

Aplikace matematiky

Vladimír Koloušek

Kmitání soustav s neprizmatickými pruty

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 4, 261–272

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102859>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

KMITÁNÍ SOUSTAV S NEPRIZMATICKÝMI PRUTY

VLADIMÍR KOLOUŠEK

(Došlo dne 9. června 1962.)

Zjednodušená metoda deformační pro výpočet kmitajících rámových soustav s neprizmatickými pruty, při níž koncové síly se počítají z příčinkových čar jednotlivých prutů.

ÚVOD

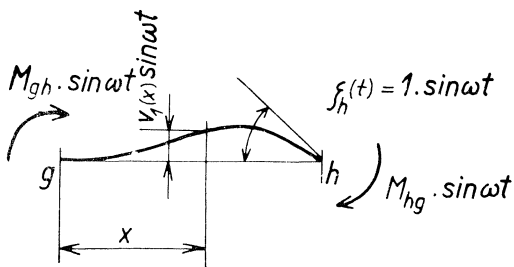
Autor tohoto pojednání řešil v [1] (str. 64) kmitání soustav s pruty proměnného průřezu a s pruty křivými. Řešení deformační metodou spočívá v tom, že neprizmatický prut dělíme na části, kterých musí být takový počet, aby každá z nich mohla být pokládána za přímou konstantního průřezu. Při sestavování deformačních rovnic je možno vyjádřit koncové momenty a síly přímých prizmatických částí frekvenčními funkcemi $F(\lambda)$, které jsou v [1] tabelovány. Tyto funkce lze také vyjádřit mocninovými řadami, které jsou uvedeny rovněž v [1]. Ing. FIŘT uvedl v [3] přibližné řešení zjednodušené, které spočívá v tom, že v mocninových řadách vyjadřujících frekvenční funkce $F(\lambda)$ ponechává pouze první dva členy. Dospívá tak k jednoduché charakteristické rovnici typu $|\mathbf{A} + \lambda^4 \mathbf{E}| = 0$, kde prvky matic jsou konstanty. Uvedeného způsobu lze použít tehdy, jestliže λ nepřekračuje hodnotu 2,30.

Tento způsob výpočtu se stává obtížným tehdy, je-li prut silně zakřiven nebo jestliže se průřez prutů mění v širokých mezích. Potom jsme nuceni dělit prut na mnoho částí ne proto, abychom snižovali hodnotu λ , ale proto, abychom vystihli pokud možno tvar prutu. Takovým dělením dostáváme velký počet styčníků a tím také velký počet neznámých deformací a deformačních rovnic. Tyto nevýhody odstraňuje metoda uvedená v tomto pojednání, při níž se soustava rozděluje na malý počet neprizmatických částí, ale přitom zůstává výpočet dostatečně přesný.

ROZBOR FREKVENČNÍCH FUNKCÍ $F(\lambda)$

Dříve než přistoupíme k vlastnímu výkladu metody, ukážeme, jaký fyzikální význam mají jednotlivé členy mocninových řad frekvenčních funkcí $F(\lambda)$. Funkce-

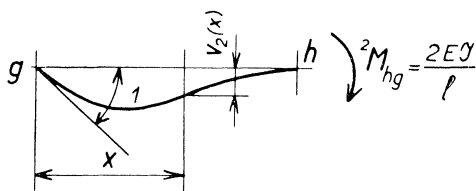
mi $F(\lambda)$ vyjadřujeme koncové momenty a síly prutu, jehož konce konají nucený harmonický pohyb. Tak např. otáčí-li se pravý konec h prizmatického prutu gh s jedničkovou amplitudou (obr. 1a), má koncový moment $M_{gh}(t)$ amplitudu o velikosti



$$(1) \quad M_{gh} = \frac{EJ}{l} F_1(\lambda).$$

Rozvedme funkci $F_1(\lambda)$ řadou ([1], str. 191)

$$(2) \quad F_1(\lambda) = 2 + \frac{\lambda^4}{140} + 0,000015704 \lambda^8 + \dots$$



Dosadíme-li do (1), dostaneme

$$(3) \quad M_{gh} = \frac{2EJ}{l} + \frac{EJ}{l} \cdot \frac{\lambda^4}{140} + \frac{EJ}{l} 0,000015704 \lambda^8 + \dots$$

Obr. 1. Deformace prizmatického prutu

a) při harmonickém pootáčení pravého konce s jedničkovou amplitudou;

b) při statickém pootáčení levého konce.

První člen je koncový moment na pružném nehmotném prutu, další členy pak vyjadřují vliv setrvačných sil, které

vznikají pohybem hmoty nosníku. Podle věty o vzájemnosti, kterou aplikujeme na stavy podle obr. 1a a 1b, platí

$$(4) \quad M_{gh} \cdot 1 + \int_0^l \mu \omega^2 v_1(x) v_2(x) dx = \frac{2EJ}{l},$$

kde význam označení je patrný z obr. 1a a 1b. Přitom podle [1] str. 21, 23 a 71, 72, platí

$$(5) \quad v_1(x) = -\frac{l}{2\lambda^2} F_1(\lambda) \left(\cosh \frac{\lambda x}{l} - \cos \frac{\lambda x}{l} \right) + \frac{l}{2\lambda^3} F_3(\lambda) \left(\sinh \frac{\lambda x}{l} - \sin \frac{\lambda x}{l} \right),$$

$$(6) \quad v_2(x) = \frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x.$$

Z (1), (3) a (4) vychází

$$(7) \quad \int_0^l \mu \omega^2 v_1(x) v_2(x) dx = \frac{EJ}{l} [2 - F_1(\lambda)] = -\frac{EJ}{l} \left[\frac{\lambda^4}{140} + 0,000015704 \lambda^8 + \dots \right] = -l^3 \mu \omega^2 \left[\frac{1}{140} + 0,000015704 \lambda^4 + \dots \right].$$

Kdybychom předpokládali, že v obr. 1a je pravý konec prutu pootočen *staticky* o jedničkový úhel $\zeta_h = 1$, vyšlo by místo (5)

$$(8) \quad v_1(x) = \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right)$$

a bylo by

$$(9) \quad \int_0^l \mu \omega^2 v_1(x) v_2(x) dx = \mu \omega^2 \int_0^l \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{x^2}{l} \right) \left(\frac{x^3}{l^2} - \frac{2x^2}{l} + x \right) dx = - \frac{l^3 \mu \omega^2}{140}.$$

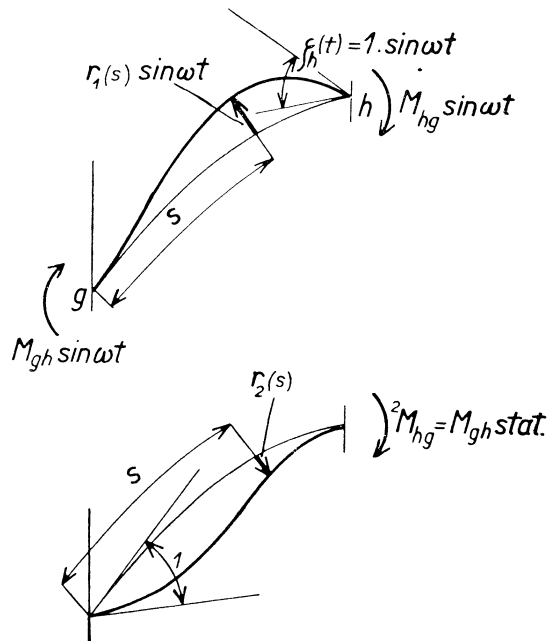
Ze vzorců (3), (7) a (9) pak vyplývá, že druhý člen v (3) představuje vliv setrvačných sil počítaných za předpokladu, že prut kmitá ve tvaru statického přetvoření.

Uvedené vztahy platí nejenom pro funkci $F_1(\lambda)$, ale dají se zobecnit pro libovolnou frekvenční funkci $F_i(\lambda)$. Rozvedeme-li funkci $F_i(\lambda)$ řadou, platí pro $i = 1, \dots, 12$, že první člen řady vyjadřuje vliv pružného odporu při statickém přetvoření, druhý člen značí vliv setrvačných sil na drahách rovných statickému přetvoření a vyšší členy vliv rozdílu dynamického a statického přetvoření. Při vyšších i [t. j. u $F_{13}(\lambda)$ až $F_{17}(\lambda)$] první člen odpadá.

SOUSTAVY S PRUTY PROMĚNNÉHO PRŮŘEZU

Jestliže je u prizmatických prutů možné počítat v určitých mezích λ (1 až 2,3) jenom s dvěma členy řady funkcí $F(\lambda)$ a předpokládat, že dynamické křivky průhybu jsou za stejných koncových přetvoření prutů přibližně totožné s křivkami průhybu statického, je jistě možné postupovat podobně i u prutů proměnného průřezu a u prutů křivých. Protože statické koncové síly a průhyby bývají k dispozici již z vyšetřování statického nebo se dají snadno stanovit, nebude výpočet obtížný.

Hodnota $\lambda = l^4 \sqrt{\mu \omega^2 / EJ}$ je u těchto prutů proměnná, poněvadž po délce prutu se mění jak poměrná hmota μ tak moment setrvačnosti průřezu J . Průměrné λ by nemělo překročit hodnotu 2,3, aby výpočet byl ještě dostatečně přesný. Podle toho volíme počet částí soustavy. Početní příklady však ukazují, že u prutů oboustranně



Obr. 2. Deformace křivého prutu
a) při harmonickém pootáčení pravého konce;
b) při statickém pootočení levého konce.

upnutých je možno posunout tuto hranici značně výše ($\lambda \cong 3$). Koncový moment křivého prutu M_{gh} při jedničkovém pootočení konce h plyne ze vzorce

$$(10) \quad M_{gh} = M_{gh \text{ stat.}} + \omega^2 \int_0^l \mu(s) r_1(s) r_2(s) ds,$$

kde význam označení je patrný z obr. 2a, 2b. Součin vektorů ve vzorci (10) je skalární. Analogicky vypočteme i M_{hg} a všechny koncové síly.

Naznačeným způsobem dospíváme k účinné, jednoduché a dostatečně přesné metodě dynamického výpočtu soustav s neprizmatickými pruty. Detailní postup ukážeme v číselných příkladech.

Číselný příklad 1. Na obr. 3 je zobrazen oboustranně dokonale vetknutý nosník proměnného průřezu. Soustava byla řešena v [2], str. 45 metodou postupných přibližování a můžeme tedy porovnávat výsledky obou metod.

Soustavu rozdělme na dvě souměrné části, takže uprostřed vznikne volný styčník s . Geometrické hodnoty prutu gs jsou uvedeny v tab. I pro pět průřezů. Na obr. 4b, c, d jsou znázorněny čáry statického přetvoření a uvedeny příslušné koncové síly a momenty. Souřadnice průhybových čar jsou uvedeny také v tab. II, kde jsou též vyčísleny sumy

$$\sum \mu(x) v_i(x) v_k(x) \Delta x,$$

jimiž nahrazujeme příslušný integrál z (10). Při harmonicky proměnných koncových deformacích mají tedy amplitudy koncových sil a momentů přibližně tyto hodnoty v t a m

$$(11) \quad M_{gs(\zeta_g = 1)} = 55,3 \cdot 10^3 - 2,029\omega^2,$$

$$(12) \quad M_{gs(\zeta_s = 1)} = 17,2 \cdot 10^3 + 0,508\omega^2,$$

$$(13) \quad M_{sg(\zeta_s = 1)} = 17,9 \cdot 10^3 - 0,256\omega^2,$$

$$(14) \quad M_{gs(v_s = 1)} = -9,68 \cdot 10^3 - 0,389\omega^2 = Y_{sg(\zeta_g = 1)},$$

$$(15) \quad Y_{sg(v_s = 1)} = 1,916 \cdot 10^3 - 0,294\omega^2.$$

Při prvním souměrném tvaru vlastního kmitání musí být

$$Y_{sg(v_s = 1)} = 0,$$

takže podle (15) je

$$\omega^2 = \frac{1,916 \cdot 10^3}{0,294} = 6520s^{-2}$$

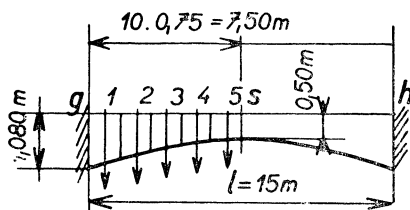
a vlastní frekvence

$$n = 12,85s^{-1}.$$

V [2], str. 47 vyšlo $n = n_{(5)} = 12,43s^{-1}$, takže chyba je asi 3%. V našem případě byla střední hodnota λ

$$\lambda = l_4 \sqrt{\frac{\mu\omega^2}{EJ}} = 7,5 \sqrt{\frac{0,247 \cdot 6520}{2,4 \cdot 10^6 \cdot 0,0223}} = 3,1$$

značně vyšší než 2,3.



Obr. 3. Neprizmatický prut.

Je patrné, že v tomto jednoduchém případě se naše metoda ztotožňuje s Rayleighovou metodou energetickou za předpokladu, že bychom vlastní tvar nahradili průhybem pod silou působící uprostřed rozpětí. V složitějších případech, jak ukážeme v následujícím příkladě, tomu tak není.

Tabulka I.

Průřez	x	$\Delta s/J$
1	0,75	19,6
2	2,25	37,3
3	3,75	67,3
4	5,25	107,3
5	6,75	139,5

Číselný příklad 2. Uvažujme spojitý nosník o pěti polích podle obr. 5. Prut proměnného průřezu z předchozího příkladu se tu pětkrát opakuje. V obou krajních podporách 0 a 5 je soustava dokonale vetknuta.

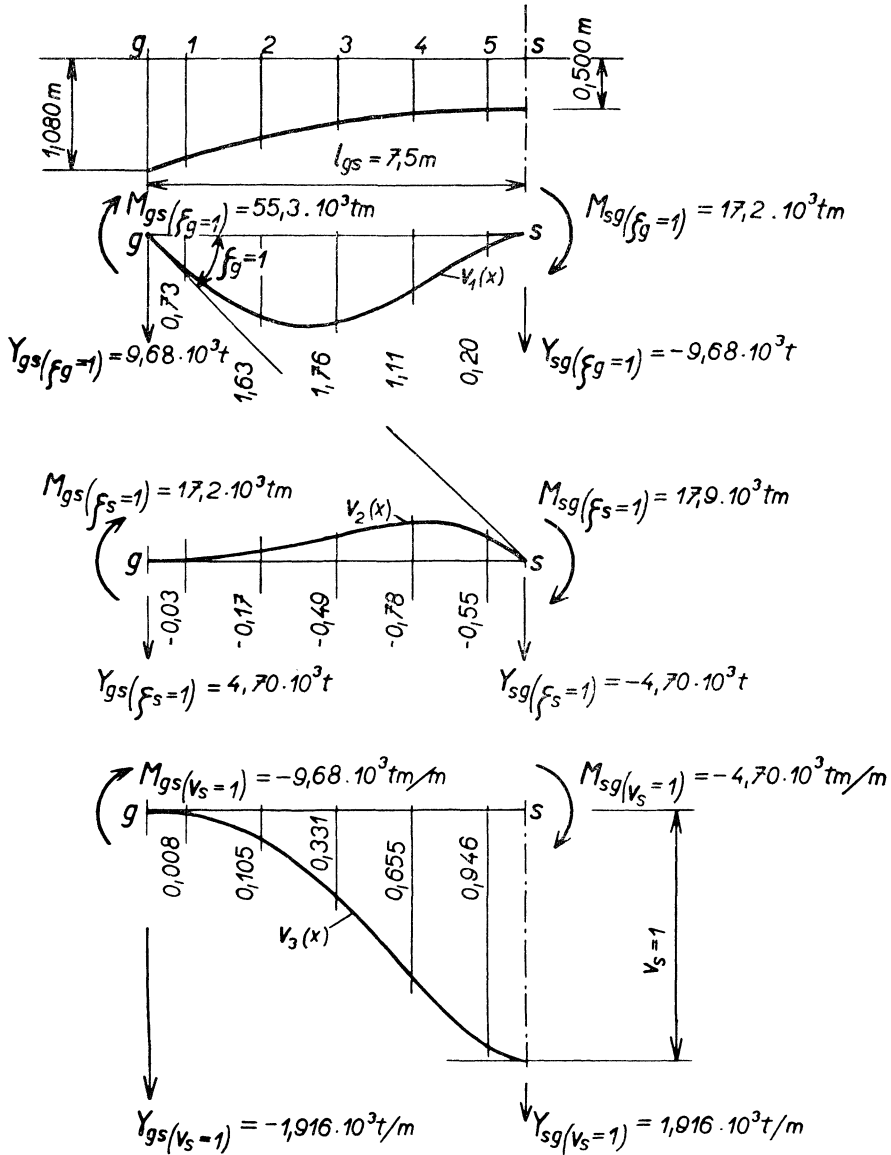
Tabulka II.

Průřez	$\mu(x)$	$v_1(x)$	$v_2(x)$	$v_3(x)$	$\mu(x)v_1^2(x)$	$\mu(x)v_2^2(x)$	$\mu(x)v_3^2(x)$	$\mu(x)v_1(x)v_3(x)$	$\mu(x)v_2^2(x)$
1	0,373	0,73	-0,03	0,008	0,196	0	0	0,002	0
2	0,301	1,63	-0,17	0,105	0,798	0,009	0,003	0,052	0,009
3	0,247	1,76	-0,49	0,331	0,767	0,059	0,027	0,144	0,059
4	0,212	1,11	-0,78	0,655	0,261	0,129	0,091	0,154	0,129
5	0,194	0,20	-0,55	0,946	0,007	0,059	0,173	0,037	0,059
					$\Sigma = 2,029$	$\Sigma = 0,256$	$\Sigma = 0,294$	$\Sigma = 0,389$	$\Sigma = 0,256$

Vzhledem k cyklické symetrii platí zde frekvenční rovnice odvozená v [2] na str. 21 a 27 ve tvaru

$$(16) \quad a + 2b \cos \frac{\pi j}{n} = 0.$$

Přitom značí a dvojnásobnou amplitudu momentu M_{gh} při pohybu podle obr. 6 a b příslušný moment M_{hg} , n značí počet polí (v našem případě $n = 5$) a $j = 1, \dots, 4$.

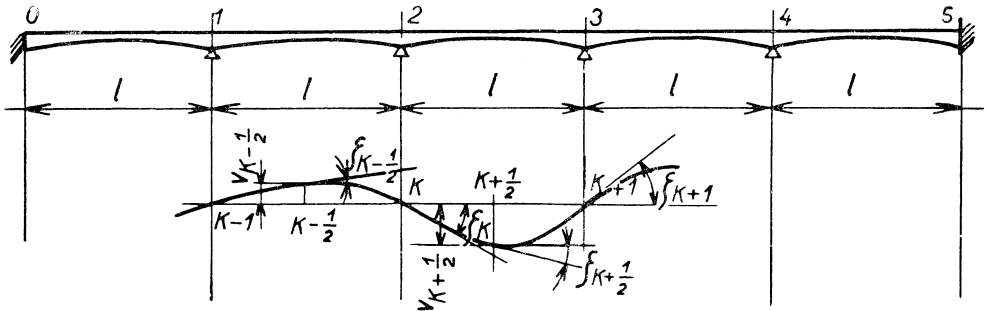


Obr. 4. Průhybové čáry neprizmatického prutu.

Veličiny a a b snadno vypočteme z koncových momentů a sil prutu gs podle (11) až (15). Při přetvoření podle obr. 6 platí uprostřed pole s dvě deformační rovnice

$$(17) \quad 2M_{sg(\zeta_s=1)} \zeta_s + M_{sg(\zeta_g=1)} = 0,$$

$$(18) \quad 2Y_{sg(v_s=1)} v_s + Y_{sg(\zeta_g=1)} = 0,$$



Obr. 5. Spojitý nosník s proměnným průřezem.

a tedy

$$(19) \quad \zeta_s = - \frac{M_{sg(\zeta_g=1)}}{2M_{sg(\zeta_s=1)}},$$

$$(20) \quad v_s = - \frac{Y_{sg(\zeta_g=1)}}{2Y_{sg(v_s=1)}}.$$

Dále je

$$(21) \quad \frac{1}{2}a = M_{gh} = M_{gs(\zeta_g=1)} + M_{gs(\zeta_s=1)} \zeta_s + M_{gs(v_s=1)} v_s$$

a

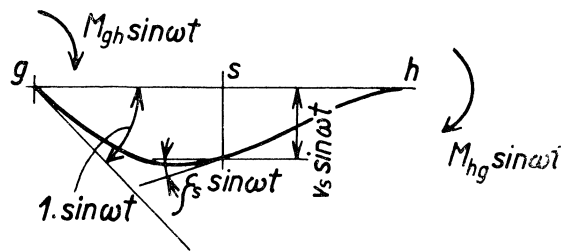
$$(22) \quad b = M_{hg} = M_{gs(\zeta_s=1)} \zeta_s - M_{gs(v_s=1)} v_s.$$

Dosadíme-li do (16) výrazy (21), (22) a (11) až (15), dostaneme frekvenční rovnice ve tvaru

$$(23) \quad 2(55,3 \cdot 10^3 - 2,029\omega^2) - \frac{(17,2 \cdot 10^3 + 0,508\omega^2)^2}{17,9 \cdot 10^3 - 0,256\omega^2} \left(1 + \cos \frac{\pi}{5} j\right) - \frac{(9,68 \cdot 10^3 + 0,389\omega^2)^2}{1,916 \cdot 10^3 - 0,294\omega^2} \left(1 - \cos \frac{\pi}{5} j\right) = 0.$$

Nejnižší vlastní frekvence je při $j = 4$, kdy $\cos \frac{1}{5}j\pi = -0,809$. Rovnici (23) pak vyhovuje hodnota $\omega^2 = \omega_{(1)}^2 = 690s^{-2}$. Získáme ji zkusmo. Po dosazení do (23) vychází

$$107,8 - 17,2(1 - 0,809) - 57,8(1 + 0,809) \cong 0.$$



Obr. 6. Deformace v jednom poli spojitého nosníku.

Hodnota $n_{(1)} = \omega_{(1)}/2\pi = 4,18s^{-1}$ se zcela shoduje s hodnotou získanou v [2] str. 46 metodou postupných přibližování.

Dále vychází

$$\text{pro } j = 3 : \cos \frac{1}{5}j\pi = -0,309, \quad \omega_{(2)}^2 = 1450s^{-2}, \quad n_{(2)} = 6,07s^{-1};$$

$$\text{pro } j = 2 : \cos \frac{1}{5}j\pi = 0,309, \quad \omega_{(3)}^2 = 2785s^{-2}, \quad n_{(3)} = 8,41s^{-1};$$

$$\text{pro } j = 1 : \cos \frac{1}{5}j\pi = 0,809, \quad \omega_{(4)}^2 = 4790s^{-2}, \quad n_{(4)} = 11,0s^{-1}.$$

V [2] na str. 47 vyšlo $n_{(4)} = 10,73$, takže chyba u této (čtvrté) vlastní frekvence je asi 2,5%. Druhá a třetí frekvence nebyly v [2] počítány. Dá se očekávat, že chyba naší přibližné metody bude u nich asi 1%.

Řešení se dá provést též v maticovém tvaru

$$|\mathbf{A} + \omega^2\mathbf{E}| = 0.$$

Rovnici (23) lze totiž napsat ve tvaru

(24)

$$\begin{vmatrix} 17,9 \cdot 10^3 - 0,256\omega^2; & (-17,2 \cdot 10^3 - 0,508\omega^2)\cos \frac{1}{10}\pi j \\ & 1,916 \cdot 10^3 - 0,294\omega^2; (-9,68 \cdot 10^3 - 0,386\omega^2)\sin \frac{1}{10}\pi j \\ (-17,2 \cdot 10^3 - 0,508\omega^2)\cos \frac{1}{10}\pi j; & (-9,68 \cdot 10^3 - 0,386\omega^2)\sin \frac{1}{10}\pi j; 55,3 \cdot 10^3 - 2,029\omega^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Poznámka. Rovnici (24) získáme přímo, napíšeme-li deformační rovnice soustavy podle obr. 5, přičemž styčníky předpokládáme v podporách a uprostřed polí, a vyjádříme-li neznámé deformace konečnými trigonometrickými řadami (srovnej [2], str. 19–65). Platí při označení podle obr. 5

$$(25) \quad M_{gs(\zeta_s=1)}(\zeta_{K-\frac{1}{2}} + \zeta_{K+\frac{1}{2}}) + M_{gs(v_s=1)}(-v_{K-\frac{1}{2}} + v_{K+\frac{1}{2}}) + 2M_{gs(\zeta_g=1)}\zeta_K = 0,$$

$$(26) \quad 2M_{sg(\zeta_s=1)}\zeta_{K+\frac{1}{2}} + M_{sg(\zeta_g=1)}(\zeta_K + \zeta_{K+1}) = 0,$$

$$(27) \quad 2Y_{sg(v_s=1)}v_{K+\frac{1}{2}} + Y_{sg(\zeta_g=1)}(\zeta_K - \zeta_{K+1}) = 0.$$

Přetvoření rozvedme řadami

$$(28) \quad \zeta_{K-\frac{1}{2}} = \sum_j \zeta_s^{[j]} \sin \frac{\pi j(K - \frac{1}{2})}{n},$$

$$(29) \quad \zeta_{K+\frac{1}{2}} = \sum_j \zeta_s^{[j]} \sin \frac{\pi j(K + \frac{1}{2})}{n},$$

kde $\zeta_s^{(j)}$ značí součinitele konečných trigonometrických řad a n počet polí. Podobně

$$(30) \quad v_{K+\frac{1}{2}} = \sum_j v_s^{[j]} \cos \frac{\pi j(K + \frac{1}{2})}{n}$$

a

$$(31) \quad \zeta_K = - \sum_j \zeta_s^{[j]} \sin \frac{\pi jK}{n}.$$

Po dosazení do (25) až (27) a po úpravě vychází

Tabulka III.

$\zeta_s^{[j]}$	$v_s^{[j]}$	$\zeta_g^{[j]}$	
$2M_{sg(\zeta_s=1)}$		$-2M_{gs(\zeta_s=1)} \cos \frac{\pi j}{2n}$	$= 0$
	$2Y_{sg(v_s=1)}$	$2M_{gs(v_s=1)} \sin \frac{\pi j}{2n}$	$= 0$
$-2M_{gs(\zeta_s=1)} \cos \frac{\pi j}{2n}$	$2M_{gs(v_s=1)} \sin \frac{\pi j}{2n}$	$2M_{gs(\zeta_g=1)}$	$= 0$

Po dosazení číselných hodnot (11) až (15) do tabulky III vychází podmínka (24).

ZÁVĚR

Složité úloha dynamického výpočtu soustav s pruty proměnného průřezu a s pruty křivými je řešena jednoduchým a přitom dostatečně přesným způsobem. Soustava se dělí na části, na jejichž mezích předpokládáme volné styčníky. Tvar těchto částí při vyšetřování nezjednodušíme, počítáme s nimi tedy jako s neprizmatickými popř. křivými. Dynamická deformace je působena setrvačnými silami, které jsou úměrné výchylkám. Výchylky jsou počítány přibližně tak, že posunutí a pootočení volných styčniců — tj. také konců částí — je počítáno se zřením k setrvačným silám, avšak deformace částí mezi styčníky jsou vypočteny pouze z deformací těchto styčniců jako deformace statické.

POUŽITÁ OZNAČENÍ

g, h	označení konců prutu
l	rozpětí
n	počet polí
$n_{(1)}, n_{(2)}$	první, druhá, vlastní frekvence
r	vektor posunutí
s	označení mezilehlého styčnicu
s	označení průřezu křivého prutu
v	svislé posunutí
x	souřadnice
A, E	matice
E	modul pružnosti

$F(\lambda)$	frekvenční funkce
J	moment setrvačnosti
M	ohybový moment
ζ	úhel pootočení
$\lambda = l^4 \sqrt{\mu \omega^2 / EJ}$	
μ	poměrná hmota (hmota délkové jedničky prutu)
ω	kruhová frekvence

Literatura

- [1] *Koloušek V.*: Stavební dynamika spojitých nosníků a rámových soustav. Praha, Vědecko-technické nakladatelství 1950.
V textu jsou poukazy na stránky 2. vydání, které vyšlo pod názvem Dynamika stavebních konstrukcí, 2. díl, Praha, SNTL 1956.
- [2] *Koloušek V.*: „Dynamika stavebních konstrukcí“, 3. díl, Praha, SNTL 1961.
- [3] *Fířt V.*: „O vlastním kmitání oblouků a patrových ráhů v rovině a prostoru“ Aplikace matematiky roč. 8 1963, č. 1, str. 1–29.

Резюме

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С НЕПРИЗМАТИЧЕСКИМИ СТЕРЖНЯМИ

ВЛАДИМИР КОЛОУШЕК (Vladimír Koloušek)

В работе решается задача колебания систем, состоящих из стержней переменного сечения с прямолинейной или криволинейной осью. Решение таких систем до сих пор производилось различными методами. В первую очередь, это была метод последовательных аппроксимаций, позволяющий вычислять частоту собственных колебаний и соответствующие собственные формы с любой точностью. Но этот метод слишком кропотливый, так как при использовании его надо несколько раз вычислить прогиб всей системы. Другой из применяемых методов, энергетический метод, является, правда, менее кропотливым, но точность результатов зависит от правильного выбора основной формы, которую часто невозможно себе даже приблизительно представить. Поэтому этот метод дает настолько неточные результаты, что их нельзя применить. Методы Ритца и Галеркина частично устраняют этот недостаток, но опять-таки ценой большой кропотливости. Также и метод деформации является весьма трудным, потому что вычисление сил на концах колеблющихся стержней очень сложно. Метод деформации можно применить и таким способом, что данную систему разделим при помощи дополнительно прибавленных узлов на короткие части, которые можно уже считать призматическими. В таком случае получается

слишком много неизвестных деформаций и, следовательно, также очень много уравнений. В настоящей работе автор искал новый метод вычисления, который базируется на том обстоятельстве, что динамическое преобразование стержня только незначительно отличается от статического преобразования, если деформации на концах в обоих случаях одинаковы и если отношение $l^4\mu\omega^2/EJ$ остается в определенных границах, которые можно заранее установить. При этом отдельные символы означают: l – пролет, μ – относительную массу, ω – круговую частоту, E – модуль упругости и J – поверхностный момент инерции сечения стержня. Только в том случае, когда бы указанное выше отношение превзошло допустимые пределы, надо было бы сократить пролет стержня путем разделения его на две части добавлением узлов. Если же заменим динамические кривые изгиба статистическими кривыми, то вычисление сил на концах основательным образом упрощается, и можно с выгодой применить метод деформации. В работе решен численный пример. В нем вычислено 5 первых собственных частот непрерывной балки из 5 полей с переменным сечением. Результаты можно было сравнить с результатами точного вычисления методом последовательных аппроксимаций. Несмотря на то, что в вычислении фигурировали только две неизвестных деформации, ошибка была в пределах от 0% (для первой собственной частоты) до приблизительно 3% (для пятой собственной частоты).

Zusammenfassung

SCHWINGUNGEN VON SYSTEMEN MIT NICHTPRISMATISCHEN STÄBEN

VLADIMÍR KOLOUŠEK

In der Abhandlung ist die Schwingung der Rahmensysteme gelöst, welche aus Stäben mit veränderlichem Querschnitt bestehen. Die Mittellinie der Stäbe kann dabei gerade oder krumm sein. Solche Stabwerke wurden bisher mittels verschiedener Verfahren behandelt. Es war in erster Reihe die Methode der schrittweisen Näherungen, welche es ermöglicht, die Eigenschwingungszahlen und Eigenformen mit beliebiger Genauigkeit zu ermitteln. Diese Methode ist jedoch ausserordentlich zeitraubend, weil es dabei notwendig ist, mehrmal hintereinander die Verformung des Systems zu berechnen. Ein anderes Verfahren, die Energiemethode, ist zwar weniger mühsam, aber die Genauigkeit der Ergebnisse ist von der passenden Wahl der Grundschwingungsform abhängig, die oft nicht noch annähernd abgeschätzt werden kann. Diese Methode führt deshalb oft zu so ungenauen Ergebnissen, dass sie nicht angewendet werden kann. Das Ritzsche und Galerkinsche Verfahren beseitigt zwar teilweise

diesen Ausstand, jedoch wieder für den Preis ziemlich grossen Arbeitsaufwandes. Die Deformationsmethode ist mühsam ebenfalls, da die Ermittlung der Stabsendkräfte der schwingenden nichtprismatischen Stäbe sehr kompliziert ist. Es ist auch möglich die Deformationsmethode so zu gebrauchen, dass die Stäbe des Systems mit zugefügten Knotenpunkten auf kurze Teile geteilt werden, welche dann als prismatisch angesehen werden können. Diese Berechnungsart führt jedoch zu einer grossen Anzahl von unbekanntem Verformungen und deshalb auch zu einer grossen Anzahl von Gleichungen, die gelöst werden müssen. Der Verfasser suchte deshalb in dieser Arbeit eine neue Methode, welche auf der Tatsache gegründet ist, dass die dynamische Verformung eines Stabes wenig von der statischen abweicht, wenn die Stabverformungen in beiden Fällen gleich sind und wenn das Verhältnis $l^4\mu\omega^2/EJ$ in gewissen Grenzen bleibt, die vorher bestimmt werden können. Dabei bedeutet l die Stabslänge, μ die Masse je Längeneinheit, ω die Kreisschwingungszahl, E den Elastizitätsmodul und J den Trägheitsmoment des Querschnittes. Nur dann, wenn dieses Verhältnis zugelassene Grenzen überschreitet, ist es notwendig die Stabslänge dadurch zu kürzen, dass man den Stab durch einen zugefügten Knotenpunkt in zwei Teile trennt. Wenn dann die dynamischen Verformungskurven durch die statischen ersetzt werden, vereinfacht sich die Ermittlung der Stabsendkräfte wesentlich und die Deformationsmethode kann mit Vorteil angewendet werden. In der Abhandlung wurde als Zahlenbeispiel ein Durchlaufträger mit veränderlichem Querschnitt berechnet. Es wurden 5 erste Eigenschwingungszahlen ermittelt. Die Ergebnisse konnten mit den Resultaten der genauen Berechnung mittels schrittweiser Näherungen verglichen werden. Trotzdem nur zwei unbekannte Knotenpunktdeformationen eingeführt wurden, bleibt der Fehler zwischen 0% (bei der niedrigsten Eigenfrequenz) und 3% (bei der fünften Eigenfrequenz).

Adresa autora: Prof. ing. dr. *Vladimír Koloušek*, Na Maninách 38, Praha 7.