

Aplikace matematiky

Ladislav Prášek

Rozložení teplot a zbytkových vnitřních pnutí, vznikajících při chladnutí válcového tělesa

Aplikace matematiky, Vol. 8 (1963), No. 5, 367–384

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102870>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1963

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ROZLOŽENÍ TEPLOT A ZBYTKOVÝCH VNITŘNÍCH PNUTÍ,
VZNIKAJÍCÍCH PŘI CHLADNUTÍ VÁLCOVÉHO TĚLESA

LADISLAV PRÁŠEK

(Došlo dne 11. dubna 1962.)

Úvod. Rozložení teplot v nekonečně dlouhém plném válci v ustáleném stavu. Napjatost ve válci od teplotních rozdílů při proměnných fyzikálních parametrech E a α a konstantní hodnotě $\mu \neq 0,5$ a $\mu = 0,5$. Speciální případy. Příklad. Závěr. Literatura.

1. ÚVOD

Předložená práce pojednává o matematickém zpracování problému, týkajícího se chladnutí ocelových ingotů v kokile nebo na vzduchu. Při tomto procesu, kdy povrch ingotu chladne rychleji než vnitřní částice, nastávají od nerovnoměrného chladnutí vnitřní pnutí, která mohou vésti k trhlinám v ingotu. Je proto znalost rozložení teplot a vnitřních pnutí při chladnutí ingotů podstatným přínosem hutnické praxi. Matematický popis uvedených jevů je velmi složitý, a proto je nutno sáhnouti k podstatným zjednodušením, aby řešení bylo vůbec možné. O uvedeném problému existuje obsáhlá literatura, na matematická řešení velmi chudá; veškeré závěry spočívají buď na provedených měřeních, velmi nákladných, popř. na matematicko-statistických rozborech. Jsou známy pouze výsledky měření rychlosti chladnutí ingotů, zatímco změřiti pnutí v ingotech není dosavadními prostředky možné.

Problém byl již řešen za podstatně zjednodušených předpokladů a výsledky byly uveřejněny v časopise „Hutnické listy“ [13, 14]. V těchto pracech bylo uvedeno teoretické řešení za předpokladu, že ingot je nahrazen nekonečně dlouhým válcem, popř. válcem o konečné délce, jehož povrch je ochlazován konstantní rychlostí. Ve válci je na počátku předpokládána konstantní teplota, jakož i konstantní všechny fyzikální parametry. Je určena rovněž napjatost v plném válci v plastickém stavu.

Podstatný vliv na rozložení teplot a pnutí má závislost fyzikálních parametrů na teplotě; budeme tedy předpokládat, že koeficient tepelné vodivosti λ , měrné teplo c , modul pružnosti v tahu E a koeficient tepelné roztažnosti α závisí na teplotě. Ingot nahradíme nekonečně dlouhým válcem o konstantním poloměru R a budeme jeho povrch ochlazovati konstantní rychlostí h . Teplotní pole je rotačně symetrické,

materiál je homogenní a nevznikají poruchy soudržnosti v oblasti elastických deformací. Nebudeme se zabývatí stavy, vznikajícími v ingotu po překročení meze úměrnosti, creepem a relaxací materiálu. Předpokládáme, že do určitého časového okamžiku teplotní pnutí vyrelaxují; v další fázi chladnutí tělesa vliv relaxace zanedbáme. Tímto předpokladem jsme na straně větší bezpečnosti, co se týče zbytkových vnitřních pnutí. Všechny další úvahy se budou týkati vnitřních pnutí I. druhu, zahrnující oblast celého ingotu a nikoliv pnutí II. druhu o rozsahu jednoho a několika zrn, popř. pnutí III. druhu, existujících v rozsahu několika atomových vzdáleností v místě nahromaděných vad stavby mřížky kovu. Všechny druhy těchto pnutí mohou být velmi nebezpečné a mohou působit na chování materiálu, zejména při rozvoji křehkého lomu; tak tomu vždy je, jestliže se výrobek poruší vlivem pnutí. Matematickému zpracování jsou ovšem přístupná právě pouze pnutí I. druhu, zatímco vliv ostatních je nutno zjišťovati ponejvíce experimentálně.

2. ROZLOŽENÍ TEPLOT V NEKONEČNĚ DLOUHÉM VÁLCI V USTÁLENÉM STAVU

Quazilineární parciální diferenciální rovnice pro vedení tepla v pravoúhlých souřadnicích má tvar

$$(1) \quad \lambda \left[\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right] + \frac{\partial \lambda(t)}{\partial t} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z} \right)^2 \right] + F(r, \tau) = c(t) \gamma(t) \frac{\partial t}{\partial \tau},$$

kde $x, y, z \dots$ pravoúhlý souřadnicový systém,

$t \dots$ teplota,

$\tau \dots$ čas,

$\lambda(t) \dots$ koeficient tepelné vodivosti,

$c(t) \dots$ měrné teplo,

$\gamma(t) \dots$ měrná váha.

V případě nekonečného rotačně symetrického válce a neexistence vnitřních zdrojů jest

$$F(r, \tau) = 0, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial t}{\partial \varphi} = 0.$$

Zavedením polárních souřadnic $x = r \cos \varphi$ a $y = r \sin \varphi$ lze rovnici (1) upravit

$$(2) \quad \frac{\partial \lambda}{\partial t} \left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 + \lambda \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} \right] = c \gamma \frac{\partial t}{\partial \tau}.$$

Formulace úlohy tedy jest: Je dán nekonečný plný válec o poloměru R , jehož osa spadá do osy Z a v něm v čase $\tau = 0$ existuje konstantní teplota t_0 . Budeme povrch válce ochlazovati konstantní rychlostí h . V soulase s experimentálními výsledky položíme $\gamma = \text{konst.}$ a $\lambda(t) \doteq \lambda_0 - \lambda_1 t$, kde $\lambda_1 \ll \lambda_0$. Na počátku nechť je válec ohřát na konstantní teplotu t_0 ; platí tedy počáteční podmínka $t(r, 0) = t_0$. Okrajová

podmínka vyplývající z rovnoměrného ochlazování povrchu válce jest $\partial t/\partial \tau = h$ pro $r = R$. Ve středu válce pro $r = 0$ nabývá teplota konečné hodnoty. Přibližné řešení problému budeme hledat řešením rovnice

$$(3) \quad \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \lambda \frac{dt}{dr} \right) \right] = c \gamma h,$$

kde čas τ pokládáme zatím za parametr.

Řešením rovnice (3) dostaneme

$$(4) \quad \int \lambda(t) dt = \frac{c\gamma h r^2}{4} + C_1 \lg r + C_2.$$

Dosadíme-li do vztahu (4) $\lambda_0 - \lambda_1 t$ za $\lambda(t)$, dostaneme řešením příslušné kvadratické rovnice pro t s přihlédnutím k tomu, že z konečnosti teploty pro $r = 0$ plyne

$$(5) \quad C_1 = 0,$$

$$(6) \quad t(r) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{2}{\lambda_1} \left(\frac{c\gamma h r^2}{4} + K \right) \right]}.$$

Konstantu K určíme z okrajové podmínky na povrchu válce, kde platí:

$$(7) \quad t(R) = t_0 + h\tau, \quad K = -\frac{c\gamma h R^2}{4} + \lambda_0(t_0 + h\tau) - \frac{\lambda_1}{2}(t_0 + h\tau)^2.$$

Konečné řešení rovnice (3) jest tedy

$$(8) \quad t(r, \tau) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left\{ \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 - \frac{2\lambda_0}{\lambda_1} \left[\frac{c\gamma h}{4\lambda_0} (r^2 - R^2) + (t_0 + h\tau) \right] + (t_0 + h\tau)^2 \right\}}.$$

Protože $\lambda_1 \ll \lambda_0$, lze snadno ukázat, že $\partial t/\partial \tau \doteq h$. Dále zvážíme-li numerické hodnoty konstant v rovnici (2), zjistíme, že pro $\tau = 0$ je přibližně splněna počáteční podmínka $t(r, 0) = t_0$.

V případě λ nezávislého na teplotě bude $\lambda_1 = 0$; dále označíme $a^2 = \lambda_0/c\gamma$. Položíme ve vzorci (8)

$$(9) \quad \frac{\lambda_0}{\lambda_1} = A, \quad \sqrt{\left\{ \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right)^2 - 2 \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left[\frac{c\gamma h}{4\lambda_0} (r^2 - R^2) + (t_0 + h\tau) \right] + (t_0 + h\tau)^2 \right\}} = B.$$

Použijeme-li vztahu

$$(A - B) = \frac{(A - B)(A + B)}{(A + B)},$$

dostaneme jednoduchým postupem

$$t(r, \tau) = \frac{2 \left[\frac{c\gamma h}{4\lambda_0} (r^2 - R^2) + (t_0 + h\tau) \right] - \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) (t_0 + h\tau)^2}{1 + \sqrt{\left\{ 1 - 2 \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right) \left[\frac{c\gamma h}{4\lambda_0} (r^2 - R^2) + (t_0 + h\tau) \right] + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} \right)^2 (t_0 + h\tau)^2 \right\}}}.$$

Pro $\lambda_1 = 0$ získáme tak známý vzorec

$$(10) \quad t(r, \tau) = t_0 + h\tau - \frac{h}{4a^2} (R^2 - r^2).$$

Obecně jest i měrné teplo c funkcí teploty t . Položíme

$$(11) \quad c = c_0 + c_1 t,$$

jak je obvyklé v technické praxi. Dosadíme-li vztah (11) do pravé strany rovnice (3), dostaneme obecné řešení rovnice (3) ve tvaru

$$(12) \quad t(r, \tau) = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} - \sqrt{\left\{ \left[\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1} \right) - (t_0 + h\tau) \right]^2 - \left[\frac{c_0 \gamma h}{2\lambda_1} (r^2 - R^2) - \frac{2c_1 \gamma h}{\lambda_1} \int_r^R \frac{1}{r} \left(\int_0^r r t dr \right) dr \right] \right\}}.$$

Vzhledem k tomu, že prakticky je opět $c_1 \ll c_0$, můžeme pokládat (12) za přibližné řešení diferenciální rovnice (2) s okrajovou podmínkou $[\partial t / \partial \tau]_{r=R} = h$ a s počáteční podmínkou $t(r, 0) = t_0$. Je patrné, že numerické vyhodnocování vzorce (12) je nutno provádět iteračně, neboť hledaná funkce t je pod integrálem.

3. NAPJATOST V PLNÉM VÁLCI OD TEPLOTNÍCH ROZDÍLŮ PŘI PROMĚNNÝCH FYZIKÁLNÍCH PARAMETRECH E A α A KONSTANTNÍ HODNOTĚ POISSONOVY KONSTANTY

Základní rovnice pružnosti, ovládající prostorový element, lze napsati v polárních souřadnicích (v symetrickém případě)

$$(13) \quad \varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dots \text{ vztahy pro poměrná prodloužení};$$

$$(14) \quad \psi_{\varphi z} = \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \psi_{rz} = \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \dots \text{ vztahy pro změny úhlu};$$

$$\psi_{r\varphi} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r};$$

$$(15) \quad \omega_r = -\frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \omega_\varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial r} \right); \quad \dots \text{ vztahy pro složky natočení objemového elementu};$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \right).$$

$$(16) \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r} + X_r = 0, \dots \text{ rovnice rovnováhy;}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\varphi}}{r} + X_\varphi = 0;$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + X_z = 0.$$

Učiníme další předpoklady:

- Objemové síly (odstředivá, smyková, osová) se rovnají nule.
- Teplota je rozložena souměrně k ose válce a je tam stálá.
- Poměrná prodloužení ve směru osy Z jsou stálá.
- Platí Hookeův zákon v oblasti elastických deformací.
- Modul pružnosti a koeficient tepelné roztažnosti jsou funkcemi teploty.
- Poissonova konstanta je v prvním případě $\mu \neq 0,5$ a v druhém případě $\mu = 0,5$.

Rozdělení na dva případy $\mu \neq 0,5$ a $\mu = 0,5$ v bodě f) je provedeno z toho důvodu, že v prvním případě musíme použít přibližného řešení metodou malého parametru, zatímco v druhém případě dostaneme řešení v uzavřeném tvaru. Vyřešíme nejprve tento jednodušší případ:

$$\alpha) \quad \mu = 0,5.$$

Pro válec o konstantní tloušťce platí rovnice rovnováhy a zobecněný Hookeův zákon

$$(17) \quad \frac{d\sigma_r}{dr} = -\frac{1}{r}(\sigma_r - \sigma_\varphi),$$

$$(18) \quad \varepsilon_r = \frac{du}{dr} = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma_r - \frac{1}{2}(\sigma_\varphi + \sigma_z) \right] + \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u}{r} = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma_\varphi - \frac{1}{2}(\sigma_z + \sigma_r) \right] + \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt,$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \frac{1}{E(t)} \left[\sigma_z - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) \right] + \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt,$$

kde $t(r)$ označíme teplotu oproti teplotě ve výchozím stavu bez napětí t_0 . Poměrné objemové zvětšení jest

$$(19) \quad \Delta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z = \frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \frac{dw}{dz} = 3 \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt = \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(ru) + \varepsilon_z.$$

Integrací rovnice (19) a řešením soustavy rovnic (17) a (18) dostaneme

$$(20) \quad \sigma_r = c_2 + \int_0^r \left[\frac{E(t)}{r^3} \left(\frac{4}{3} c_1 - 2 \int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right) \right] dr.$$

Okrajové podmínky: na válec nepůsobí žádné síly a tedy $\sigma_{r=R} = 0$. V ose válce se radiální a tečná napětí sobě rovnají:

$$(21) \quad \sigma_{r=0} = \sigma_\varphi = \left(r \frac{d\sigma_r}{dr} \right)_{r=0} = 0.$$

Z druhé podmínky nalezneme, že $c_1 = 0$ (za předpokladu že $E[t(0)] \neq 0$, což je vždy splněno), a protože

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{-2 \int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} E(t) dr}{r^2} = 0.$$

Z prvé podmínky nalezneme

$$c_2 = \int_0^R \frac{2E(t)}{r^3} \left[\int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right] dr.$$

Po dosazení do (20) dostáváme konečné řešení

$$(22) \quad \sigma_r = \int_r^R \frac{2E(t)}{r^3} \left[\int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right] dr.$$

Z rovnice rovnováhy (17) nalezneme σ_φ

$$(23) \quad \sigma_\varphi = \int_r^R \frac{2E(t)}{r^3} \left[\int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right] dr - \frac{2E(t)}{r^2} \int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr.$$

Ve vzorcích pro σ_r a σ_φ není obsažena konstanta ε_z . Z toho plyne, že protahování ve směru osy Z nemá vliv na napětí σ_r a σ_φ , ale pouze na σ_z . Toto σ_z určíme z třetí rovnice (18), při čemž ε_z stanovíme z podmínky, že součet normálních sil, působících na průřez válce kolmo k ose je roven nule

$$(24) \quad \int_0^R 2\pi r \sigma_z dr = 0.$$

Výsledné napětí σ_z má pak tvar

$$(25) \quad \begin{aligned} \sigma_z = & \frac{E(t)}{\int_0^R r E(t) dr} \left\langle \int_0^R \frac{E(t)}{r} \left[\int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right] dr + \int_0^R r E(t) \left[\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right] dr - \right. \\ & \left. - \int_0^R r \left\{ \int_r^R \frac{2E(t)}{r^3} \left[\int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right] dr \right\} dr \right\rangle + \int_r^R \frac{2E(t)}{r^3} \cdot \\ & \cdot \left[\int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr \right] dr - \frac{E(t)}{r^2} \int_0^r r^2 \alpha(t) \frac{dt(r)}{dr} dr - E(t) \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt. \end{aligned}$$

Vzorce (22), (23) a (25) nám určují rozložení napětí při nerovnoměrném chladnutí v plném nekonečném válci v případě $\mu = 0,5$. V obecnějším případě konečného válce předpokládáme opět, že všechna napětí a prodloužení jsou funkcemi pouze r . Tedy i protažení ve směru osy Z budeme předpokládat jako funkci r :

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = f(r), \quad \text{a integrací} \quad w = f(r)z + g(r).$$

Protože ve střední oblasti velmi dlouhého válce jsou všechny průřezy stejné a nejsou funkcemi r , musí tyto průřezy během deformací zůstat stejné, tedy $f(r) = \text{konst.} = \varepsilon_z$; $g(r) = K$. Potom $w(r, z) = \varepsilon_z \cdot z + K$; konstanty ε_z a K určíme z okrajových podmínek na podstavách válce.

$$\beta) \quad \mu \neq 0,5.$$

Vycházíme opět ze základních rovnic rovnováhy (17) a podmínek (18). Ze systému rovnic (18) vypočteme napětí $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ jako funkce $\varepsilon_r, \varepsilon_\varphi$ a ε_z , což není možné v prvním případě, kdy $\mu = 0,5$. Tyto vztahy dosadíme do rovnice rovnováhy (17) a seřadíme podle posunutí u ; po úpravách dostaneme diferenciální rovnici druhého řádu

$$(26) \quad \frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} \left[1 + r \frac{dE(t)}{E(t)} \frac{dt}{dr} \right] - \frac{u}{r^2} \left[1 - \frac{r\mu}{1-\mu} \frac{dE(t)}{E(t)} \frac{dr}{dr} \right] + \\ + \varepsilon_z \frac{dE(t)}{E(t)} \frac{\mu}{dr} \frac{1}{1-\mu} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \frac{d}{dr} \left[E(t) \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right].$$

Rovnice (26) s proměnnými koeficienty není exaktně řešitelná, a proto použijeme Poincarého metody malého parametru. Položíme

$$\frac{dE(t)}{E(t)} \frac{dt}{dr} = \frac{d}{dt} \lg E(t) \frac{dt}{dr} = \varepsilon \Phi(t),$$

kde ε je malý parametr. (Předpokládáme-li např., že $E = E_0 - E_1 \cdot t^2$, kterýžto vztah ve většině případech vyhovuje, bude

$$\frac{dE(t)}{E(t)} \frac{dt}{dr} = - \frac{2E_1}{E_0} \left(\frac{t \cdot t'}{1 - (E_1/E_0) t^2} \right) = \varepsilon \Phi(t),$$

kde

$$\varepsilon = - \frac{2E_1}{E_0}, \quad \Phi(t) = \frac{t \cdot t'}{1 - (E_1/E_0) t^2}.)$$

Funkci $u(r)$, která řeší danou diferenciální rovnici (26), rozvedeme podle mocnin ε

$$(27) \quad u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots = u_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K u_K,$$

kde u_K jsou funkcemi r . Nalezneme příslušné derivace u' a u'' , dosadíme do (26)

a seřadíme podle mocnin ε^K . Dostáváme soustavu nekonečně mnoha diferenciálních lineárních rovnic II. řádu

$$\begin{aligned}
 (28) \quad u_0'' + \frac{u_0'}{r} - \frac{u_0}{r^2} &= \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{d}{dr} \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt ; \\
 u_1'' + \frac{u_1'}{r} - \frac{u_1}{r^2} &= \Phi(t) \left[-u_0' - \frac{u_0}{r} \frac{\mu}{1 - \mu} + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt - \frac{\mu}{1 - \mu} \varepsilon_z \right] = \\
 &= \Phi(t) f_0(r) ; \\
 u_2'' + \frac{u_2'}{r} - \frac{u_2}{r^2} &= \Phi(t) \left[-u_1' - \frac{u_1}{r} \frac{\mu}{1 - \mu} \right] = \Phi(t) f_1(r) ; \\
 &\vdots \\
 u_n'' + \frac{u_n'}{r} - \frac{u_n}{r^2} &= \Phi(t) f_{n-1}(r) . \\
 &\vdots
 \end{aligned}$$

Jejich postupným řešením nalezneme funkce $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ a dosazením do (27) hledanou funkci $u(r)$. Příslušná napětí $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ lze vypočítat ze vzorců (18) a jejich konečný tvar jest

$$\begin{aligned}
 (29) \quad \sigma_r &= \frac{E(t)}{1 + \mu} \left[\frac{du}{dr} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) \right] - \frac{E(t) \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt}{1 - 2\mu} , \\
 \sigma_\varphi &= \frac{E(t)}{1 + \mu} \left[\frac{u}{r} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) \right] - \frac{E(t) \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt}{1 - 2\mu} , \\
 \sigma_z &= \frac{E(t)}{1 + \mu} \left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \left(\frac{du}{dr} + \frac{u}{r} + \varepsilon_z \right) \right] - \frac{E(t) \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt}{1 - 2\mu} .
 \end{aligned}$$

Dosadíme-li do (29) nekonečnou řadu pro $u(r) = u_0 + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K u_K$, můžeme výrazy pro napětí $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_z$ psát rovněž ve tvaru nekonečných řad

$$\begin{aligned}
 (30) \quad \sigma_r &= \sigma_{r0} + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \sigma_{rK} , \quad \text{kde} \quad \sigma_{rK} = \frac{E(t)}{1 + \mu} \left[u_K' + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \left(u_K' + \frac{u_K}{r} \right) \right] , \\
 \sigma_\varphi &= \sigma_{\varphi0} + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \sigma_{\varphi K} , \quad \text{kde} \quad \sigma_{\varphi K} = \frac{E(t)}{1 + \mu} \left[\frac{u_K}{r} + \frac{\mu}{1 - 2\mu} \left(u_K' + \frac{u_K}{r} \right) \right] , \\
 \sigma_z &= \sigma_{z0} + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \sigma_{zK} , \quad \text{kde} \quad \sigma_{zK} = \frac{E(t)}{1 + \mu} \left[\frac{\mu}{1 - 2\mu} \left(u_K' + \frac{u_K}{r} \right) \right] ,
 \end{aligned}$$

a $\sigma_{r0}, \sigma_{\varphi0}, \sigma_{z0}$ mají stejný tvar jako vztahy (29) s indexem 0. Nyní si provedeme řešení systému diferenciálních rovnic (28); prvá rovnice této soustavy odpovídá případu, kdy $E = \text{konst.}$ a $\alpha(t)$ je libovolná funkce. Řešení jest

$$(31) \quad u_0 = \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{1}{r} \int_0^r r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr + C_1 r + \frac{C_2}{r} .$$

Vztah (31) dosadíme do rovnic (29) s indexem 0. Okrajové podmínky, které jsou stejné jako v případě $\mu = 0,5$, je nutno splnit pouze pro základní řešení u_0 ; další okrajové podmínky pro funkce u_n jsou homogenní. Integrační konstanty jsou

$$(32) \quad C_1 = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{(1 - \mu)} \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr - \mu \varepsilon_z,$$

$$C_2 = 0.$$

Nulté aproximace σ_{r0} , $\sigma_{\varphi 0}$, σ_{z0} dostaneme ve tvaru

$$(33) \quad \sigma_{r0} = \frac{E(t)}{1 - \mu} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr \right],$$

$$\sigma_{\varphi 0} = \frac{E(t)}{1 - \mu} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr - \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right],$$

$$\sigma_{z0} = \frac{E(t)}{1 - \mu} \left[2\mu \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr - \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt + (1 - \mu) \varepsilon_z \right].$$

Funkce σ_{z0} obsahuje neznámou hodnotu protažení ε_z , kterou určíme z podmínky (24).

Řešení druhé rovnice soustavy (28) jest

$$(34) \quad u_1'' + \frac{u_1'}{r} - \frac{u_1}{r^2} = \Phi(t) f_0(r),$$

kde $f_0(r)$ jest funkcí u_0 a u_0' a není již funkcí ε_z . Dosadíme-li do $f_0(r)$ funkce u_0 a u_0' , dostaneme

$$f_0(r) = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{(1 - \mu)^2} \left[\frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr - \frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr \right] =$$

$$= \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{(1 - \mu)^2} \overline{f_0(r)}.$$

Řešení rovnice (34) se provádí stejně jako u první rovnice soustavy (28). Máme

$$(35) \quad u_1 = \frac{(1 + \mu)(1 - 2\mu)}{(1 - \mu)^2} \frac{1}{r} \int_0^r r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \Phi(t) \overline{f_0(r)} \right) dr + \overline{C_1} r + \frac{\overline{C_2}}{r}.$$

Takto získané řešení u_1 a u_1' dosadíme do prvních aproximací pro napětí σ_{r1} , $\sigma_{\varphi 1}$, σ_{z1} , které dostáváme v konečném tvaru

$$(36) \quad \sigma_{r1} = \frac{E(t)}{(1 - \mu)} \left\{ \frac{(1 - 2\mu)}{(1 - \mu)} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right) dr - \right. \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right) dr \right] - \int_r^R \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right\},$$

$$\sigma_{\varphi 1} = \frac{E(t)}{(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right) dr + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right) dr \right] - \int_0^R \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr + \frac{\mu}{1-\mu} \int_0^r \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right\},$$

$$\sigma_{z1} = \mu(\sigma_{r1} + \sigma_{\varphi 1}).$$

Obdobně se řeší i další rovnice soustavy (28). Diferenciální rovnice pro n -té přiblížení má tvar

$$(37) \quad u_n'' + \frac{u_n'}{r} - \frac{u_n}{r^2} = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)^2} \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)}.$$

Úplnou indukci dostaneme výrazy pro n -tou aproximaci napětí σ_{rn} , $\sigma_{\varphi n}$, σ_{zn}

(38)

$$\sigma_{rn} = \frac{E(t)}{(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)} dr \right) dr - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)} dr \right) dr \right] - \int_r^R \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)} dr \right\},$$

$$\sigma_{\varphi n} = \frac{E(t)}{(1-\mu)} \left\{ \frac{(1-2\mu)}{(1-\mu)} \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)} dr \right) dr + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{r^2} \int_0^r r \left(\int_0^r \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)} dr \right) dr \right] - \int_0^R \Phi(t) \overline{f_{n-1}(r)} dr + \right. \\ \left. + \frac{\mu}{1-\mu} \int_0^r \Phi(t) \overline{f_0(r)} dr \right\},$$

$$\sigma_{zn} = \mu(\sigma_{rn} + \sigma_{\varphi n}).$$

Ve funkci σ_{z0} je obsažena neznámá hodnota prodloužení ε_z ; tuto určíme z podmínky

$$\int_0^R 2\pi r \sigma_z dr = \int_0^R 2\pi r [\sigma_{z0} + \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \sigma_{zK}] dr = 0.$$

Protože řada $\sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \sigma_{zK}$ je stejnoměrně konvergentní, lze integrovat člen po členu a takto vzniklou řadu sečíst. Výpočtem dostaneme výraz pro ε_z

$$\varepsilon_z = \frac{\int_0^R r E(t) \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr}{(1-\mu) \int_0^R r E(t) dr} - \frac{2\mu \int_0^R r \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr}{(1-\mu) R^2} - 2\pi \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \int_0^R r \sigma_{zK} dr.$$

Konečný tvar prvé aproximace osového napětí σ_{z0} bude

$$(33) \quad \sigma_{z0} = \frac{E(t)}{(1-\mu)} \left[\frac{\int_0^R r E(t) \left(\int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right) dr}{\int_0^R r E(t) dr} - \int_{t_0}^{t(r)} \alpha(t) dt \right] - 2\pi E(t) \sum_{K=1}^{\infty} \varepsilon^K \int_0^R r \sigma_{zK} dr .$$

Získané hodnoty funkcí v (33) a v (38) dosadíme do nekonečných řad (30); tyto řady velmi rychle konvergují, vzhledem k tomu, že parametr ε je velmi malé číslo.

Obě uvedené metody poskytují řešení napjatosti v plném, nekonečně dlouhém válci při nerovnoměrném chladnutí při respektování proměnlivosti modulu pružnosti a koeficientu tepelné roztažnosti na teplotě.

4. SPECIÁLNÍ PŘÍPADY

Pro většinu ocelí používaných na výkvyky parních turbin, generátorů, kompresorů apod. lze klásti

$$E = E_0 - E_1 t^2, \quad \alpha = \alpha_0 + \alpha_1 t ;$$

tyto vztahy platí v dosti širokém rozmezí teplot. V případě $\mu = 0,5$ dostaneme napjatost ve tvaru

$$(39) \quad \begin{aligned} \sigma_r = & 2E_0\alpha_0 \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r t dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r r t dr \right] + 2E_0\alpha_1 \left[\frac{1}{2R^2} \int_0^R r t^2 dr - \frac{1}{2r^2} \int_0^r r t^2 dr \right] - \\ & - 2E_1\alpha_0 \left[\int_r^R \frac{t^3}{r} dr - 2 \int_r^R \frac{t^2}{r^3} \left(\int_0^r r t dr \right) dr \right] - \\ & - 2E_1\alpha_1 \left[\int_r^R \frac{t^4}{2r} dr - \int_r^R \frac{t^2}{r^3} \left(\int_0^r r t^2 dr \right) dr \right], \\ \sigma_\varphi = & 2E_0\alpha_0 \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R r t dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r r t dr - t \right] + 2E_0\alpha_1 \left[\frac{1}{2R^2} \int_0^R r t^2 dr + \frac{1}{2r^2} \int_0^r r t^2 dr - \frac{t^2}{2} \right] - \\ & - 2E_1\alpha_0 \left[\int_r^R \frac{t^3}{r} dr - t^3 + \frac{2t^2}{r^2} \int_r^R r t dr - 2 \int_r^R \frac{t^2}{r^3} \left(\int_0^r r t dr \right) dr \right] - \\ & - 2E_1\alpha_1 \left[\int_r^R \frac{t^4}{2r} dr - \frac{t^4}{2} - \int_r^R \frac{t^2}{r^3} \left(\int_0^r r t^2 dr \right) dr + \frac{t^2}{r^2} \int_0^r r t^2 dr \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_z = & 2E_0\alpha_0 \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R rt \, dr - t \right] + 2E_0\alpha_1 \left[\frac{1}{2R^2} \int_0^R rt^2 \, dr - \frac{t^2}{2} \right] - \\ & - 2E_1\alpha_0 \left[\int_0^R \frac{t^3}{r} \, dr - \frac{t^3}{2} - 2 \int_r^R \frac{t^2}{r^3} \left(\int_0^r rt \, dr \right) dr + \frac{t^2}{r^2} \int_0^r rt \, dr \right] - \\ & - 2E_1\alpha_1 \left[\int_r^R \frac{t^4}{2r} \, dr - \frac{t^4}{4} - \int_r^R \frac{t^2}{r^3} \left(\int_0^r rt^2 \, dr \right) dr + \frac{t^2}{2r^2} \int_0^r rt^2 \, dr \right] + \\ & + \frac{A}{\frac{R^2}{2} E_0 - E_1 \int_0^R rt^2 \, dr}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} A = & E_0^2\alpha_0 \int_0^R rt \, dr + \frac{E_0^2\alpha_1}{2} \int_0^R rt^2 \, dr - E_0E_1\alpha_0 \left(\int_0^R rt^3 \, dr + t^2 \int_0^R rt \, dr \right) - \\ & - \frac{E_0E_1\alpha_1}{2} \left(\int_0^R rt^4 \, dr + t^2 \int_0^R rt^2 \, dr \right) + E_1^2\alpha_0 t^2 \int_0^R rt^3 \, dr + \frac{E_1^2\alpha_1 t^2}{2} \int_0^R rt^4 \, dr. \end{aligned}$$

Známe-li závislost teploty na poloměru $t(r)$ analyticky, můžeme integraci a vyčíslením určit napjatost $\sigma_r(r)$, $\sigma_\varphi(r)$, $\sigma_z(r)$. Odpadnou-li ve vzorcích (39) E_1 a α_1 , což nastane v případě nezávislosti E a α na teplotě, dostaneme známé vzorce

$$(40) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= 2E\alpha \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R rt \, dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r rt \, dr \right], \\ \sigma_\varphi &= 2E\alpha \left[\frac{1}{R^2} \int_0^R rt \, dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r rt \, dr - t \right], \\ \sigma_z &= \sigma_r + \sigma_\varphi. \end{aligned}$$

Ze vztahů (39) dostaneme i vzorce pro zvláštní případy

$E = \text{konst.}$, $\alpha(t)$ je funkcí t ;

$\alpha = \text{konst.}$, $E(t)$ je funkcí t ; v tomto druhém případě *neplatí* závislost

$$\sigma_z = \sigma_r + \sigma_\varphi.$$

Vzorce (39) lze upravit zavedením bezrozměrného argumentu $\kappa = r/R$, $0 \leq \kappa \leq 1$. V případech, že závislost teploty na poloměru r je dána tabulkově, lze vyčíslení integrálů provést numerickou integrací. Protože pro ocel jest $\mu = 0,33$, používáme ve většině případech druhého způsobu řešení pro $\mu \neq 0,5$. Nulté aproximace nám dávají v případě $E = \alpha = \text{konst.}$ vzorce (40) a je-li $E = \text{konst.}$ platí vztah $\sigma_{r,0} + \sigma_{\varphi,0} = \sigma_{z,0}$. Protože $\varepsilon = -2E_1/E_0$ je řádově velmi malé, jest i vliv vyšších aproximací na konečné řešení malý a činí maximálně 5%. Z nekonečných řad (30) stačí vzít pouze prvé dva členy. V případě fázových přeměn jest průběh funkcí $\lambda(t)$ a $c(t)$

v místech teploty přeměny přetržitý; na tuto okolnost je nutno vzít zřetel při řešení rozložení teplot. Výpočet rozložíme na dvě části od t_0 do t_1 – teplota při fázové přeměně a od t_1 do t_2 .

5. PŘÍKLADY

Jako příklad provedeme výpočet rozložení teplot a vnitřních pnutí při chladnutí ocelového ingotu z teploty 800°C na teplotu 200°C při rychlosti chladnutí povrchu ingotu $\dot{h} = -50^\circ\text{C}/\text{hod}$. (Příklad byl řešen pro technologické odd. závodu Ocelárny ZVIL Plzeň). Ingot je z Ni-V oceli a jest to osmihran o váze asi 48 t, o středním průměru $R = 75$ cm a délce $L = 270$ cm. V prvé části výpočtu je zjišťován vliv proměnlivosti parametrů $\lambda(t)$ a $c(t)$ na rozložení teplot v šesti místech na poloměru r ingotu. Ingot je nahrazen nekonečně dlouhým válcem a všechna řešení se budou týkat ustáleného stavu, kdy teplota povrchu dosáhla hodnoty 200°C . V případě konstantních parametrů λ a c byly vzaty hodnoty při teplotě $t = 500^\circ\text{C}$ a v čase $\tau = 12$ hod.

Údaje pro ocel Ni-V, zjištěné experimentálně:

Poissonova konstanta: $\mu = 0,33$.

Specifická váha $\gamma = 7630$ kg/m³ – pro teplotu $t = 500^\circ\text{C}$ bereme konst.

Koeficient tepelné roztažnosti: $\alpha \cdot 10^6 = 11,8 + 0,48 \cdot 10^{-2}t$; $\alpha_{500^\circ} = 14,2 \cdot 10^{-6}$ cm/cm.

Měrné teplo: $c = 0,109 + 0,5 \cdot 10^{-4}t$; $c_{500^\circ} = 0,135$ kcal/kg $^\circ\text{C}$.

Koeficient tepelné vodivosti: $\lambda = 37,66 - 0,0158t$; $\lambda_{500^\circ} = 29,8$ kcal/m h $^\circ\text{C}$.

Modul pružnosti v tahu $E \cdot 10^{-6} = 1,95 - 0,9 \cdot 10^{-6} \cdot t^2$; $E_{500^\circ} = 1,73 \cdot 10^6$ kg/cm².

Výpočet rozložení teplot v ingotu je rozdělen do tří částí:

- I. Rozložení teplot při chladnutí ingotu v případě $\lambda = c = \text{konst}$.
- II. Rozložení teplot při chladnutí ingotu v případě proměnného $\lambda(t)$ a $c = \text{konst}$.
- III. Rozložení teplot při chladnutí ingotu v případě proměnných $\lambda(t)$ a $c(t)$.

Výsledky jsou uvedeny v tab. 1; v posledním sloupci je uveden rozdíl mezi teplotou na povrchu a ve středu ingotu.

Tabulka 1

$r(\text{cm}) \backslash t(^\circ\text{C})$	0	15	30	45	60	75	Δt
I.	442°	433°	404°	355°	287°	200°	−242°
II.	421°	412°	384°	339°	277°	200°	−221°
III.	400°	392°	366°	325°	270°	200°	−200°

V případě proměnného $\lambda(t)$ a konstantního c (II. případ) jsou v Tab. 1 uvedeny výsledky dle vzorce (8) a v případě proměnných $\lambda(t)$ a $c(t)$ dle vzorce (12); je patrné, že uvažujeme-li proměnný průběh $\lambda(t)$ a $c(t)$, pak chlazení probíhá rychleji. Rozdíl teplot mezi povrchem a středem ingotu jest ve druhém případě o 9% menší a ve třetím případě o 17% menší než v případě I.

Výpočet napjatosti v ingotu je proveden pro následující alternativy:

- I. Rozložení pnutí v ingotu v případě konstantních hodnot $E, \alpha, \lambda, c, \mu = 0,5$.
- II. Rozložení pnutí v ingotu v případě proměnných $\lambda(t), c(t), E(t), \alpha(t)$ pro $\mu = 0,5$.
- III. Rozložení pnutí v ingotu při konstantních λ, c a proměnných $E(t), \alpha(t)$.

Materiálové a teplotní parametry $E(t), \alpha(t), \lambda(t), c(t)$ se řídí vztahy uvedenými pro ocel Ni-V. Výsledky pnutí jsou v Tab. 2–4 a na obr. 1.

Tabulka 2. Případ I.

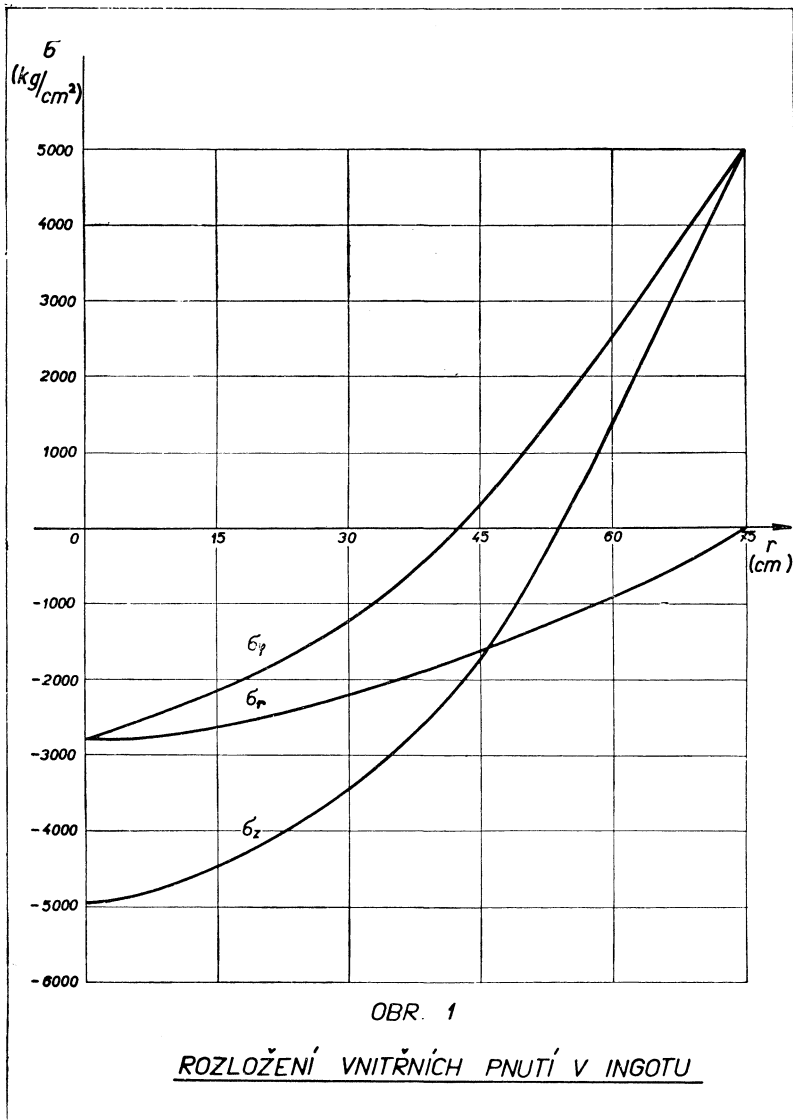
$r(\text{cm}) \backslash \sigma(\text{kg/cm}^2)$	0	15	30	45	60	75
σ_r	-2817	-2708	-2379	-1814	-1025	0
σ_φ	-2817	-2482	-1475	+ 203	+2599	+5731
σ_z	-5634	-5190	-3854	-1611	+1673	+5731

Tabulka 3. Případ II.

$r(\text{cm}) \backslash \sigma(\text{kg/cm}^2)$	0	15	30	45	60	75
σ_r	-2727	-2566	-2140	-1600	- 904	0
σ_φ	-2727	-2198	-1229	+ 304	+2566	+5019
σ_z	-4920	-4489	-3425	-1672	+1427	+5019

Tabulka 4. Případ III.

$r(\text{cm}) \backslash \sigma(\text{kg/cm}^2)$	0	15	30	45	60	75
σ_r	-3042	-2970	-2672	-2121	-1090	0
σ_φ	-3042	-2552	-1369	+ 316	+2837	+6095
σ_z	-5975	-5371	-3846	-2264	+1930	+6095



Z tabulek je patrné, že závislost materiálových a teplotních parametrů na teplotě má určitý vliv na vnitřní pnutí v ingotu. Bližší rozbor ukázal, že pouze koeficient tepelné roztažnosti α stačí bráti jako konstantní střední hodnotu. Zatímco proměnné parametry $\lambda(t)$ a $c(t)$ snižují rozdíl teplot mezi povrchem a středem ingotu, a tím i celkovou napjatost, má proměnlivost modulu pružnosti v tahu $E(t)$ určitý vliv na zvýšení napjatosti. Závislost E , α a c na teplotě způsobuje snížení tahového pnutí na povrchu a tlakového ve středu ingotu asi o 12%.

6. ZÁVĚR

Předložená práce řeší po teoretické stránce problém chladnutí a velikostí vnitřních pnutí ve velkých ingotech. Zobecněním oproti dosavadním pracím je předpoklad, že fyzikální parametry E , α , λ , c jsou uvažovány proměnné v závislosti na teplotě a tedy i na poloměru ingotu. Ze všech případů okrajových podmínek uvažujeme ten, kdy povrch ingotu je ochlazován konstantní rychlostí. Výsledkem obecných úvah jsou vzorce, udávající rozložení teplot a vnitřních pnutí v nekonečně dlouhém válci. Při výpočtu rozložení teplot, kde důležitou charakteristikou je rozdíl Δt v ose ingotu a na jeho povrchu, poklesne tento rozdíl v případě proměnných $\lambda(t)$ a $c(t)$, čímž poklesne ve stejném poměru i maximální pnutí σ_{zmax} , které závisí lineárně na Δt . Proměnlivost koeficientu lineární roztažnosti $\alpha(t)$ neovlivní výsledky a lze počítati i se střední hodnotou α . Proměnlivost modulu pružnosti způsobuje naproti tomu vzestup napjatosti. Lze říci, že v praxi stačí prováděti výpočty dle jednoduchých vzorců (40) při konstantních parametrech E , α , λ , c ; skutečné poměry budou příznivější. Všechny uvedené metody lze použiti i při výpočtech pnutí, vznikajících při ohřevu velkých výkovků.

Při rychlém ohřevu nebo chladnutí nastávají značná vnitřní pnutí, že není již správný předpoklad o platnosti Hookeova zákona; v jistých oblastech ingotu — převážně v jeho ose a na povrchu nastává plastický stav, kdy špičky napětí se podstatně snižují a nastává zpevnění materiálu.

Práce podobného charakteru prováděné ve spolupráci s hutnickými ústavy a provozů umožňují pracovníkům těchto odvětví vniknouti hlouběji do tvářecích procesů, kde problematika vzhledem k větší rozmanitosti a obtížnosti oproti strojním odborům dosud čeká na teoretické zvládnutí.

Literatura

- [1] *Астафев*: Скоростный нагрев крупных поковок при термической обработке. Вестник машиностроения 4, 1955.
- [2] *Bader*: Zur numerischen Bestimmung der Wärmespannungen. ZAMM, Nr. 9—10, 1956.
- [3] *Berger*: Über den Temperaturverlauf in einem Zylinder von endlichen Länge beim Abkühlen und Erwärmen. ZAMM, Nr. 11, 1931.
- [4] *Eyres*: The Calculation of Variable Heat Flow in Solids. Trans. Roy. Soc. 240A, August, 1946.
- [5] *Goodier*: On the Integration of the Thermo-Elastic Equations. Philosophical Magazine, Vol. 23, 1937.
- [6] *Jaeger*: On the thermal Stresses in Circular Cylinders. Philosophical Magazine, Vol. 36, 1945.
- [7] *Kent*: Thermal Stresses in Spheres and Cylinders. Trans. Am. Soc. Mech. Engrs. Vol. 54, No 18, 1932.
- [8] *Крамнев*: Нестационарная теплопроводность полых тел ограниченных крутовой цилиндрической поверхностью. Доклады АН СССР, ном. 5, 1952.
- [9] *Laurent*: Beitrag zur lückenlosen Bestimmung des Eigenspannungszustandes in metallischen Hohlzylindern. Forschung Ing.-Wesen, Bd. 25, 1959.

- [10] *Lightfoot*: Fourth Report on the Heterogeneity of Steel Ingots. Iron and Steel Institute 1932, Special Report No 2.
- [11] *Melan-Parkus*: Wärmespannungen infolge stationärer Temperaturfelder. Wien, 1953.
- [12] *Michejev*: Základy sdílení tepla. Praha, 1952.
- [13] *Prášek*: Matematické určení vnitřních pnutí v ingotech a ve výkovicích. Hutnické listy, Roč. XIV, č. 6, 1959.
- [14] *Prášek*: Výpočet rozložení teplot a vnitřních pnutí při chladnutí ingotů. Hutnické listy, Roč. XVI, č. 9, 1961.
- [15] *Sarjant*: Internal Temperature Distribution in the Cooling and Reheating of Steel Ingots. Journal of the Iron and Steel Institute, Vol. 177, 1954.
- [16] *Sykes*: Internal Stresses in Some Type of Forging. Steel-Processing, February 1954.
- [17] *Trostel*: Wärmespannungen in Hohlzylindern mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Stationäre Wärmespannungen mit temperaturabhängigen Stoffwerten. Ing. Archiv, 1958.
- [18] *Uhlitzsch*: Matematische Behandlung des zeitlichen Temperaturverlaufes für die Erwärmung und Abkühlung endlicher Vollzylinder als Grundlage für die Wärmebehandlung grosser Schmiedestücke. Neue Hütte Nr. 5, 1959.
- [19] *Ваграфмуз*: Теплофизические свойства веществ. Москва, 1957.
- [20] *Williamson*: Temperature Distribution in Solids during Heating and Cooling. Physical Review, No 2, 1919.

Резюме

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ И ОСТАТОЧНЫХ ВНУТРЕННИХ НАПРЯЖЕНИЙ, ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ОХЛАЖДЕНИИ ТЕЛА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ

ЛАДИСЛАВ ПРАШЕК (Ladislav Prášek)

В настоящей работе решается проблема охлаждения больших стальных слитков. Слиток заменен бесконечно длинным полным кругообразным цилиндром, причем предусматривается, что физические и температурные параметры являются переменными в зависимости от температуры.

В первой части теоретически выведено распределение температуры в цилиндре в установившемся состоянии при условии, что охлаждение поверхности цилиндра осуществляется при постоянной скорости.

Во второй части определяются напряженное состояние в цилиндре и остаточные внутренние напряжения в двух случаях: для коэффициента Пуассона $\mu = 0,5$ и методом малого параметра для $\mu \neq 0,5$.

Отмечены некоторые специальные случаи при упрощенных предположениях, и численно решен пример распределения температуры и внутренних напряжений слитка из стали Ni-V.

Zusammenfassung

VERTEILUNG VON TEMPERATUREN UND INNEN-RESTSPANNUNGEN, DIE BEIM ABKÜHLEN EINES ZYLINDERFÖRMIGEN KÖRPERS ENTSTEHEN

LADISLAV PRÁŠEK

In der Arbeit wird das Problem der Abkühlung von grossen Stahlblöcken erörtert. Der Stahlblock wird durch einen unendlich langen kreisförmigen Vollzylinder ersetzt, wobei vorausgesetzt wird, dass die physikalischen und Temperaturparameter temperaturabhängige Veränderlichen sind.

Im ersten Teil wird die Temperaturverteilung im Zylinder im stationären Zustand theoretisch abgeleitet, unter der Annahme, dass die Zylinderoberfläche mit gleichbleibender Geschwindigkeit abgekühlt wird.

Im zweiten Teil wird der Spannungszustand im Zylinder und die restlichen Innenspannungen in zwei Fällen, nämlich für die Poissonische Konstante $\mu = 0,5$ und durch die Methode des kleinen Parameters für $\mu \neq 0,5$ bestimmt.

Es werden einige spezielle Fälle unter den vereinfachenden Voraussetzungen abgeleitet sowie ein Beispiel der Temperatur- und Innenspannungsverteilung für einen Stahlblock aus Ni-V Stahl numerisch gelöst.

Adresa autora: Mg. Mat. *Ladislav Prášek*, Výzkumný a zkušební ústav, Závody V. I. Lenina n. p., Plzeň.