2^0\left(\frac{E}{2}\sigma_2 - \sigma_1\sigma_2M + \frac{1}{2}G_1\zeta_1\right);$$

Постоянные входящие в эти выражения определены выше.

Очевидно, что когда точка x, y области G стремится к какой-либо точке $\xi_0 = a\cos\vartheta_0$, $\eta_0 = b\sin\vartheta_0$ границы S, тогда:

$$(2.26) \qquad t_1 \to e^{i\vartheta_0}, \quad t_2 \to \lambda e^{-i\vartheta_0}, \quad t_{j_1} \to e^{i\vartheta_0}, \quad t_{j_2} \to \lambda_j e^{-i\vartheta_0},$$

где

$$t_1, t_2, t_{j_1}, t_{j_2}, \lambda \quad \text{и} \quad \lambda_j \quad (j = 1, 2)$$

определены равенствами (2.2), (2.3) и (2.8).

Принимая во внимание обозначения (2.24) и (2.25), значения $\tau_{33}^*(x, y, 0)$ и ω_1 определенных равенствами (2.10) и (2.14), а также зависимости (2.17) и (2.26), тогда значение Ψ_1, определенное равенством (1.17), в случае эллипса, после простых вычислений, примет следующий вид:

$$(2.27) \quad \Psi_1 = -a_1^1Eab + \frac{u_0^1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(u_k^1\cos k\vartheta_0 + V_k^1\sin k\vartheta_0);$$

где:

$$(2.28)\quad u_0^1 = \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\mathscr{L}_j}\Bigg[\mathscr{M}_j(a\psi_1^j\mathscr{E}_1^j - b\psi_1'^j\varphi_1^j) - R_j(a\psi_1^j\chi_1^j + bb_j\psi_1'^j\chi_1'^j) + + 2\mathscr{L}_j(a\sigma_1\psi_1^j\chi_3'^j + b\sigma_2\psi_1'^j\mathscr{E}_3'^j)\left(\psi_3^j + \frac{1}{b_j}\psi_3'^j\right)\Bigg] + \frac{\Gamma_3^0 ab}{48(2\beta_{12} + \beta_{66})} + + \frac{A_{11}}{96L}ab^3 + \frac{\sigma_1}{4}\beta_1(4 - \psi_1^1\psi_1^2),$$

$$u_1^1 = B_{21} - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\mathscr{L}_j}\Bigg[\mathscr{M}_j\left(bP_j\alpha_0^0 + \frac{b}{2}\psi_2'^j\varphi_2^j - \frac{a}{2}\psi_2^j\mathscr{E}_2^j\right) + + R_j\left(bb_j^2 s_j\gamma_0^0 + \frac{bb_j}{2}\psi_2'^j\chi_2'^j - \frac{a}{2}\psi_2^j\chi_2^j\right) - - \mathscr{L}_j(a\sigma_1\psi_1^j\varphi_2^j - b\sigma_2\psi_1'^j T_2^j)\left(\psi_2'^j + \frac{1}{b_j}\psi_2^j\right)\Bigg],$$

$$u_2^1 = B_{22} + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\mathscr{L}_j}\Bigg[(a\sigma_1\psi_1^j\varphi_3^j - b\sigma_2\psi_1'^j T_3^j)\left(\psi_3'^j + \frac{1}{b_j}\psi_3^j\right) - - \mathscr{M}_j(b\psi_1'^j\varphi_1^j + b\psi_3'^j\varphi_3^j + a\psi_1^j\mathscr{E}_1^j - a\psi_3^j\mathscr{E}_3^j) + + R_j(bb_j\psi_1'^j\chi_1'^j + bb_j\psi_3'^j\chi_3'^j - a\psi_1^j\chi_1^j + a\psi_3^j\chi_3^j)\Bigg],$$

$$V_1^1 = B_{11} - \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\mathscr{L}_j}\Bigg[\mathscr{M}_j\left(as_j\gamma_0^0 - \frac{a}{2}\psi_2'^j T_2'^j + \frac{b}{2}\psi_2^j\chi_2'^j\right) - - R_j\left(aP_j\alpha_0^0 + \frac{a}{2}\psi_2'^j\varphi_2^j + \frac{bb_j}{2}\psi_2^j\varphi_2^j\right) - - \mathscr{L}_j(a\sigma_1\psi_1^j\chi_2'^j + b\sigma_2\psi_2'^j\mathscr{E}_2'^j)\left(\psi_2^j + \frac{1}{b_j}\psi_2'^j\right)\Bigg],$$

$$V_2^1 = B_{12} + \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2\mathscr{L}_j}\Bigg[2\mathscr{L}_j(a\sigma_1\psi_1^j\chi_3'^j + b\sigma_2\psi_1'^j\mathscr{E}_3'^j)\left(\psi_3^j + \frac{\psi_3'^j}{b_j}\right) - - \mathscr{M}_j(b\psi_1^j\chi_1'^j + b\psi_3^j\chi_3'^j + a\psi_1'^j T_1'^j - a\psi_3'^j T_3'^j) - - R_j(bb_j\psi_1^j\varphi_1^j + bb_j\psi_3^j\varphi_3^j - a\psi_1'^j\varphi_1'^j + a\psi_3'^j\varphi_3'^j)\Bigg],$$

$$u_k^1 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{\mathscr{L}_j}\Bigg[\mathscr{M}_j(b\psi_{k-1}'^j\varphi_{k-1}^j + b\psi_{k+1}'^j\varphi_{k+1}^j + a\psi_{k-1}^j\mathscr{E}_{k-1}^j - - a\psi_{k+1}^j\mathscr{E}_{k+1}^j) + R_j(bb_j\psi_{k-1}'^j\chi_{k-1}'^j - a\psi_{k-1}^j\chi_{k-1}^j + a\psi_{k+1}^j\chi_{k+1}^j) - - \frac{1}{4}\mathscr{L}_j(a\sigma_1\psi_1^j\varphi_{k+1}^j - b\sigma_2\psi_1^j T_{k+1}^j)\left(\psi_{k+1}'^j + \frac{1}{b_j}\psi_{k+1}^j\right) - - \frac{\mathscr{L}_j}{4}(a\sigma_1\psi_1^j\varphi_{k-1}^j - b_2\psi_2'^j T_{k-1}^j)\left(\psi_{k-1}'^j - \frac{1}{b_j}\Psi_{k-1}^j\right)\Bigg] + B_{2k},$$

$$V_k^1 = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\mathscr{L}_j}\Big[\mathscr{M}_j\big(b\psi_{k-1}^j\chi_{k-1}'^j + b\psi_{k+1}^j\chi_{k+1}'^j + a\psi_{k-1}'^j T_{k-1}'^j - a\psi_{k+1}'^j T_{k+1}'^j\big) -$$

$$- R_j\big(bb_j\psi_{k-1}^j\varphi_{k-1}^j + bb_j\psi_{k+1}^j\varphi_{k+1}^j - a\psi_{k-1}'^j\varphi_{k-1}^j + a\psi_{k+1}'^j\varphi_{k+1}'^j\big) -$$

$$- \frac{\mathscr{L}_j}{4}\big(a\sigma_1\psi_1^j\chi_{k+1}'^j + b\sigma_2\psi_1'^j\mathscr{E}_{k+1}'^j\big)\left(\psi_{k+1}^j + \frac{1}{b_j}\psi_{k+1}'^j\right) -$$

$$- \frac{\mathscr{L}_j}{4}\big(a\sigma_1\psi_1^j\chi_{k-1}'^j + b\sigma_2\psi_2'^j\mathscr{E}_{k-1}'^j\big)\left(\psi_{k-1}^j - \frac{1}{b_j}\psi_{k-1}'^j\right)\Big] + B_{1k}\,;$$

$$(k = 3, 4, 5, \ldots),$$

где

$$B_{2k} = B_{1k} = 0 \quad \text{когда} \quad k = 6, 7, 8, \ldots\,.$$

Таким образом, требуется найти функцию $F_1(x, y)$, которая в эллиптической области G удовлетворяет уравнению $\Delta_1 F_1 = 0$ и граничное значение выражения $(\mathrm{d}_1 F_1)/\mathrm{d}n$ на эллипсе принимает значение Ψ_1 определенное равенством (2.27), т.е.

$$\text{(2.29)} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}_1 F_1}{\mathrm{d}n}\right|_S = -a_1^1 Eab + \frac{u_0^1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(u_k^1 \cos k\vartheta + V_k^1 \sin k\vartheta\big),$$

где операторы Δ_1 и d_1/dn определены равенствами (1.16).

Функцию F_1 будем искать в следующем виде [9] (см. также [6]):

$$\text{(2.30)} \qquad F_1 = -\frac{1}{\sqrt{ML}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_1^k + t_2^k}{k}\big(A_k^1 - iB_k^1\big),$$

где t_1 и t_2 определены равенствами (2.3), а постоянные A_k^1, B_k^1 подлежат определению.

Учитывая (2.2), (2.3) и (2.26), вычислив $(\mathrm{d}_1 F_1)/\mathrm{d}n$ из (2.30) и подставив его в граничное условие (2.29), для определения постоянных A_k^1, B_k^1 получим следующее уравнение:

$$\text{(2.31)} \qquad \sum_{k=1}^{\infty}\big[(\lambda^k - 1)\,A_k^1 \cos k\vartheta_0 - (\lambda^k + 1)\,B_k^1 \sin k\vartheta_0\big] = \frac{u_0^1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\big(u_k^1 \cos k\vartheta_0 + V_k^1 \sin k\vartheta_0\big) - a_1^1 Eab\,.$$

Из последнего выражения легко получим, что:

$$\text{(2.32)} \qquad a_1^1 = \frac{u_0^1}{2Eab}, \quad A_k^1 = \frac{u_k^1}{\lambda^k - 1}, \quad B_k^1 = \frac{V_k^1}{\lambda^k + 1}.$$

Подставляя эти значения в (2.30), получим:

$$\text{(2.33)} \qquad F_1 = -\frac{1}{\sqrt{ML}}\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_1^k + t_2^k}{k}\left(\frac{u_k^1}{\lambda^k - 1} - i\,\frac{V_k^1}{\lambda^k + 1}\right).$$

Мы определили функции F_j $(j = 1, 2, 3, 4)$, ω_1, Φ_1 и постоянное a_1^1, входящие в выражения искомых компонентов τ_{kj}, определенных равенствами (1.14).

Остается найти и решение граничной задачи 2°, т.е. найти функцию Φ и значение постоянных a_j^1 $(j = 2, 3, 4)$. Подставив $\tau_{13}^*(x, y, 0)$, $\tau_{23}^*(x, y, 0)$, $\Phi_1(x, y)$, $F_2(x, y)$, $F_3(x, y)$ и $F_4(x, y)$ из (2.10), (2.16) и (2.22), в граничное условие (1.18) и учитывая зависимости (2.17) и (2.26), легко показать, что граничная задача 2° для эллиптической области в случае нагрузки (2.15) принимает следующий вид: Найти функцию Φ, которая в эллиптической области G удовлетворяет уравнению $\Delta_2 \Phi = 0$, где Δ_2 оператор определен равенством (1.19), и следующим граничным условиям:

$$
\begin{aligned}
(2.34)\qquad \left.\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right|_S &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(h_k^1 \cos k\vartheta_0 + G_k^1 \sin k\vartheta_0\right) + \\
&+ A_1^0[mb(1+\lambda)(\Theta - 1) - a(1-\lambda)\,\Theta)]\,\frac{\vartheta_0}{2} + \\
&+ \frac{\vartheta_0}{2}\, a_2^1 E a^3 b + \sum_{k=0}^{4} \left(C_k^1 \cos k\vartheta_0 + D_k^1 \sin k\vartheta_0\right), \\
\left.\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right|_S &= -\sum_{k=1}^{\infty} \left(l_k^1 \cos k\vartheta_0 + K_k^1 \sin k\vartheta_0\right) + \\
&+ B_1^0\left[a(1-\lambda)\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right) - (1+\lambda)\, mb\Theta L\right]\frac{\vartheta_0}{2} - \\
&- \frac{\vartheta_0}{2}\, a_3^1 E a b^3 + \sum_{k=0}^{4} \left(H_k^1 \cos k\vartheta_0 + P_k^1 \sin k\vartheta_0\right).
\end{aligned}
$$

Выражения независящие от ϑ_0 и не влияющие на напряженное состояние тела, в равенствах (2.34) отброшены; через C_k^1, D_k^1, H_k^1, P_k^1 – обозначены следующие постоянные:

$$
(2.35)\qquad C_k^1 = C_k'^0 + C_k^*, \quad D_k^1 = D_k'^0 + D_k^*, \quad H_k^1 = H_k'^0 + H_k^*, \quad P_k^1 = P_k'^0;
$$
$$
(k = 0, 1, 2, 3, 4),
$$

где $C_k'^0$, $D_k'^0$, $H_k'^0$, $P_k'^0$ – определены аналогичными равенствами, что и постоянные C_k^0, D_k^0, H_k^0, P_k^0 (см. (2.14)), в которых вместо a_k^0 надо брать a_k^1 $(k = 2, 3, 4)$, а постоянные C_k^*, D_k^* и H_k^* определены равенствами:

$$
\begin{aligned}
(2.36)\qquad & C_0^* = 3C_4^* = -\frac{a_3^0}{32\beta_{11}}\,\Lambda_2^0 b^4, \quad C_2^* = \frac{a_3^0}{24\beta_{11}}\,\Lambda_2^0 b^4, \\
& D_1^* = -\frac{a_3^0 M\sigma_1}{24}\, b^3 + \frac{4a_1^0}{\beta_{66}}\,\sigma_1\sigma_2 + \frac{3}{8}\, a_1^0 E a^2 b, \quad D_3^* = \frac{a_3^0}{72}\, M\sigma_1 b^3 + \frac{a_1^0}{8}\, E a^2 b, \\
& C_1^* = C_3^* = D_0^* = D_4^* = 0,
\end{aligned}
$$

$$H_0^* = \frac{5}{96\beta_{22}}\, a_2^0 A_1^0 a^4 + \frac{a_2^0}{6}\, L\sigma_2 a^3 + a_1^0 E + \frac{a_1^0}{3}\, Eab^2 ,$$

$$H_1^* = -\frac{a_2^0}{8}\, L\sigma_2 a^3 - a_1^0 E + \frac{3}{8}\, a_1^0 a b^2 E , \quad H_2^* = 4H_4^* = -\frac{1}{24}\, a_2^0 A_1^0 a^4 ,$$

$$H_3^* = -\frac{a_2^0}{24}\, L\sigma_2 a^3 - \frac{1}{24}\, a_1^0 Eab^2 ,$$

где a_k^0 $(k = 1, 2, 3, 4)$ определены равенствами (2.11), а A_k^0 $(k = 1, 2)$ равенством (2.23).

В граничных условиях (2.34) коэффициенты $h_1^1, G_1^1, l_1^1, K_1^1, \Theta$ определены следующими равенствами:

(2.37)
$$h_1^1 = \frac{B_2^0}{4}\,[mb(\lambda^2 - 1)(\Theta - 1) + a\Theta(\lambda^2 + 1)] ,$$

$$G_1^1 = \frac{A_2^0}{4}\,[mb(\Theta - 1)(\lambda^2 + 1) + a\Theta(\lambda^2 - 1)] ,$$

$$l_1^1 = -\frac{A_2^0}{4}\left[a\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right)(\lambda^2 + L) + mb\Theta L(\lambda^2 - 1)\right],$$

$$K_1^1 = \frac{B_2^0}{4}\left[a\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right)(\lambda^2 - 1) + mb\Theta L(\lambda^2 + 1)\right],$$

$$\Theta = \frac{\pi(\beta_{11} m^2 - \beta_{22})}{(m^2 - b_1^2)(m^2 - b_2^2)} ,$$

где ib_j и $-ib_j$ $(j = 1, 2;\ i^2 = -1)$ являются корнями характеристического уравнения (2.6), A_2^0 и B_2^0 определены равенствами (1.12).

Для значений $k = 2, 3, 4, \ldots$ указанные коэффиценты выражаются следующим образом:

(2.38)
$$h_k^1 = \frac{B_{k+1}^0}{2k(k+1)}\,[mb(\lambda^{k+1} - 1)(\Theta - 1) + a\Theta(\lambda^{k+1} + 1)] + $$
$$+ \frac{B_{k-1}^0}{2k(k-1)}\,[mb(\lambda^{k-1} - 1)(\Theta - 1) - a\Theta(\lambda^{k-1} + 1)] ,$$

$$G_k^1 = \frac{A_{k+1}^0}{2k(k+1)}\,[mb(\lambda^{k+1} + 1)(\Theta - 1) + a\Theta(\lambda^{k+1} - 1)] + $$
$$+ \frac{A_{k-1}^0}{2k(k-1)}\,[mb(\lambda^{k-1} + 1)(\Theta - 1) - a\Theta(\lambda^{k-1} - 1)] ,$$

$$l_k^1 = -\frac{A_{k+1}^0}{2k(k+1)}\left[a\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right)(\lambda^{k+1} + 1) + mb\Theta L(\lambda^{k+1} - 1)\right] + $$
$$+ \frac{A_{k-1}^0}{2k(k-1)}\left[a\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right)(\lambda^{k-1} - 1) - mb\Theta L(\lambda^{k-1} + 1)\right],$$

$$K_k^1 = \frac{B_{k+1}^0}{2k(k+1)}\left[a\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right)(\lambda^{k+1} - 1) + mb\Theta L(\lambda^{k+1} + 1)\right] -$$
$$- \frac{B_{k-1}^0}{2k(k-1)}\left[a\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right)(\lambda^{k-1} - 1) - mb\Theta L(\lambda^{k-1} + 1)\right];$$

где A_k^0, B_k^0 — определены равенствами (2.12).

Функцию Φ будем искать в следующем виде [6]:

(2.39) $$\Phi = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{2}(r_j\mu_1^1 + s_j\mu_2^1)(-ib_j\cos(n_Q, x) + \cos(n_Q, y))\ln\mathfrak{z}_j\,\mathrm{d}s_Q\,,$$

где r_j, s_j — определены равенствами (2.7), $\mathfrak{z}_j$ — равенствами (2.17), ib_j — корни характеристического уравнения (2.6), x, y — внутреняя точка эллиптической области G, $Q(\xi, \eta)$ — точка эллипса S границы G, $\mu_1^1(Q)$ и $\mu_2^1(Q)$ — функции подлежащие определению.

Учитывая (2.7), из (2.39) получим:

(2.40) $$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = -\frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_S(r_j\mu_1^1 + s_j\mu_2^1)\,\mathrm{d}_Q\ln\mathfrak{z}_j\,,$$
$$\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{1}{\pi}\operatorname{Im}\sum_{j=1}^{2}\int_S(p_j\mu_1^1 + q_j\mu_2^1)\,\mathrm{d}_Q\ln\mathfrak{z}_j\,;$$

где τ_j, P_j, S_j, q_j — определены равенствами (2.7).

Из (2.17) получим, что

(2.41) $$\mathrm{d}_Q\ln\mathfrak{z}_j = i\left(1 + \frac{t_{j_1}}{e^{i\vartheta} - t_{j_1}} + \frac{t_{j_2}}{e^{i\vartheta} - t_{j_2}}\right),$$

где t_{j_1} и t_{j_2} — определены равенствами (2.8).

Учитывая (2.26) и (2.41), устремляя точку x, y к точке $\xi_0 = a\cos\vartheta_0$, $\eta_0 = b\sin\vartheta_0$ границы S и используя формулы разрыва потенциала двойного слоя, из (2.40) получим:

(2.42)
$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_S = -\Gamma_2^1(\vartheta_0) - \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{2\pi}(r_j\mu_1^1 + s_j\mu_2^1)\left(1 + \frac{e^{i\vartheta_0}}{e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}} + \frac{\lambda_j e^{-i\vartheta_0}}{e^{i\vartheta} - \lambda_j e^{-i\vartheta_0}}\right)\mathrm{d}\vartheta\,,$$
$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_S = \Gamma_1^1(\vartheta_0) + \frac{1}{\pi}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\int_0^{2\pi}(p_j\mu_1^1 + q_j\mu_2^1)\left(1 + \frac{e^{i\vartheta_0}}{e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}} + \frac{\lambda_j e^{-i\vartheta_0}}{e^{i\vartheta} - \lambda_j e^{-i\vartheta_0}}\right)\mathrm{d}\vartheta\,.$$

Ввиду того, что

(2.43) $$|\lambda_j| = \left|\frac{a - b_j b}{a + b_j b}\right| < 1\,,$$

будем иметь:

$$\frac{\lambda_j e^{-i\vartheta_0}}{e^{i\vartheta} - \lambda_j e^{-i\vartheta_0}} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_j^k e^{-ik(\vartheta+\vartheta_0)} ; \tag{2.44}$$

подставляя (2.42) в граничные условия (2.34) и учитывая (2.44), после простых преобразований получим:

$$\begin{aligned} \gamma_0^1 + \mu_2^1(\vartheta_0) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}\big[-ir_j(\alpha_k^1 \sin k\vartheta_0 + \beta_k^1 \cos k\vartheta_0) + s_j(\gamma_k^1 \cos k\vartheta_0 -\\ - \delta_k^1 \sin k\vartheta_0)\big]\lambda_j^k = \sum_{k=1}^{\infty}(l_k^1 \cos k\vartheta_0 + K_k^1 \sin k\vartheta_0) - \sum_{k=0}^{4}(H_k^1 \cos k\vartheta_0 +\\ + P_k^1 \sin k\vartheta_0) - \frac{\vartheta_0}{2} B_2^0\left[a(1-\lambda)\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right) - (1+\lambda)\, mb\Theta L\right] + \frac{\vartheta_0}{2} a_3^2 Eab^3 , \end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned} \alpha_0^2 + \mu_1^1(\vartheta_0) + \frac{1}{\pi}\sum_{j=2}^{2}\sum_{k=2}^{\infty}\big[p_j(\alpha_k^1 \cos k\vartheta_0 - \beta_k^1 \sin k\vartheta_0) - iq_j(\gamma_k^1 \sin k\vartheta_0 +\\ + \delta_k^1 \cos k\vartheta_0)\big]\lambda_j^k = \sum_{k=1}^{\infty}(h_k^1 \cos k\vartheta_0 + G_k^1 \sin k\vartheta_0) + \sum_{k=0}^{4}(C_k^1 \cos k\vartheta_0 +\\ + D_k^1 \sin k\vartheta_0) + A_2^0 \frac{\vartheta_0}{2}\left[mb(1+\lambda)(\Theta - 1) - a(1-\lambda)\,\Theta\right] + \frac{\vartheta_0}{2} a_2^1 Ea^3 b , \end{aligned}$$

где α_k^1, β_k^1 и γ_k^1, δ_k^1 – являются коэффициентами ряда Фурье, соответственно для функций $\Gamma_2^1(\vartheta_0)$ и $\Gamma_2^1(\vartheta_0)$, т.е.:

(2.46)

$$\alpha_0^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_1^1(\vartheta)\, d\vartheta , \quad \alpha_k^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_1^1(\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta , \quad \beta_k^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_1^1(\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta ,$$

$$\gamma_0^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_2^1(\vartheta)\, d\vartheta , \quad \gamma_k^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_2^1(\vartheta)\cos k\vartheta\, d\vartheta , \quad \delta_k^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \mu_2^1(\vartheta)\sin k\vartheta\, d\vartheta .$$

$$(k = 1, 2, \ldots)$$

в равенствах (2.45) приравняв друг к другу коэффиценты при ϑ_0, получим:

$$\begin{aligned} a_2^1 &= \frac{A_2^0}{Ea^3 b}\left[a(1-\lambda)\,\Theta - mb(1+\lambda)(\Theta - 1)\right] ,\\ a_3^1 &= \frac{B_1^0}{Eab^3}\left[a(1-\lambda)\left(\Theta L + \frac{1}{m}\right) - (1+\lambda)\, mb\Theta L\right] ; \end{aligned} \tag{2.47}$$

это и есть значения (1.23) для эллиптической области. Перейдем к определению коэффицентов $\alpha_k^1, \beta_k^1, \gamma_k^1$ и δ_k^1 $(k = 1, 2, \ldots)$. Умножим выражения (2.45) последовательно на $(1/2\pi)\, d\vartheta_0$, $(1/\pi)\cos k\vartheta_0\, d\vartheta_0$, $(1/\pi)\sin k\vartheta_0\, d\vartheta_0$ и полученные равенства проинтегрируем от нуля до 2π, тогда получим [6]:

$$(2.48)\qquad \Big(1-\sum_{j=1}^{2} p_j\lambda_j^k\Big)\beta_k^1 - i\sum_{j=1}^{2} q_j\lambda_j^k\gamma_k^1 = D_k^1 + G_k^1\,,$$
$$-i\sum_{j=1}^{2} r_j\lambda_j^k\beta_k^2 + \Big(1+\sum_{j=1}^{2} s_j\lambda_j^k\Big)\gamma_k^1 = -H_k^1 + l_k^1\,;$$
$$(2.49)\qquad \Big(1+\sum_{j=1}^{2} p_j\lambda_j^k\Big)\alpha_k^1 - i\sum_{j=1}^{2} q_j\lambda_j^k\delta_k^1 = C_k^1 + h_k^1\,,$$
$$(k = 1, 2, \ldots)\,,$$
$$-i\sum_{j=1}^{2} r_j\lambda_j^k\alpha_k^1 + \Big(1-\sum_{j=1}^{2} s_j\lambda_j^k\Big)\delta_k^1 = K_k^1 - P_k^1\,,$$
$$\big(C_k^1 = D_k^1 = H_k^1 = P_k^1 = 0\,,\quad k = 5, 6, \ldots\big)\,.$$

Произвольные постоянные и величины не зависящие от ϑ_0 отброшены. Определители этих систем соответственно равны $\Delta_1^{(k)}$ и $\Delta_2^{(k)}$, определенные равенствами (2.13). Когда $k \to \infty$, тогда $\Delta_1^{(k)} \to 1$ и $\Delta_2^{(k)} \to 1$; $\Delta_1^{(k)} \neq 0$ и $\Delta_2^{(k)} \neq 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, для любого k, кроме случая, когда $k = 1$. В этом случае $\Delta_2^{(1)} = 0$. При $k = 1$ из системы (2.49) получим:

$$\Big(1+\sum_{j=1}^{2} p_j\lambda_j\Big)\alpha_1^1 - i\sum_{j=1}^{2} q_j\lambda_j\delta_1 = C_1^1 + h_1^1\,,$$
$$-i\sum_{j=1}^{2} r_j\lambda_j\alpha_1^1 + \Big(1-\sum_{j=1}^{2} s_j\lambda_j\Big)\delta_1^1 = K_1^1 - P_1^1\,.$$

После простых преобразований будем иметь:

$$(2.50)\qquad \frac{1}{2}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\alpha_1^1 - \frac{a}{2b}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\delta_1^1 = C_1^1 + h_1^1\,,$$
$$-\frac{b}{2a}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\alpha_1^1 + \frac{1}{2}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\delta_1^1 = K_1^1 - P_1^1\,.$$

Отсюда следует, что:

$$(2.51)\qquad -\frac{b}{a}\big(C_1^1 + h_1^1\big) = K_1^1 - P_1^1\,.$$

Внося значения C_1^1, P_1^1, h_1^1, K_1^1 из (2.35) и (2.37), должны иметь:

$$\frac{b}{2}\,a_4^1L(a^2 - 3m^2b^2) - \frac{b^3}{2}\,a_4^1M\,\frac{a^2 - m^2b^2}{a^2 + m^2b^2} -$$
$$-\frac{B_2^0}{4}\big[mb(\lambda^2 - 1)(\Theta - 1) + a\Theta(\lambda^2 + 1)\big] =$$
$$= \frac{B_2^0}{4}\big[mb(\Theta - 1)(\lambda^2 + 1) + a\Theta(\lambda^2 - 1)\big] +$$
$$+\frac{b}{2}\,a_4^1L(3a^2 - m^2b^2) - \frac{a^2b}{2}\,a_4^1L\,\frac{a^2 - m^2b^2}{a^2 + m^2b^2}\,.$$

Из последнего выражения после элементарных вычислений получим:

$$a_4^1 = \frac{\lambda^2(a^2 + m^2b^2)\left[mb(\Theta - 1) + a\Theta\right]}{\pi(1 + \lambda^2)\left[(a^2 + m^2b^2)^2 + 4m^2a^2b^2\right]} \int_0^{4\pi} \tau_3^0(\vartheta) \sin 2\vartheta \, d\vartheta \,, \tag{2.52}$$

это — значение (1.24) для эллиптической области.

Таким образом, система двух уравнений (2.50) эквивалентна одному уравнению

$$\alpha_1^1 - \frac{a(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{b(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)} \delta_1^1 = \frac{2(C_1^1 + h_1^1)}{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)} \,. \tag{2.53}$$

Как видно из (2.53) один из коэффициентов α_1^1, δ_1^1 остается неопределенным. В дальнейшем станет ясным, что эта неопределенность на напряженное состояние тела никакого влияния не оказывает.

Решая систему (2.48) при $k = 1$, получим:

$$\beta_1^1 = \frac{D_1^1 + G_1^1}{(1 - \lambda_1\lambda_2)} + \frac{(1 - \lambda_1)(1 - \lambda_2)}{4b(1 - \lambda_1\lambda_2)} \left[a(l_1^1 - H_1^1) - b(D_1^1 + h_1^1)\right] , \tag{2.54}$$

$$\gamma_1^1 = \frac{l_1^1 - H_1^1}{1 - \lambda_1\lambda_2} + \frac{(1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)}{4a(1 - \lambda_1\lambda_2)} \left[b(D_1^1 + G_1^1) - a(l_1^1 - H_1^1)\right] ,$$

где заданные величины D, G, l, h, H — определены равенствами (2.35). После решения системы (2.48), (2.49) при $k = 2, 3, 4, \ldots$ получим значение коэффицентов α_k^1, β_k^1 и γ_k^1, δ_k^1 $(k = 2, 3, 4, \ldots)$, которые выражаются точно также как и $\alpha_k^0, \beta_k^0, \gamma_k^0, \delta_k^0$, определенных равенствами (2.12), в которых вместо $C_k^0, D_k^0, H_k^0, P_k^0, l_k^0, h_k^0, G_k^0, K_k^0$ — надо брать $C_k^1, D_k^1, \ldots, G_k^1$ и K_k^1, определенных равенствами (2.35).

Мы определили постоянные a_j^1 $(j = 2, 3, 4)$ и все $\alpha_k^1, \beta_k^1, \gamma_k^1$ и δ_k^1 — коэффициенты разложения Фурье функций $\mu_1^1(\vartheta)$ и $\mu_2^1(\vartheta)$. Поэтому, определена и функция Φ выраженная равенством (2.39).

Таким образом, определены значения постоянных a_j^1 $(j = 1, 2, 3, 4)$, значения функций F_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ и Φ — являющимися решениями граничных задач 1° и 2° (§ 1), а также найдены значения ω_1 и Φ_1 — частные решения уравнений (1.13) и (1.20), т.е. определены все неизвестные, входящие в выражения компонентов напряжений (1.14).

Этим самым дано решение задачи Альманзи для ортотропного эллиптического бруса, когда боковая нагрузка задана равенством (2.15).

После простых выкладок из (2.39) получим:

(2.55)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\beta_1^1}{2ab}[4 - (1+\lambda_1)(1+\lambda_2)] + \frac{a\gamma_1^1}{2b^2}(1-\lambda_2)(1+\lambda_2) +$$

$$+ \frac{1}{2b}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(1-\lambda_j)\left[p_j(\alpha_k^1 - i\beta_k^1) + q_j(\gamma_k^1 - i\delta_k^1)\right]\frac{t_{j_1}^k - t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\beta_1^1 b}{2a^2}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2) - \frac{\gamma_1^1}{2a}[4 - (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)] -$$

$$- \frac{1}{2a}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(1+\lambda_j)\left[r_j(\alpha_k^1 - i\beta_k^1) + s_j(\gamma_k^1 - i\delta_k^1)\right]\frac{t_{j_1}^k - t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{2a}(1+\lambda_1)(1+\lambda_2)\left(\alpha_1^1 - \frac{a(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}{b(1+\lambda_2)(1+\lambda_2)}\delta_1^1\right) +$$

$$+ \frac{1}{2a}\operatorname{Re}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=2}^{\infty} k(1+\lambda_j)\left[p_j(\alpha_k^1 - i\beta_k^1) + q_j(\gamma_k^1 - \delta_k^1)\right]\frac{t_{j_1}^k - t_{j_2}^k}{\sqrt{z_j^2 - a^2 + b_j^2 b^2}};$$

где: $r_j, p_j, s_j, q_j, \lambda_j, z_j$ $(j = 1, 2)$ — определены равенствами (2.7) и (2.8); $\delta_1^1, \beta_1^1, \gamma_1^1, \delta_1^1$ — определены равенствами (2.53) и (2.54), а $\delta_k^1, \beta_k^1, \gamma_k^{(1)}$ и δ_k^1 $(k = 2, 3, 4, \ldots)$ — определены формулами аналогичными формулам (2.12), в которых, как было отмечено, вместо величин $C_k^0, D_k^0, \ldots, K_k^0$ надо взять — $C_k^1, D_k^1, \ldots, K_k^1$, определенных равенствами (2.35), (2.37), (2.38).

Как видно из (2.55) один из постоянных α_1^1 и δ_1^1, входящих в выражение $(\partial^2\Phi)/(\partial x\, \partial y)$, можно взять произвольно.

Учитывая значения $(\partial^2\Phi)/(\partial x^2)$, $(\partial^2\Phi)/(\partial y^2)$, $(\partial^2\Phi)/(\partial x\, \partial y)$, F_j и a_j^1 $(j = 1, 2, 3, 4)$, определенных соответственно равенствами (2.16), (2.30), (2.32), (2.47), (2.52) и (2.55), тогда выражения компонентов напряжений (1.14) можем представить в следующем виде:

(2.56)
$$\frac{1}{1+l}\tau_{11}^1 = \int_0^z \tau_{11}^0\, \mathrm{d}z - \int \tau_{13}^0(x, y, 0)\, \mathrm{d}x + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \tau_{11}',$$

. . . .

$$\frac{1}{1+l}\tau_{23}^1 = \int_0^z \tau_{23}^0\, \mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int \tau_{33}^0(x, y, 0)\, \mathrm{d}y - \frac{\partial \omega_1}{\partial x} + \tau_{23}';$$

где: $\tau_{kj}^0 \equiv \tau_{kj}^*$ — определены равенствами (2.10); $\omega_1(x, y)$ и $\Phi_1(x, y)$ — определены равенствами (2.21) и (2.22), а τ_{kj}', входящие в (2.56), будут иметь точно такое же выражение, что и τ_{kj}^*, определенные равенствами (2.10), в которых все величины с верхними индексами — ноль, надо заменить величинами с верхними индексами — один (т.е., вместо $C_k^0, D_k^0, \ldots, K_k^0$, надо взять — $C_k^1, D_k^1, \ldots, K_k^1$).

Допустим, что требуется найти решение задачи Альманзи для ортотропного эллиптического бруса, когда на боковой поверхности бруса вместо (2.15) должны быть выполнены следующие граничные условия:

$$\tau_{1j} \cos(n, x) + \tau_{2j} \cos(n, y) = \tau_j(x, y)\, z^2 . \tag{2.57}$$

Теперь уже не требуется решение граничных задач 1° и 2° (§ 1).

В формулах (1.14) вместо τ^*_{kj} надо подставить τ^1_{kj}, определенные равенствами (2.56) и коэффициенты разложения в ряд Фурье искомых величин, которые мы теперь обозначим через $A^{(2)}_k, B^{(2)}_k, \alpha^{(2)}_k, \beta^{(2)}_k, \gamma^{(2)}_k, \delta^{(2)}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ – будут выражены через известные величины $A^1_k, B^1_k, \ldots, \delta^1_k$ точно такимиже формулами, какими выражены последние через $A^0_k, B^0_k, \ldots, \delta^0_k$, определенных равенствами (2.12).

Точно также, аналогично постоянным a^1_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ – определяются и новые постоянные $a^{(2)}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$; т.е., если мы хотим решить задачу Альманзи для ортотропного эллиптического бруса, когда в граничные условия (2.57) показателем осевой координаты z является произвольное неотрицательное целое число l, то достаточно иметь решение задачи Альманзи с граничными условиями (2.15), и затем вся задача сводится к простому вычислению коэффициентов $C^{(l)}_k, D^{(l)}_k, \alpha^{(l)}_k, \beta^{(l)}_k, \gamma^{(l)}_k, \delta^{(l)}_k$ и $a^{(l)}_j$ $(j = 1, 2, 3, 4)$.

Выражения этих коэффициентов гораздо упростятся, когда $\tau_j(x, y)$ входящие граничные условия (2.15), имеют какие-либо конкретные значения.

Непосредственно видно, что полученные ряды будут удовлетворять всем условиям, рассматриваемой задачи, если третие производные заданных на боковой поверхности цилиндрического бруса функций τ_j удовлетворяют условиям Дирихле в промежутке $[0, 2\pi]$.

Очевидно, что из решения для эллиптического бруса, как частный случай, можно получить решение задачи Альманзи для ортотропного кругового цилиндрического бруса.

Цитированная литература

[2] *E. Almansi:* Sopra la deformazione dei cilindri sollecitate lateralmente. Rendic. Accad. Lincei, Roma, ser. 5, t. X, 1901.

[2] *Г. Ю. Джанелидзе:* Задачи теории упругости анизотропной среды приводящиеся к плоским. Проблемы механики сплошной среды, АН СССР, 1962 г.

[3] *С. Г. Лехницкий:* Кручение анизотропного стержня усилиями, распределенными по боковой поверхности. Прикл. мат. и механика, т. XXV, вып. I, 1961 г.

[4] *С. Г. Лехницкий:* Анизотропные пластинки, 1957 г.

[5] *Г. Ю. Джанелидзе:* Статика упруго-пластических стержней. Докторская диссертация, Ленинградский Политехн. ин-т, 1949 г.

[6] *Г. М. Хатиашвили:* Упругое равновесие однородного ортотропного цилиндрического бруса с нагруженной боковой поверхностью. Труды Вычислительного центра АН Грузинской ССР, т. II, 1962 г.

[7] *К. Миранда:* Уравнения с частными производными эллиптического типа, 1957 г.

[8] *Д. И. Шерман:* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды, Труды Сейсмологического Института, № 86, 1938 г.
[9] *М. О. Башелейшвили:* Эффективное решение некоторых граничных задач статики ортотропного упругого тела. Труды Вычислительного центра АН Грузинской ССР, т. II, 1962 г.

Výtah

ALMANSIHO ÚLOHA PRE HOMOGENNÍ ORTOTROPICKÉ VALCOVÉ TELESO

G. M. CHATIAŠVILI

V práci je dané efektívne riešenie úlohy Almansi pre ortotropické valcové telesa, keď zaťaženie na valec je mocninove závislé na súradnici z rovnobežnej s osou valca.

Za predpokladu, že je známe riešenie s okrajovými podmienkami danými zložkami $\tau_j^* = \chi_j(x, y) z^l$, kde l je kladné celé číslo, je riešenie úlohy pre $\tau_j = \chi_j(x, y) z^{l+1}$ prevedené na riešenie 2 typov rovinných úloh. Po vyjadrení podmienok existencie riešenia týchto rovinných úloh je odvodené riešenie pre špeciálny prípad eliptického ortotropického valca s okrajovými podmienkami danými zložkami $\tau_j = \chi_j(x, y) z$. Napätia v tomto prípade sú dané konvergentnými radmi. Keď zložky zaťaženia sú úmerné z^2 alebo vyššej mocnine z, nie je potom potrebné znovu riešiť odpovedajúce rovinné úlohy, iba jednoducho vypočítať príslušné koeficienty.

Summary

THE ALMANSI PROBLEM FOR THE HOMOGENEOUS ORTHOTROPIC CYLINDER

G. M. CHATIASHVILI

An effective solution of the Almansi problem is given for an orthotropic cylindrical body with load proportional to a power of the z-coordinate along the cylinder axis.

If there is known the solution to boundary data with components $\tau_j = \chi_j(x, y) z^l$ for a positive integer l, then the solution corresponding to $\tau_j = \chi_j(x, y) z^{l+1}$ is reduced to the solution of two types of problems in the plane; sufficient conditions for existence of solution of these latter types of problem are given. The elliptic orthotropic cylinder with components of boundary data of the form $\tau_j = \chi_j(x, y) z$ is then solved. If these components are proportional to the second or higher power of z, the corresponding plane problems need not be solved again, and it suffices to compute certain coefficients.

Адрес автора: *Г. М. Хатиашвили*, Вычислительный Центр Академии Наук Грузинской ССР, Акурская 8, Город Тбилиси.