Josef Matušů

O jednom typu integrálu, u něhož se projevuje tzv. „Gibbsův zjev“

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 4, 273–293

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102904

O JEDNOM TYPU INTEGRÁLU, U NĚHOŽ SE PROJEVUJE TZV. „GIBBSŮV ZJEV“

JOSEF MATUŠŮ

(Došlo dne 13. září 1963.)

Práce se zabývá otázkou Gibbsova zjevu a jeho kvantitativního ocenění v případě integrálu, jehož speciálním případem je integrál Fourierův. Na rozdíl od dřívější stejnojmenné práce je použito analogie s Diniovým a nejobecnějším Gergenovým kritériem konvergence Fourierových řad.

1. ÚVOD

V práci [1] byl proveden důkaz existence Gibbsova zjevu u integrálu typu

$$F(t) = K \int_0^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\omega\,, \tag{1}$$

kde $g'(t)$ značí derivaci funkce $g(t)$ podle proměnné t a $K \neq 0$ je jisté konečné (reálné) číslo. Zopakujeme některá fakta z této práce.

Integrál (1) konverguje (buď jako Lebesgueův nebo jako zobecněný integrál) tehdy a jen tehdy, existuje-li konečná limita $\lim_{A \to +\infty} F_A(t)$, kde

$$F_A(t) = K \int_0^{A} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\, g'\{\omega(\tau - t)\}\, \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\omega \quad (0 < A < +\infty)\,, \tag{2}$$

načež $F(t) = \lim_{A \to +\infty} F_A(t)$.

Aby byla zaručena konvergence integrálu (2), je nutné, aby funkce f, g splňovaly jisté vlastnosti. V práci [1] jsme předpokládali o funkci f, že pro ni nastává některý ze dvou případů. Případ I: $f \in \mathbf{L}(-\infty, +\infty)$. Případ II: $f \in \mathbf{L}(-b', b')$ pro každé konečné $b' > 0$; mimoto $\lim_{t \to \pm\infty} f(t) = 0$ a existuje konečné $b > 0$ tak, že f má variaci konečnou jak v intervalu $\langle b, +\infty)$ tak i v intervalu $(-\infty, -b\rangle$. O funkci g jsme předpokládali, že pro ni nastává některý z následujících dvou případů. Případ P_{12}:

g je 1. spojitá, omezená a lichá v $\mathbf{E}_1$ a 2. derivace g' existuje v $\mathbf{E}_1$ a je tam spojitá a omezená. Případ P_{123}: g splňuje vlastnosti 1., 2., dále pak 3. existuje konečné číslo $S > 0$ tak, že $\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,dt\right| \leqq S$ v oboru $(|\alpha| < +\infty,\ \alpha \leqq \beta < +\infty)$. Z předpokladu P_{12} plyne existence konečného $C > 0$ tak, že $|g(t)/t| \leqq C$ v intervalu $\langle 0, +\infty)$, tj. $|g(t)| \leqq C|t|$ (dokonce pro všechna t). Ze vztahu $\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,dt\right| \leqq S$ (v oboru $(|\alpha| < +\infty,\ \alpha \leqq \beta < +\infty)$) plyne dále, že zobecněný integrál $\int_0^{+\infty} [g(t)/t]\,dt$ konverguje. Hodnotu tohoto integrálu jsme značili R. Nastává-li nyní pro funkci f případ I (II) a pro funkci g případ P_{12} (P_{123}), pak integrál (2) vždy konverguje (buď jako Lebesgueův nebo jako zobecněný integrál). Jeho hodnota je pokaždé

$$F_A(t) = K \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) \frac{g(A\tau)}{\tau}\,d\tau = K \int_0^{+\infty} \{f(t + \tau) + f(t - \tau)\} \frac{g(A\tau)}{\tau}\,d\tau\,.$$

Také tyto integrály jsou popřípadě zobecněné integrály.

V odst. 2 práce [1] byla dokázána důležitá

Věta. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II. *Budiž $\gamma \in \mathbf{E}_1$ a budiž g funkce omezená v $\mathbf{E}_1$. Nechť existuje konečné $S > 0$ tak, že $\left|\int_\alpha^\beta g(t)\,dt\right| \leqq S$ v oboru $(|\alpha| < +\infty,\ \alpha \leqq \beta < +\infty)$. Potom*

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\alpha^\beta f(t)\, g\{A(t - \gamma)\}\,dt = 0$$

v oboru $U(|\alpha| \leqq +\infty,\ \alpha \leqq \beta \leqq +\infty)$ (v případech $-\infty = \alpha < \beta < +\infty$, $-\infty < \alpha < \beta = +\infty$, $-\infty = \alpha < \beta = +\infty$ se jedná popřípadě o konvergentní zobecněný integrál); konvergence je stejnoměrná vzhledem k $(\alpha, \beta) \in U$ a *$\gamma \in \mathbf{E}_1$.*

V odst. 3 práce (1) byly dále dokázány tyto věty:

Věta 1. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123}. *Budiž $0 < \delta < +\infty$, označme*

$$F_A(t, \delta) = K \int_0^\delta \{f(t + \tau) + f(t - \tau)\} \frac{g(A\tau)}{\tau}\,d\tau \tag{3}$$

(totéž K jako ve výrazu (2)). Potom

$$\lim_{A \to +\infty} (F_A(t) - F_A(t, \delta)) = 0\,;$$

konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t \in \mathbf{E}_1$.

Věta 2. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123} $(R \neq 0)$. *Funkce f nechť má dále variaci konečnou v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Potom platí:*

1. *V každém bodě* $t \in (a, b)$ *je integrál* (1) *pro* $K = 1/2R$ *konvergentní a jeho hodnota je* $\{f(t+) + f(t-)\}/2$.

2. *Je-li kromě toho* f *spojitá v* $\langle a, b\rangle$, *je* $\lim_{A\to+\infty} F_A(t) = F(t) = f(t)$ *dokonce stejnoměrně v každém intervalu* $\langle a + \lambda, b - \lambda\rangle$, *kde* $0 < \lambda < (b - a)/2$.

Věta 2 je přímá analogie kritéria Dirichletova-Jordanova, které jest jedním z nejpoužívanějších kritérií konvergence Fourierových řad. Při jejím důkazu se výrazně uplatnila věta 1. Obou vět bylo pak v odst. 4 práce [1] použito při vyšetřování Gibbsova zjevu u integrálu (1).

Dříve než uvedeme hlavní výsledek práce [1], který je obsažen v závěru 2, připomeneme ještě definici vlastnosti $G(s, r, R)$, dále pak uvedeme příklad. Pro funkci g nechť nastává případ P_{123} $(R \neq 0)$. Funkce g má v bodě $t = s > 0$ vlastnost $G(s, r, R)$, jestliže platí toto: Funkce $\Phi(t) = K \int_0^t [g(\tau)/\tau]\,d\tau$ (totéž K jako ve (2)) má pro $K = 1/2R$ v bodě $t = s$ hodnotu $r \neq \frac{1}{2}$.

Příklad. Budiž $g(t) = J_1(t)$ (Besselova funkce 1. druhu a 1. řádu). Pro tuto funkci nastává zřejmě případ P_{12}. Dále je $R = \int_0^{+\infty} [J_1(t)/t]\,dt = 1$. Abychom dokázali, že pro tuto funkci nastává též případ P_{123}, je nutné dokázat, že existuje konečné číslo $S > 0$ tak, že $|\int_\alpha^\beta J_1(t)\,dt| \leqq S$ v oboru $(|\alpha| < +\infty, \alpha \leqq \beta < +\infty)$. To je snadné. Platí jak známo $J_0'(t) = -J_1(t)$ ($J_0(t)$ – Besselova funkce 1. druhu a 0. řádu). A tedy $\int_\alpha^\beta J_1(t)\,dt = -\int_\alpha^\beta J_0'(t)\,dt = J_0(\alpha) - J_0(\beta)$, tj. $|\int_\alpha^\beta J_1(t)\,dt| \leqq$ $\leqq |J_0(\alpha)| + |J_0(\beta)|$. Jelikož $|J_0(t)| \leqq 1$ pro každé $t \in \mathbf{E}_1$, plyne odtud, že $S = 2$. Pro funkci $J_1(t)$ nastává tedy případ P_{123} $(R \neq 0)$.

Zkoumejme nyní vlastnost $G(s, r, R)$. Je $\Phi(t) = (\int_0^t [J_1(\tau)/\tau]\,d\tau)/2$. Zajímáme se pouze o takové body $s > 0$ (ležící v konečnu), pro něž $\Phi(s) = r = (\int_0^s [J_1(\tau)/\tau]\,.\,d\tau)/2 \neq \frac{1}{2}$, tj. pro něž $\int_0^s [J_1(\tau)/\tau]\,d\tau \neq 1$. Položme si v této souvislosti otázku: Lze připustit vůbec všechna $s > 0$ anebo je nutné některé hodnoty vyloučit?

Jak známo je $J_0(t) = J_1(t)/t + J_1'(t)$ (hodnotou funkce $J_1(t)/t$ v bodě $t = 0$ rozumíme $\lim_{t\to 0} J_1(t)/t = \frac{1}{2}$). A tedy $\int_0^t [J_1(\tau)/\tau]\,d\tau = \int_0^t J_0(\tau)\,d\tau - J_1(t)$. Pro funkci $J_0(t)$ platí dále integrální vyjádření $J_0(t) = (2\int_0^{\pi/2} \cos(t \sin \omega)\,d\omega)/\pi$, takže

$$(4) \qquad \int_0^t \frac{J_1(\tau)}{\tau}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^t \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\tau \sin \omega)\,d\omega\right) d\tau - J_1(t)\,.$$

Užitím Fubiniovy věty dostaneme

$$\frac{2}{\pi}\int_0^t \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\tau \sin \omega)\,d\omega\right) d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t \sin \omega)}{\sin \omega}\,d\omega\,.$$

V posledním integrálu položme $t \sin \omega = u$ $(t > 0)$. Bude pak

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t \sin \omega)}{\sin \omega}\,d\omega = \frac{2t}{\pi}\int_0^t \frac{\sin u}{u}\,\frac{du}{\sqrt{t^2 + u^2}}\,.$$

Zvolme zde např. $t = 5$. Bude pak

$$(5)\quad \frac{10}{\pi}\int_0^5 \frac{\sin u}{u}\frac{du}{\sqrt{5^2+u^2}} = \frac{10}{\pi}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\frac{du}{\sqrt{5^2+u^2}} + \frac{10}{\pi}\int_\pi^5 \frac{\sin u}{u}\frac{du}{\sqrt{5^2+u^2}} \geqq$$

$$\geqq \frac{10}{\pi\sqrt{5^2+\pi^2}}\int_0^\pi \frac{\sin u}{u}\,du + \frac{10}{\pi\sqrt{5^2+\pi^2}}\int_\pi^5 \frac{\sin u}{u}\,du = \frac{10}{\pi\sqrt{5^2+\pi^2}}\int_0^5 \frac{\sin u}{u}\,du\,.$$

Je

$$\frac{10}{\pi}\frac{1}{\sqrt{5^2+\pi^2}} > \frac{3}{\sqrt{36}} = \frac{1}{2}\,, \quad \int_0^5 \frac{\sin u}{u}\,du = \mathrm{Si}(5) = 1{,}5499312\ldots > 1{,}4\,,$$

takže (viz (5))

$$\frac{10}{\pi}\int_0^5 \frac{\sin u}{u}\frac{du}{\sqrt{5^2+u^2}} > 0{,}7\,.$$

Dále je $J_1(5) = -0{,}3275791\ldots < -0{,}3$. A tedy (viz (4))

$$\int_0^5 \frac{J_1(\tau)}{\tau}\,d\tau = \frac{2}{\pi}\int_0^5 \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\tau\sin\omega)\,d\omega\right) d\tau - J_1(5) > 0{,}7 + 0{,}3 = 1\,.$$

Je nyní funkce $H(t) = \int_0^t [J_1(\tau)/\tau]\,d\tau$ spojitá v intervalu $\langle 0,5\rangle$, přičemž $H(0) = 0$ $H(5) > 1$. A tedy podle Darbouxovy věty existuje číslo $s \in \langle 0,5\rangle$ tak, že $H(s) = \int_0^s [J_1(\tau)/\tau]\,d\tau = 1$. Tím je tedy dokázáno, že nikoliv v každém bodě $t = s > 0$ má funkce $J_1(t)$ vlastnost $\mathrm{G}(s, r, R)$ (kde $R = 1$).

Závěr 2. *Budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Funkce f budiž nespojitá v bodě $t = c$, nechť $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$. Ve všech ostatních bodech jistého intervalu $\langle c - w, c + w\rangle$ $(0 < w < +\infty)$ budiž f spojitá a nechť tam má variaci konečnou. Předpokládejme dále, že pro funkci f nastává některý z případů* I, II. *Pro funkci g nechť nastává případ* P_{123} $(R \neq 0)$, *dále pak nechť g má vlastnost* $\mathrm{G}(s, r, R)$ *v bodě $t = s > 0$. Budiž $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d|\,|r - \frac{1}{2}|$. Existuje pak jisté kladné číslo A_2 – závislé na několika parametrech – tak, že „převýšení“*

$$(6)\quad \left|\frac{1}{2R}\int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)\,g'\left\{\omega\left(\tau - c \mp \frac{s}{A}\right)\right\} d\tau\right) d\omega - f\left(c \pm \frac{s}{A}\right)\right|$$

křivky f křivkou F_A v bodech $t = c \pm s/A$ je až na jistou chybu $\Delta(A)$, kde $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$, pro všechna $A \geqq A_2$ rovno 100. $|r - \frac{1}{2}|$ % *z absolutní hodnoty skoku funkce f v bodě nespojitosti $t = c$.*

Závislost čísla A_2 na parametrech je patrna z poznámky 2 v odst. 4 práce [1]. Naznačíme nyní v jakém směru je tato práce pokračováním práce [1].

Existuje jak známo celá řada různých kritérií, která udávají dostačující podmínku pro konvergenci Fourierových řad a která řeší též otázku součtů těchto řad. Všechna tato kritéria lze vhodným způsobem přeformulovat a použít jich k těmto účelům: 1. jako dostačující podmínky pro konvergenci integrálu (1); 2. k určení hodnoty integrálu (1). V odst. 3 práce [1] získali jsme právě tímto způsobem větu 2, kterou jsme pak v následujícím odstavci použili při vyšetřování Gibbsova zjevu u integrálu (1).

Pro větu 2 je specifický požadavek konečné variace funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Je ovšem možný případ funkce (viz příklad 1 v odst. 2), která v tomto intervalu nemá variaci konečnou, ale právě naopak má tam variaci nekonečnou. Bude proto naší snahou odvodit další větu, kterou budeme moci použít i na případ těchto funkcí. Učiníme tak v odst. 2, kde vyjdeme z tzv. Diniova kritéria konvergence Fourierových řad.

V poslední době platí za jedno z nejobecnějších kritérií konvergence Fourierových řad tzv. kritérium Gergenovo, které je jednou z forem zesílení známého kritéria Lebesgueova (viz (2) nebo např. (3)). Toto kritérium zahrnuje v sobě např. kritérium Diniovo a kritérium Dirichletovo-Jordanovo, rovněž však i kritérium de la Vallée-Poussinovo, zahrnující v sobě opět obě předcházející kritéria. Přílišná obecnost tohoto kritéria však způsobuje, že se jeho použitelnost v případě konkrétně dané funkce dosti těžko prověřuje. Bez ohledu na tyto těžkosti použijeme v dalším (viz odst. 3) i tohoto kritéria (ovšem za cenu jistého omezení, týkajícího se funkce g).

2. ANALOGIE KRITÉRIA DINIOVA

Platí následující

Věta. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123} $(R \neq 0)$. *Nechť* $0 < \delta < +\infty$. *Potom platí:*

1. *V každém bodě $t \in \mathbf{E}_1$, kde funkce f je konečná a kde integrál*

$$\tilde{D}(t) = \int_0^\delta \frac{|f(t + \tau) + f(t - \tau) - 2f(t)|}{\tau}\, d\tau \tag{1}$$

konverguje (jako Lebesgueův), je také integrál (1) *z odst.* 1 *pro* $K = 1/2R$ *konvergentní a jeho hodnota je rovna* $f(t)$.

2. *Je-li f konečná a spojitá v intervalu* $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ *a platí-li*

$$\lim_{\delta \to 0+} \tilde{D}(t) = 0 \tag{2}$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b\rangle$, *platí též* $\lim_{A \to +\infty} F_A(t) = F(t) = f(t)$ (*viz* (2) *v odst.* 1) *pro* $K = 1/2R$ *stejnoměrně vzhledem k* $t \in \langle a, b\rangle$.

Poznámka. Předpokládáme-li, že tzv. Diniův integrál

$$D(t) = \int_0^\delta \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2B}{\tau}\, d\tau \tag{3}$$

je pro $f(t) = B \in \mathbf{E}_1$ konvergentní Lebesgueův integrál, tedy absolutně konvergentní integrál, je podmínka (1) vždy splněna.

Důkaz věty. 1. Je (viz (3) v odst. 1)

$$F_A(t, \delta) - f(t) \frac{1}{R} \int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau}\, d\tau = \frac{1}{2R} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)}{\tau}\, g(A\tau)\, d\tau\,. \tag{4}$$

A tedy (viz podmínku (1) a větu z odst. 1)

$$\lim_{A \to +\infty} F_A(t, \delta) - f(t) \frac{1}{R} \int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau}\, d\tau = 0\,. \tag{5}$$

Užitím vztahu

$$\lim_{A \to +\infty} (F_A(t) - F_A(t, \delta)) = 0$$

(viz větu 1 z odst. 1) plyne pak z (5), že

$$\lim_{A \to +\infty} F_A(t) = F(t) = f(t) \frac{1}{R} \lim_{A \to +\infty} \int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau}\, d\tau = f(t)\,.$$

2. Jelikož podle věty 1 z odst. 1 $\lim\limits_{A \to +\infty} (F_A(t, 1) - F_A(t)) = 0$ stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$, stačí dokázat, že platí (5) (pro $\delta = 1$) stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$.

Budiž dáno číslo $\varepsilon > 0$. Podle (2) existuje číslo δ ($0 < \delta \leqq 1$) tak, že

$$\frac{1}{2R} \int_0^\delta \frac{|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)|}{\tau}\, d\tau \leqq \frac{\varepsilon}{2n}$$

pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$ (n značí supremum funkce $|g|$ v $\mathbf{E}_1$). A tedy

$$\left| \frac{1}{2R} \int_0^\delta \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)}{\tau}\, g(A\tau)\, d\tau \right| \leqq \tag{6}$$

$$\leqq \frac{n}{2R} \int_0^\delta \frac{|f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)|}{\tau}\, d\tau \leqq \frac{\varepsilon}{2}$$

pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Uvažujme integrál

$$\int_\delta^1 \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)}{\tau}\, g(A\tau)\, d\tau = \tag{7}$$

$$= \int_\delta^1 \frac{f(t+\tau)}{\tau}\, g(A\tau)\, d\tau + \int_\delta^1 \frac{f(t-\tau)}{\tau}\, g(A\tau)\, d\tau - 2f(t) \int_\delta^1 \frac{g(A\tau)}{\tau}\, d\tau\,.$$

Především je

$$\lim_{A \to +\infty} 2f(t) \int_\delta^1 \frac{g(A\tau)}{\tau} \,\mathrm{d}\tau = 0\,, \tag{8}$$

a to stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$, jelikož činitel $2f(t)$ je omezený v intervalu $\langle a, b \rangle$ (tento výsledek lze získat např. z věty v odst. 1). Dále je podle věty o střední hodnotě

$$\int_\delta^1 \frac{f(t+\tau)}{\tau} g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\delta} \int_\delta^\zeta f(t+\tau)\, g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau\,,$$

kde $\delta \leqq \zeta \leqq 1$. Substitucí $t + \tau = \omega$ plyne dále

$$\int_\delta^1 \frac{f(t+\tau)}{\tau} g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\delta} \int_{t+\delta}^{t+\zeta} f(\omega)\, g\{A(\omega - t)\} \,\mathrm{d}\omega\,.$$

A tedy podle věty z odst. 1

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\delta^1 \frac{f(t+\tau)}{\tau} g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{9}$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. Analogicky také

$$\lim_{A \to +\infty} \int_\delta^1 \frac{f(t-\tau)}{\tau} g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{10}$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. A tedy (viz (7), (8), (9), (10))

$$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{2R} \int_\delta^1 \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)}{\tau} g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau = 0 \tag{11}$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. Existuje pak číslo $A_0 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_0$ bude (viz (6), (11))

$$\left| \frac{1}{2R} \int_0^1 \frac{f(t+\tau) + f(t-\tau) - 2f(t)}{\tau} g(A\tau) \,\mathrm{d}\tau \right| \leqq \left| \frac{1}{2R} \int_0^\delta \right| + \left| \frac{1}{2R} \int_\delta^1 \right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

a to nezávisle na $t \in \langle a, b \rangle$. Odtud již vyplývá (viz (4)), že platí (5) (pro $\delta = 1$) stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. A tím je věta dokázána.

P ř í k l a d 1. Budiž $t_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 1/k \lg^2 k$, $n = 2, 3, \ldots$ Jedná se zřejmě o zbytek konvergentní řady, jejíž součet je $t_2 > 0$. Tedy $t_n \to 0$ pro $n \to +\infty$. Budiž κ spojitá v intervalu $\langle 0, t_2 \rangle$, lineární v intervalech $\langle t_{n+1}, (t_{n+1} + t_n)/2 \rangle$, $\langle (t_{n+1} + t_n)/2, t_n \rangle$ a taková, že $\kappa(0) = \kappa(t_n) = 0$, $\kappa((t_{n+1} + t_n)/2) = 1/n$, $n = 2, 3, \ldots$ Zřejmě je totální variace $V(\langle t_{n+1}, t_n \rangle; \kappa) = 2/n$. Jelikož pak řada $\sum_{n=2}^{+\infty} 1/n$ diverguje a má součet $+\infty$, plyne odtud, že $V(\langle 0, t_2 \rangle; \kappa) = +\infty$.

Uvažujme interval $I_{n1} = \langle t_{n+1}, (t_{n+1} + t_n)/2\rangle$. Nechť $t < t'$ jsou dva libovolné body z intervalu I_{n1}. Dokážeme, že $|\kappa(t) - \kappa(t')| \leqq L|t - t'|^\eta$, kde $0 < L < +\infty$, $0 < \eta < 1$. Položme především $t = t_{n+1}$. Je potom $|\kappa(t_{n+1}) - \kappa(t')| = |\kappa(t')|$, dále pak z vlastnosti podobnosti trojúhelníků vyplývá, že $|\kappa(t')|/|t_{n+1} - t'| = (1/n)/(1/2n \lg^2 n)$ (délka intervalu I_{n1} je právě $1/2n \lg^2 n$). Existuje pak číslo $k_{t'} \in (0, 1\rangle$ tak, že $|\kappa(t')| = k_{t'}(1/n)$, $|t_{n+1} - t'| = k_{t'}(1/2n \lg^2 n)$.

Snadno se přesvědčíme, že $\lim_{n\to+\infty} (1/n)/(1/2n \lg^2 n)^\eta = 0$ dokonce pro libovolné $\eta \in (0, 1)$. Existuje tudíž konečné číslo $L = L(\eta) > 0$ tak, že $1/n \leqq L(1/2n \lg^2 n)^\eta$ pro všechna $n = 2, 3, \ldots$ Bude pak $|\kappa(t')|/k_{t'} \leqq L|t_{n+1} - t'|^\eta/k_{t'}^\eta$, tj. $|\kappa(t')| \leqq L|t_{n+1} - t'|^\eta . k_{t'}^{1-\eta} \leqq L|t_{n+1} - t'|^\eta$ pro všechna $n = 2, 3, \ldots$, a to nezávisle na $t' \in I_{n1}$. Vybereme-li nyní dva libovolné body $t < t'$ z intervalu I_{n1}, platí (funkce κ je lineární v I_{n1}): $|\kappa(t) - \kappa(t')|/|t - t'| = |\kappa(t')|/|t_{n+1} - t'| \leqq L|t_{n+1} - t'|^{\eta-1}$, tj. $|\kappa(t) - \kappa(t')| \leqq L|t_{n+1} - t'|^{\eta-1} |t - t'|$. Jelikož $|t - t'| \leqq |t_{n+1} - t'|$, $|t_{n+1} - t'|^{\eta-1} \leqq |t - t'|^{\eta-1}$, bude $|\kappa(t) - \kappa(t')| \leqq L|t - t'|^\eta$ v intervalu I_{n1}. V intervalu $I_{n2} = \langle(t_{n+1} + t_n)/2, t_n\rangle$ je situace stejná.

Buďte nyní $t < t'$ dva body z intervalu $\langle 0, t_2\rangle$, nechť t' patří do některého z intervalů I_{n1}, I_{n2} pro určité $n = 2, 3, \ldots$ Předpokládejme, že $t' \in I_{n1}$ (druhý případ je analogický). Zajímáme se pouze o ten případ, kdy $t \notin I_{n1}$. Zřejmě vždy můžeme určit bod $t'' \in I_{n1}$ tak, že $\kappa(t) = \kappa(t'')$, $|t'' - t'| \leqq |t - t'|$. Bude pak $|\kappa(t) - \kappa(t')| = |\kappa(t'') - \kappa(t')| \leqq L|t'' - t'|^\eta \leqq L|t - t'|^\eta$.

Budiž $-\infty < a < 0 < b < +\infty$. Předpokládejme, že interval $\langle a, b\rangle$ je částí intervalu $(-t_2, t_2)$. Pro funkci f, která budiž např. sudá v intervalu $\langle -t_2, t_2\rangle$, nechť nastává některý z případů I, II a nechť $f(t) = \kappa(t)$ pro $t \in \langle 0, t_2\rangle$; pro funkci g nechť nastává případ P_{123} ($R \neq 0$). Podobně jako pro funkci κ platí i pro funkci f nerovnost $|f(t) - f(t')| \leqq L|t - t'|^\eta$ pro každou dvojici bodů t, t' z intervalu $\langle -t_2, t_2\rangle$. Zvolme číslo $\delta_1 > 0$, aby $-t_2 \leqq a - \delta_1 < b + \delta_1 \leqq t_2$. Je-li nyní $t \in \langle a, b\rangle$ a $\tau \in (0, \delta_1\rangle$, pak $t \pm \tau \in \langle -t_2, t_2\rangle$. A tedy platí $|f(t + \tau) + f(t - \tau) - 2f(t)| \leqq |f(t + \tau) - f(t)| + |f(t - \tau) - f(t)| \leqq 2L\tau^\eta$, načež pro $0 < \delta \leqq \delta_1$

$$\int_0^\delta \frac{|f(t + \tau) + f(t - \tau) - 2f(t)|}{\tau} \, d\tau \leqq 2L \int_0^\delta \frac{d\tau}{\tau^{1-\eta}} . \tag{12}$$

Z (12) vyplývá, že platí (2), a to stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b\rangle$. A tedy podle dokázané věty $\lim_{A\to+\infty} F_A(t) = F(t) = f(t)$ pro $K = 1/2R$, $t \in \langle a, b\rangle$, a to stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b\rangle$.

Funkce f z uvedeného příkladu je tedy případ funkce, která v intervalu $\langle a, b\rangle$ (viz tento příklad) má variaci nekonečnou a na kterou lze použít dokázané věty. Tato funkce je v jistém smyslu zajímavá. Jak bylo dokázáno, je f případ funkce, která v intervalu $\langle a, b\rangle$ splňuje Lipschitzovu podmínku řádu $\eta > 0$, kde η je libovolné číslo menší než jednička, přičemž f má současně variaci nekonečnou v tomto intervalu.

Skutečnost, že funkce f splňuje v intervalu $\langle -t_2, t_2 \rangle$ Lipschitzovu podmínku řádu $\eta < 1$ (řády $\eta = 1$ a $\eta > 1$ jsou nezajímavé; v prvním případě měla by funkce f variaci konečnou, ve druhém pak byla by to konstanta, tedy opět funkce s variací konečnou), umožnilo nám jednoduchým způsobem dokázat, že platí (2), kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$.

Budeme se nyní zabývat otázkou Gibbsova zjevu u integrálu (1) z odst. 1. Budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Předpokládejme, že pro funkci f platí $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$. Ve všech ostatních bodech jistého intervalu $\langle c - w, c + w \rangle$ $(0 < w < +\infty)$ budiž f konečná a spojitá. Funkce h nechť splňuje požadavky uvedené na začátku odst. 4 práce [1]: $0 < \vartheta < +\infty$, $h(t) = -\frac{1}{2}$ pro $c - \vartheta < t < c$, $h(t) = \frac{1}{2}$ pro $c < t < c + \vartheta$, $h(t) = 0$ ve všech ostatních bodech množiny $\mathbf{E}_1$. Číslo ϑ zvolme tak, aby $\vartheta = 2w$; pro $|\zeta| \leqq \vartheta/2$ bude pak $t = c + \zeta \in \langle c - w, c + w \rangle$ (viz citovaný začátek odst. 4 práce [1]). Předpokládejme ještě, že pro funkci f nastává některý z případů I, II, pro funkci g případ P_{123} $(R \neq 0)$.

Podobně jako v odst. 4 práce [1] nechť $f(t) - dh(t) = k(t)$ všude tam, kde levá strana této rovnice má význam. Bylo dokázáno (viz tamtéž), že existuje konečná limita $\lim_{t \to c} k(t)$. Položíme-li $k(c) = \lim_{t \to c} k(t)$, bude k funkce konečná a spojitá v celém intervalu $\langle c - w, c + w \rangle$. Pro funkci k nastává zřejmě některý z případů I, II. Budeme-li dále předpokládat, že pro funkci k platí $\lim_{\delta \to 0+} \tilde{D}^k(t) = 0$ (viz (2); znakem $\tilde{D}^k$ rozumíme, že v integrálu (1) klademe $f = k$; podobně v ostatních případech) stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$, bude na základě dokázané věty $\lim_{A \to +\infty} F^k_A(t) = k(t)$ stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$. A právě tento fakt je třeba zajistit při vyšetřování Gibbsova zjevu u integrálu (1) z odst. 1 (viz odst. 4 práce [1]).

V odst. 4 práce (1) konečná variace funkce f v intervalu $\langle c - w, c + w \rangle$ implikovala konečnou variaci funkce k v témže intervalu. Tato skutečnost umožnila aplikovat větu 2 z odst. 1 na funkci k (konkrétně její druhou část), což bylo podstatné při vyšetřování Gibbsova zjevu u integrálu (1) z odst. 1. Použitelnost druhé části citované věty na funkci k byla již tedy zaručena předpoklady, které se vztahovaly na výchozí funkci f. Naskýtá se otázka, zda totéž platí v nyní zkoumaném případě.

Pro funkci f nechť platí (2), a to stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$ (pro $t = c$ zvolíme např. $f(c) = f(c-)$; můžeme předpokládat, že $0 < \delta \leqq w$). Kdyby vztah (2) platil také pro funkci k stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$, pak by týž vztah platil stejnoměrně v tomto intervalu i pro funkci h (kde pro $t = c$ by $h(c) = h(c-)$). Nechť tomu tak jest. Položme $t = c + \zeta$, kde $|\zeta| \leqq w$. Jednoduchým výpočtem se zjistí, že pro $\zeta \geqq 0$ je

$$(13) \qquad |h(c + \zeta + \tau) + h(c + \zeta - \tau) - 2h(c + \zeta)| = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leqq \tau < \zeta, \\ 1 \text{ pro } \zeta < \tau < w. \end{cases}$$

Analogicky pro $\zeta < 0$ je

$$(14) \qquad |h(c+\zeta+\tau)+h(c+\zeta-\tau)-2h(c+\zeta)| = \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leqq \tau < -\zeta\,, \\ 1 \text{ pro } -\zeta < \tau < w\,. \end{cases}$$

A tedy pro $\zeta \geqq 0$ je

$$(15) \qquad \int_0^\delta \frac{|h(c+\zeta+\tau)+h(c+\zeta-\tau)-2h(c+\zeta)|}{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_\zeta^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} & \text{pro } 0 < \zeta < \delta\,, \\ 0 & \text{pro } \delta < \zeta < w\,. \end{cases}$$

Pro $\zeta < 0$ je

$$(16) \qquad \int_0^\delta \frac{|h(c+\zeta+\tau)+h(c+\zeta-\tau)-2h(c+\tau)|}{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \begin{cases} \displaystyle\int_{-\zeta}^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau} & \text{pro } 0 < -\zeta < \delta, \\ 0 & \text{pro } \delta < -\zeta < w. \end{cases}$$

Ze vztahů (15), (16) je patrno, že pro $\zeta \neq 0$ platí

$$(17) \qquad \lim_{\delta \to 0+} \tilde{D}^h(t) = 0$$

(viz (2)), ale nikoliv stejnoměrně vzhledem ke $\zeta \neq 0$ uvnitř intervalu $\langle -w, w \rangle$; pro $\zeta = 0$ vztah (17) neplatí, jelikož $\int_0^\delta (1/\tau)\,\mathrm{d}\tau = +\infty$ pro $\delta \to 0+$ nekonverguje. Z toho je už patrný spor.

Tím je zjištěno, že použitelnost druhé části dokázané věty na funkci k není nyní zaručena předpoklady, které by se vztahovaly pouze na výchozí funkci f, ale že naopak bude nutné, aby vztah (2) platil stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$ právě pro funkci k. Nechť tomu tak je a nechť funkce g má dále vlastnost $\mathrm{G}(s, r, R)$ v jistém bodě $t = s > 0$. Úvahami, které jsou zcela analogické příslušným úvahám z odst. 4 práce [1], dospějeme pak k závěru, že i v nyní zkoumaném případě ke každému číslu $\varepsilon > 0$, náležejícímu do vhodně zvoleného pravostranného redukovaného okolí bodu nula (viz též závěr 2 v odst. 1), existuje jisté číslo $A_2 > 0$ tak, že „převýšení“ (6) (viz závěr 2) křivky f křivkou F_A v bodech $t = c \pm s/A$ bude mít pro všechna $A \geqq A_2$ tytéž vlastnosti, jaké byly popsány v závěru 2 odst. 1. Vodítkem, kde asi takové číslo A_2 hledat (viz poznámku 2 v odst. 4 práce [1]), může být v tomto případě číslo $\mathrm{Max}\,(s/w, S|d|/4w\varepsilon|R|)$. Získané výsledky budeme nyní z důvodů větší přehlednosti formulovati následujícím způsobem (užíváme stále týchž označení):

Závěr 3. *Budiž $c \in \mathbf{E}_1$. Funkce f budiž nespojitá v bodě $t = c$, nechť $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$. Ve všech ostatních bodech jistého intervalu $\langle c - w, c + w \rangle$ $(0 < w < +\infty)$ budiž f konečná a spojitá. Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123} $(R \neq 0)$ *a nechť g má dále vlastnost* $\mathrm{G}(s, r, R)$ *v bodě $t = s > 0$. Dále nechť*

$$\lim_{\delta \to 0+} \int_0^\delta \frac{|k(t+\tau)+k(t-\tau)-2k(t)|}{\tau}\,\mathrm{d}\tau = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$. *Budiž* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d| \, |r - \frac{1}{2}|$. *Existuje pak jisté kladné číslo* A_2 – *závislé na několika parametrech (viz závěru* 3 *předcházející text) – tak, že „převýšení"*

$$\left| \frac{1}{2R} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, g' \left\{ \omega \left(\tau - c \mp \frac{s}{A} \right) \right\} \mathrm{d}\tau \right) \mathrm{d}\omega - f\left(c \pm \frac{s}{A} \right) \right|$$

křivky f křivkou F_A *v bodech* $t = c \pm s/A$ *je až na jistou chybu* $\Delta(A)$, *kde* $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$, *pro všechna* $A \geqq A_2$ *rovno* 100. $|r - \frac{1}{2}|$ % *z absolutní hodnoty skoku funkce f v bodě nespojitosti* $t = c$.

Příklad 2. Funkci f z příkladu 1 označme $\tilde{f}$. Položme tam $a = -w$, $b = w$ ($|w| < t_2$) a $\tilde{f}(t) = k(t) = f(t) - dh(t)$ v intervalu $\langle -w, w \rangle$ (funkce h, k mají dříve stanovený význam). Odtud je patrno, že lze vždy nekonečně mnoha způsoby sestrojit funkci f, která bude nespojitá v bodě $t = c = 0$ se skokem $f(c+) - f(c-) = d$ $(0 < |d| < +\infty)$, a to takovou, že bude pro ni platit závěr 3. Tato funkce bude mít variaci nekonečnou v uvažovaném intervalu.

Závěrem tohoto odstavce vrátíme se ještě k poznámce na str. 278. Pro funkci f nechť nastává některý z případů I, II, pro funkci g případ P_{123} ($R \neq 0$). V poznámce bylo řečeno, že tzv. Diniův integrál (3) uvažujeme jako konvergentní Lebesgueův integrál. Za toho předpokladu bylo dokázáno (viz první část věty), že potom integrál (1) z odst. 1 pro $K = 1/2R$ konverguje a má hodnotu $f(t)$ v každém bodě $t \in \mathbf{E}_1$, kde $B = f(t) \in \mathbf{E}_1$. Lze předpokládat, že by Diniův integrál (3) pro $B = f(t) \in \mathbf{E}_1$ nebyl Lebesgueův, ale naopak konvergentním zobecněným integrálem s „nepříjemnou" dolní integrační mezí nula. Naskýtá se pak otázka, zda i v tomto případě integrál (1) z odst. 1 v příslušném bodě $t \in \mathbf{E}_1$ pro $K = 1/2R$ vždy konverguje. V práci [4] bylo dokázáno (pro speciální případ integrálu (1) z odst. 1, kdy $K = 1/\pi$ a $g(t) = \sin t$, tedy pro tzv. Fourierův integrál; toto omezení není však podstatné), že tomu tak nemusí býti.

Je známo, že Perronův integrál obsahuje i Newtonův i konvergentní Lebesgueův integrál. Ale obsahuje i konvergentní zobecněný integrál. Prací [4] bylo tak mimo jiné prokázáno, že v případě Perronovy integrace existence Diniova integrálu (3) nemusí implikovat existenci příslušného integrálu (1) z odst. 1 (pro $K = 1/2R$).

3. ANALOGIE KRITÉRIA GERGENOVA

Budeme předpokládat, že funkce f je mimo některé další vlastnosti konečná v intervalu $\langle a, b \rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Pro stručnost položíme $x_t(\tau) = f(t + \tau) + f(t - \tau) - 2f(t) = y_t(\tau) - 2f(t)$, $t \in \langle a, b \rangle$ (půjde nám jen o „poměrně malé" hodnoty $\tau > 0$; místo $x_t(\tau)$, $y_t(\tau)$ píšeme dále $x(\tau)$, $y(\tau)$). Řekneme, že funkce f splňuje podmínku W v bodě $t \in \langle a, b \rangle$, jestliže $\lim_{\tau \to 0+} (1/\tau) \int_0^\tau x(\omega) \, \mathrm{d}\omega = 0$. Platí především následující

Lemma. *Budiž f funkce konečná v intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, splňující podmínku* W *stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b\rangle$. Pro funkci g nechť nastává případ P_{12}. Budiž $c > 0$ libovolné konečné číslo. Potom ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $A_0 > 0$ tak, že platí*

$$\left(t \in \langle a, b\rangle,\ A \geqq A_0,\ 0 \leqq \alpha \leqq \beta \leqq \frac{c}{A}\right) \Rightarrow \left|\int_\alpha^\beta x(\tau)\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq \varepsilon\,.$$

Důkaz. Položme $\alpha = 0$, $\beta = c/A$. Integrací per partes plyne

$$(1)\qquad \int_0^{c/A} x(\tau)\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau = \left[g(A\tau)\,\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right]_0^{c/A} -$$
$$- \int_0^{c/A}\left[\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left(\frac{g(A\tau)}{\tau}\right)\mathrm{d}\tau\,.$$

Je $\mathrm{d}(g(A\tau)/\tau)/\mathrm{d}\tau = (A\tau\, g'(A\tau) - g(A\tau))/\tau^2$, tedy $|\mathrm{d}(g(A\tau)/\tau)/\mathrm{d}\tau| \leqq (mA\tau + CA\tau)/\tau^2 = A(m + C)/\tau$ (m značí supremum funkce $|g'|$ v $\mathbf{E}_1$, význam konstanty C je uveden na str. 274). Bude pak absolutní hodnota druhého sčítance vpravo v rovnici (1) nejvýše rovna $A(m + C)\int_0^{c/A} |(1/\tau)\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega|\,\mathrm{d}\tau$. Dále vzhledem k podmínce W existuje ke každému číslu $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, že $(0 < \tau \leqq \delta) \Rightarrow |(1/\tau)\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega| \leqq \tilde{\varepsilon}$, kde $\tilde{\varepsilon} = \mathrm{Min}\,(\varepsilon/4c(m + C), \varepsilon/4n)$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$ (n značí jako dříve supremum funkce $|g|$ v $\mathbf{E}_1$). Pro všechna $A \geqq A_0 > 0$, kde $A_0 = c/\delta$, bude pak absolutní hodnota integrálu vpravo v rovnici (1) nejvýše $A(m + C)\int_0^{c/A} [\varepsilon/4c(m + C)]\,\mathrm{d}\tau = \varepsilon/4$. Rovněž pak absolutní hodnota prvního sčítance vpravo v rovnici (1) bude nejvýše $\varepsilon/4$ pro všechna $A \geqq A_0$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$. A tedy (viz (1))

$$(2)\qquad \left|\int_0^{c/A} x(\tau)\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \leqq \varepsilon$$

pro všechna $A \geqq A_0$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$.

Nechť nyní $0 < \alpha < \beta < c/A$, $A \geqq A_0$. Zvolíme-li čísla $A_2 > A_1 > A_0$ tak, aby $\alpha = c/A_2$, $\beta = c/A_1$, bude $\int_\alpha^\beta x(\tau)\,[g(A\tau)/\tau]\,\mathrm{d}\tau = \int_0^{c/A_1} - \int_0^{c/A_2}$. A tedy (viz (2))

$$\left|\int_\alpha^\beta x(\tau)\,\frac{g(A\tau)}{\tau}\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$. Tím je lemma dokázáno.

Předpokládejme nyní, že pro funkci f nastává některý z případů I, II, pro funkci g případ P_{123} ($R \neq 0$). V intervalu $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ budiž f např. konečná a spojitá (tím je zaručena omezenost funkce f v intervalu $\langle a, b\rangle$). Budiž

$0 < \delta < +\infty$. Pro $K = 1/2R$ je (viz (3) v odst. 1)

(3) $$F_A(t, \delta) - \frac{1}{R} f(t) \int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2R} \int_0^\delta x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau = $$
$$= \frac{1}{2R} \int_0^{T/A} x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau + \frac{1}{2R} \int_{T/A}^\delta x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau .$$

Podle dokázaného lemmatu platí

(4) $$\lim_{A \to +\infty} \int_0^{T/A} x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$ (klademe v lemmatu $c = T$). A tedy bude platit (viz (3), (4))

(5) $$\lim_{A \to +\infty} \left(F_A(t, \delta) - \frac{1}{R} f(t) \int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau \right) = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$, jestliže zaručíme, že také

(6) $$\lim_{A \to +\infty} \int_{T/A}^\delta x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau = 0$$

bude platit stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. Nechť platí (6) stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. Podle věty 1 z odst. 1 je

(7) $$\lim_{A \to +\infty} (F_A(t) - F_A(t, \delta)) = 0 ,$$

kde konvergence je stejnoměrná vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. Dále je

(8) $$\lim_{A \to +\infty} \frac{1}{R} f(t) \int_0^\delta \frac{g(A\tau)}{\tau} \mathrm{d}\tau = f(t)$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$ (na tomto místě se uplatnil předpoklad omezenosti funkce f v uvažovaném intervalu). A tedy bude pak platit (viz (5), (7), (8))

(9) $$\lim_{A \to +\infty} F_A(t) = F(t) = f(t)$$

(viz (2) v odst. 1 pro $K = 1/2R$) dokonce stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. K tomu účelu dokážeme nyní, že platí následující

Věta. *Pro funkci f nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci g případ* P_{123} $(R \neq 0)$. *Funkce f budiž dále konečná a spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$, splňující podmínku* W *stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$; funkce g*

budiž dále antiperiodická s periodou $T > 0$ *(tj.* $g(t + T) = -g(t)$ *ve všech bodech, kde obě strany rovnice mají význam). Budiž* $0 < \delta < +\infty$ *a nechť*

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int_{\varrho}^{\delta} \frac{|y(\tau + \varrho) - y(\tau)|}{\tau} \, d\tau = 0 \tag{10}$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$. *Potom* $\lim_{A \to +\infty} F_A(t) = F(t) = f(t)$ *(viz (2) v odst. 1 pro* $K = 1/2R$*) stejnoměrně vzhledem k* $t \in \langle a, b \rangle$.

Poznámka 1. Pro antiperiodickou funkci g (periody $T > 0$), pro niž nastává případ P_{12}, nastává též případ P_{123}. Je třeba dokázat existenci konečného čísla $S > 0$ tak, že $|\int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt| \leqq S$ v oboru ($|\alpha| < +\infty$, $\alpha \leqq \beta < +\infty$).

Budiž $\kappa = kT + \gamma$, kde k je číslo celé, $0 \leqq \gamma < T$. Jednoduchým výpočtem se zjistí, že $\int_0^{\kappa} g(t) \, dt = \{(1 - (-1)^k)/2\} \int_0^{T \operatorname{sgn} k} g(t) \, dt + (-1)^k \int_0^{\gamma} g(t) \, dt$. Položíme-li $S = 4 \int_0^T |g(t)| \, dt$, pak $|\int_0^{\kappa} g(t) \, dt| \leqq S/2$. A tedy ($\kappa = \alpha$ nebo β)

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) \, dt \right| \leqq \left| \int_0^{\beta} \right| + \left| \int_0^{\alpha} \right| \leqq \frac{S}{2} + \frac{S}{2} = S$$

v uvažovaném oboru.

Důkaz věty. Je $y(\tau + \varrho) - y(\tau) = x(\tau + \varrho) - x(\tau)$; funkci y ve vztahu (10) můžeme tedy nahradit funkcí x. Stačí dokázat (viz (6)), že

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{\varrho}^{\delta} x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \, d\tau = 0 \tag{11}$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$, $\varrho = T/A$. Integrál ve vztahu (11) označme znakem I. Bude pak

$$I - \int_{2\varrho}^{\delta + \varrho} x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \, d\tau = \int_{\varrho}^{2\varrho} - \int_{\delta}^{\delta + \varrho} = \sum_{i=1}^{2} 2D_i \tag{12}$$

(integrály uprostřed v rovnici (12) jsou v napsaném pořadí označeny $2D_1$, $-2D_2$). A tedy ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $A_0 > 0$ tak, že pro všechna $A \geqq A_0$ platí, že $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, 2$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b \rangle$ (k odhadu integrálu $2D_1$ se použije lemma pro $c = 2T$, odhad integrálu $-2D_2$ je triviální).

Po substituci dostaneme

$$\int_{2\varrho}^{\delta + \varrho} x(\tau) \frac{g(A\tau)}{\tau} \, d\tau = \int_{\varrho}^{\delta} \frac{x(\tau + \varrho)}{\tau + \varrho} g\left\{A\left(\tau + \frac{T}{A}\right)\right\} d\tau = \tag{13}$$

$$= \int_{\varrho}^{\delta} \frac{x(\tau + \varrho)}{\tau + \tau} g(A\tau + T) \, d\tau = - \int_{\varrho}^{\delta} \frac{x(\tau + \varrho)}{\tau + \varrho} g(A\tau) \, d\tau \, .$$

Bude pak (polovina ze součtu integrálu ve vztahu (11) a jeho vyjádření pomocí vztahů (12), (13))

$$I = \frac{1}{2}\int_\varrho^\delta \left[\frac{x(\tau)}{\tau} - \frac{x(\tau+\varrho)}{\tau+\varrho}\right] g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{2} D_i = \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\int_\varrho^\delta \frac{x(\tau) - x(\tau+\varrho)}{\tau+\varrho}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \frac{1}{2}\varrho\int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{2} D_i\,,$$

kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, 2$ a všechna $A \geqq A_0$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$. Označíme-li nyní první sčítanec na pravé straně ve vztahu (14) znakem D_3, pak odhadem s použitím vztahu (10) vyplývá, že také $\lim_{\varrho\to 0+} D_3 = 0$ stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b\rangle$. A tedy existuje číslo $A_1 \geqq A_0$ tak, že bude

$$I = \frac{1}{2}\varrho\int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)}{\tau\,(\tau+\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{3} D_i\,, \tag{15}$$

kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, 2, 3$ a všechna $A \geqq A_1$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$. Je dále

$$\frac{1}{2}\varrho\int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\varrho\left(\int_\varrho^{2\varrho} + \int_{2\varrho}^\delta\right) = \tag{16}$$

$$= 2D_4 + \frac{1}{2}\varrho\int_{2\varrho}^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

A tedy podle věty o střední hodnotě

$$2D_4 = \frac{1}{4}\int_\varrho^\zeta \frac{x(\tau)}{\tau}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau\,,$$

kde $\varrho \leqq \zeta \leqq 2\varrho$. Užitím lemmatu plyne pak, že existuje číslo $A_2 \geqq A_1$ tak, že bude (viz (15), (16))

$$I = \frac{1}{2}\varrho\int_{2\varrho}^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{3} D_i + 2D_4\,, \tag{17}$$

kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, \ldots, 4$ a všechna $A \geqq A_2$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b\rangle$. Po substituci dostaneme

$$\frac{1}{2}\varrho\int_{2\varrho}^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\varrho\int_\varrho^{\delta-\varrho} \frac{x(\tau+\varrho)}{(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)}\, g\left\{A\left(\tau+\frac{T}{A}\right)\right\}\mathrm{d}\tau = \tag{18}$$

$$= -\frac{1}{2}\varrho\int_\varrho^{\delta-\varrho} \frac{x(\tau+\varrho)}{(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = -\frac{1}{2}\varrho\left(\int_\varrho^\delta + \int_\delta^{\delta-\varrho}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\varrho\int_\varrho^\delta \frac{x(\tau+\varrho)}{(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)}\, g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + 2D_5\,.$$

A tedy existuje (po provedení triviálního odhadu integrálu $2D_5$) číslo $A_3 \geqq A_2$ tak, že bude (polovina ze součtu výrazů (15) a (17) – při současném respektování vztahu (18))

$$I = \frac{1}{4}\varrho \int_\varrho^\delta \left[\frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)} - \frac{x(\tau+\varrho)}{(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} \right] g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{5} D_i\,, \tag{19}$$

kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, \ldots, 5$ a všechna $A \geqq A_3$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b \rangle$. Dále je

$$\frac{1}{4}\varrho \int_\varrho^\delta \left[\frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)} - \frac{x(\tau+\varrho)}{(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} \right] g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau - \tag{20}$$

$$- \frac{1}{2}\varrho^2 \int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{4}\varrho \int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)-x(\tau+\varrho)}{(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = D_6\,.$$

Jelikož (s použitím věty o střední hodnotě)

$$|D_6| \leqq \frac{n}{12} \int_\varrho^\delta \frac{|x(\tau+\varrho) - x(\tau)|}{\tau+\varrho}\,\mathrm{d}\tau \tag{21}$$

(pro $\varrho \leqq \delta$; n je supremum funkce $|g|$ v $\mathbf{E}_1$), plyne na základě vztahu (10) (a vztahů (19), (20), (21)), že

$$I = \frac{1}{2}\varrho^2 \int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{6} D_i\,, \tag{22}$$

kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, \ldots, 6$ a všechna $A \geqq A_4 \geqq A_3$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b \rangle$.

Na integrál na pravé straně rovnice (22) použijeme nyní metody integrace per partes:

$$\frac{1}{2}\varrho^2 \int_\varrho^\delta \frac{x(\tau)}{\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} g(A\tau)\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\varrho^2 \left[\frac{g(A\tau)}{\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} \int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega \right]_\varrho^\delta - \tag{23}$$

$$- \frac{1}{2}\varrho^2 \int_\varrho^\delta \left[\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega \right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{g(A\tau)}{\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} \right) \mathrm{d}\tau\,.$$

Je první sčítanec vpravo v rovnici (23) roven $D_7 = \frac{1}{2}\varrho^2[g(A\delta)/\delta(\delta+\varrho)(\delta+2\varrho)]\,.$ $.\int_0^\delta x(\omega)\,\mathrm{d}\omega$ (výsledek dosazení dolní meze je roven nule, jelikož $g(A\varrho) = g(T) = 0$). Výraz v závorce výrazu D_7 je zřejmě omezenou funkcí argumentu $\varrho > 0$. A tedy existuje číslo $A_5 \geqq A_4$ tak, že bude (viz (22), (23))

$$I = -\frac{1}{2}\varrho^2 \int_\varrho^\delta \left[\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega \right] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{g(A\tau)}{\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho)} \right) \mathrm{d}\tau + \sum_{i=1}^{7} D_i\,, \tag{24}$$

kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, \ldots, 7$ a všechna $A \geqq A_5$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b \rangle$. Jednoduchým výpočtem se zjistí, že $\mathrm{d}(g(A\tau)/\tau(\tau+\varrho)(\tau+2\varrho))/\mathrm{d}\tau = f_1(\tau) + f_2(\tau)$, kde (při náležité volbě indexů)

$$|f_1(\tau)| \leqq \frac{HA}{\tau^3}\,, \quad |f_2(\tau)| \leqq \frac{H}{\tau^4}\,, \tag{25}$$

$H = \operatorname{Max}(m, 3n)$; konstanty m, n mají obvyklý význam. Bude pak (viz (24))

$$I - \sum_{i=1}^{7} D_i = -\sum_{j=1}^{2} \frac{1}{2} \varrho^2 \int_\varrho^\delta \left[\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right] f_j(\tau)\,\mathrm{d}\tau = \sum_{j=1}^{2} D_{7+j}\,. \tag{26}$$

Užitím (25) vyplývá, že

$$|D_8| \leqq \frac{1}{2} \varrho\, HT \int_\varrho^\delta \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}\,, \tag{27}$$

$$|D_9| \leqq \frac{1}{2} \varrho^2 H \int_\varrho^\delta \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^3}\,. \tag{28}$$

Dle předpokladu je splněna podmínka W stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b\rangle$. Jednoduchým výpočtem se zjistí, že

$$\sup_{A \geqq T/\delta} \left(\frac{1}{2} \varrho HT \int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}\,,\ \frac{1}{2} \varrho^2 H \int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^3}\right) \leqq \frac{H}{2} \operatorname{Max}(T, 1)\,. \tag{29}$$

A tedy existuje číslo $A_6 \geqq A_5$ tak, že

$$\left(\varrho \leqq \tau \leqq \frac{T}{A_6} \leqq \delta\right) \Rightarrow \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \leqq \frac{\varepsilon}{9H \operatorname{Max}(T, 1)} \tag{30}$$

pro všechna $A \geqq A_6$ a všechna $t \in \langle a, b\rangle$; v důsledku vztahu (30) pak platí

$$\frac{\displaystyle\int_{T/A_6}^\delta \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}}{\displaystyle\int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}} \leqq \frac{\varepsilon}{9H \operatorname{Max}(T, 1)} \tag{31}$$

pro $k = 2, 3$, a to pro všechna $A \geqq A_6$ a všechna $t \in \langle a, b\rangle$. Pro $k = 2, 3$ plyne ze vztahů (30), (31), že

$$\frac{\displaystyle\int_\varrho^\delta \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}}{\displaystyle\int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}} = \frac{\displaystyle\int_\varrho^{T/A_6} + \int_{T/A_6}^\delta}{\displaystyle\int_\varrho^\delta} = \frac{\displaystyle\int_\varrho^{T/A_6}}{\displaystyle\int_\varrho^{T/A_6} + \int_{T/A_6}^\delta} + \frac{\displaystyle\int_{T/A_6}^\delta}{\displaystyle\int_\varrho^\delta} \leqq \tag{32}$$

$$\leqq \frac{\displaystyle\int_\varrho^{T/A_6} \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}}{\displaystyle\int_\varrho^{T/A_6} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}} + \frac{\displaystyle\int_{T/A_6}^\delta \left|\frac{1}{\tau}\int_0^\tau x(\omega)\,\mathrm{d}\omega\right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}}{\displaystyle\int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^k}} \leqq \frac{2\varepsilon}{9H \operatorname{Max}(T, 1)}\,,$$

a to pro všechna $A \geqq A_6$ a všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Bude pak (viz (27), (28), (29), (32)) pro všechna $A \geqq A_6$ a všechna $t \in \langle a, b \rangle$

$$|D_8| \leqq \frac{\int_\varrho^\delta \left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(\omega)\, \mathrm{d}\omega \right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}}{\int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2}} \frac{1}{2} \varrho H T \int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} \leqq \tag{33}$$

$$\leqq \frac{2\varepsilon}{9H \operatorname{Max}(T, 1)} \frac{H}{2} \operatorname{Max}(T, 1) = \frac{\varepsilon}{9},$$

$$|D_9| \leqq \frac{\int_\varrho^\delta \left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau x(\omega)\, \mathrm{d}\omega \right| \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^3}}{\int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^3}} \frac{1}{2} \varrho^2 H \int_\varrho^\delta \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^3} \leqq \tag{34}$$

$$\leqq \frac{2}{9H \operatorname{Max}(T, 1)} \frac{H}{2} \operatorname{Max}(T, 1) = \frac{\varepsilon}{9}.$$

A tedy (viz (26), (33), (34)) $I = \sum_{i=1}^{9} D_i$, kde $|D_i| \leqq \varepsilon/9$ pro $i = 1, \ldots, 9$ a všechna $A \geqq A_6$, a to nezávisle na $t \in \langle a, b \rangle$; tedy $|I| \leqq \sum_{i=1}^{9} |D_i| \leqq 9(\varepsilon/9) = \varepsilon$ pro všechna $A \geqq A_6$ a všechna $t \in \langle a, b \rangle$. Tím je již dokázáno, že platí (11), a to stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle a, b \rangle$.

Budeme nyní opakovat úvahy ze str. 281 – 282 (pouze s tím rozdílem, že položíme $\vartheta = 3w$). Také nyní se naskýtá otázka, zda použitelnost dokázané věty na funkci k není již zaručena předpoklady, které by se vztahovaly pouze na výchozí funkci f.

Pro funkci f nechť tedy platí (10) stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$ (pro $t = c$ zvolíme např. $f(c) = f(c-)$; můžeme předpokládat, že $0 < \delta \leqq w$). Kdyby vztah (10) platil také pro funkci k stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$, pak by týž vztah platil stejnoměrně v tomto intervalu i pro funkci h (kde pro $t = c$ by $h(c) = h(c-)$). Nechť tomu tak jest. Položme $t = c + \zeta$, kde $|\zeta| \leqq w$. Jednoduchým výpočtem se zjistí, že pro $\zeta \geqq 0$ je

$$|h(c + \zeta + \tau + \varrho) + h(c + \zeta - \tau - \varrho) - h(c + \zeta + \tau) - h(c + \zeta - \tau)| =$$

$$= \begin{cases} 0 \text{ pro } 0 \leqq \tau < \zeta - \varrho, \\ 1 \text{ pro } \zeta - \varrho < \tau < \zeta, \\ 0 \text{ pro } \zeta < \tau < w. \end{cases}$$

Bude pak integrál ve vztahu (10), vytvořený pro funkci h, pro všechny „dosti malé“ hodnoty $\varrho > 0$ roven $\lg(\zeta/(\zeta - \varrho))$ (pro $\zeta > 0$; pro $\zeta = 0$ je integrál (10) stále roven nule). A tudíž pro $\zeta \geqq 0$ platí vztah (10). Týž vztah platí také pro $\zeta < 0$. Platí tudíž (10) v intervalu $-w \leqq \zeta \leqq w$, ale zřejmě nikoliv stejnoměrně, což dává spor.

Tím je zjištěno, že použitelnost dokázané věty na funkci k opět není zaručena předpoklady, které by se vztahovaly pouze na výchozí funkci f, ale že naopak bude nutné (podobně jako v odst. 2) požadovat, aby vztah (10) platil stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$ právě pro funkci k. Dále bude nutné požadovat, aby funkce k splňovala také podmínku W stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$. To proto, že tuto podmínku nesplňuje funkce h. Pro funkci h platí sice $\lim_{\tau \to 0+} (1/\tau) \int_0^\tau x(\omega) \, d\omega = 0$ (viz vztahy (13), (14) v odst. 2), ale nikoliv stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$.

Po těchto zhodnocujících úvahách můžeme nyní získané výsledky z důvodů větší přehlednosti zformulovati následujícím způsobem (užíváme stále týchž označení):

Závěr 4. *Budiž* $c \in \mathbf{E}_1$. *Funkce* f *budiž nespojitá v bodě* $t = c$, *nechť* $f(c+) - f(c-) = d$, $0 < |d| < +\infty$. *Ve všech ostatních bodech jistého intervalu* $\langle c - w, c + w \rangle$ $(0 < w < +\infty)$ *budiž* f *konečná a spojitá. Pro funkci* f *nechť nastává některý z případů* I, II, *pro funkci* g, *která je antiperiodická s periodou* $T > 0$, *případ* P_{12} $(R \neq 0$; *viz poznámku* 1); *dále nechť* g *má vlastnost* $\mathrm{G}(s, r, R)$ *v bodě* $t = s > 0$. *Budiž* $0 < \delta < +\infty$. *Pro funkci* k, *splňující podmínku* W *stejnoměrně vzhledem k* $t \in \langle c, - w, c + w \rangle$, *nechť platí*

$$\lim_{\varrho \to 0+} \int_\varrho^\delta \frac{|y(\tau + \varrho) - y(\tau)|}{\tau} \, d\tau = 0$$

stejnoměrně vzhledem k $t \in \langle c - w, c + w \rangle$. *Budiž* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 = |d| \, |r - \frac{1}{2}|$. *Existuje pak jisté kladné číslo* A_2 — *závislé na několika parametrech (viz text na str.* 282) — *tak, že „převýšení"*

$$\left| \frac{1}{2R} \int_0^A \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \, g' \left\{ \omega \left(\tau - c \mp \frac{s}{A} \right) \right\} d\tau \right) d\omega - f\left(c \pm \frac{s}{A} \right) \right|$$

křivky f *křivkou* F_A *v bodech* $t = c \pm s/A$ *je až na jistou chybu* $\Delta(A)$, *kde* $|\Delta(A)| \leqq \varepsilon$, *pro všechna* $A \geqq A_2$ *rovno* 100. $|r - \frac{1}{2}|$ % *z absolutní hodnoty skoku funkce* f *v bodě nespojitosti* $t = c$.

Literatura

[1] *J. Matušů:* O jednom typu integrálu, u něhož se projevuje tzv. „Gibbsův zjev"; Aplikace matematiky, svazek 6 (1961), číslo 4.

[2] *J. J. Gergen:* Convergence and summability criteria for Fourier series; Quaterly J. of Math. (Oxford) 1 (1930).

[3] *G. H. Hardy, W. W. Rogosinski:* Fourier series; Cambridge University Press (1956) (existuje ruský překlad).

[4] *J. Matušů:* Das Dinische Integral und die Frage der Konvergenz des Fourierschen Integrals; Publicationes Mathematicae (Debrecen), Tom X (1963).

Резюме

ОБ ОДНОМ ТИПЕ ИНТЕГРАЛА, У КОТОРОГО ПРОЯВЛЯЕТСЯ ТАК НАЗ. „ЯВЛЕНИЕ ГИББСА“

ЙОСЕФ МАТУШУ (Josef Matušů)

Статья является продолжением одноименной работы, которая была опубликована в журнале Aplikace matematiky, т. 6 (1961 г.), № 4. Предметом этой статьи является опять так наз. явление Гиббса при интеграле (1) (см. абз. 1), характер которого выл описан в теореме, приведенной в резюме предыдущей работы. Это продолжение мотивировано следующими рассуждениями.

Как известно, существует целый ряд разных критериев, дающих достаточное условие для сходимости рядов Фурье и решающих тоже вопрос сумм этих рядов. Все эти критерии можно подходящим способом переформулировать и применить их со следующими целями: 1) в качестве достаточного условия для сходимости интеграла (1); 2) для определения значения интеграла (1). В абз. 3 предыдущей работы получили мы именно при помощи этого способа теорему 2, которую мы потом, в следующем абзаце, применили при рассмотрении явления Гиббса при интеграле (1).

Для теоремы 2 является специфическим требование ограниченной вариации функции f интервале $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Возможен тоже случай функции, которая в этом интервале не имеет ограниченной вариации, но, наоборот, имеет там неограниченную вариацию. Является поэтому очевидным стремлением вывести любую другую теорему, которая была бы применима и для случая этих функций. Это было сделано в абз. 2, начальный пункт, в котором дается так наз. критерий Дини сходимости рядов Фурье.

В настоящее время считается одним из самых общих критериев сходимости рядов Фурье так наз. критерий Гергена, который является одной из форм усиления известного критерия Лебега. Этот критерий включает в себя, напр., критерий Дини и критерий Дирихле-Жордана, но также и критерий де ла Валле-Пуссена, включающий в себя опять оба предыдуших критерия. Слишком большая общность этого критерия ведет к тому, что его применимость в случае конкретно данной функции значительно трудно проверяется. Неснотря на эти трудности применился в абз. 3 тоже этот критерий, однако за счет определенного ограничения, касающегося функции g (антипериодичность).

Zusammenfassung

ÜBER EINE ART EINES INTEGRALS MIT SOG. „GIBBS'SCHER ERSCHEINUNG"

JOSEF MATUŠŮ

Dieser Aufsatz stellt eine Fortsetzung der gleichnamigen Arbeit dar, die in der Zeitschrift Aplikace matematiky, Band 6(1961), Nummer 4 veröffentlicht wurde. Den Gegenstand dieses Aufsatzes bildet wiederum die sog. Gibbs'sche Erscheinung beim Integral (1) (siehe Abschnitt 1), deren Charakter in dem in der Zusammenfassung der vorangehenden Arbeit enthaltenen Satz beschrieben wurde. Diese Fortsetzung ist dann durch folgende Überlegungen motiviert.

Es existiert bekanntlich eine ganze Reihe verschiedener Kriterien, die als hinreichende Konvergenzbedingungen für Fourier-Reihen dienen und auch die Frage der Summen dieser Reihen lösen. Alle diese Kriterien können geeignet umformuliert und zu folgenden Zwecken benützt werden: 1. als hinreichende Konvergenzbedingungen für das Integral (1); 2. zur Bestimmung des Wertes des Integrals (1). Im Abschnitt 3 der vorangehenden Arbeit erhielten wir eben auf diese Art den Satz 2, der dann im nächstfolgenden Abschnitt zur Ermittlung der Gibbs'schen Erscheinung beim Integral (1) benützt wurde.

Für den Satz 2 war die Voraussetzung der beschränkten Variation bezüglich der Funktion f im Intervall $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ von grundlegender Bedeutung. Im Gegensatz dazu können aber Funktionen angegeben werden, die in diesem Intervall von nichtbeschränkter Variation sind. Das Bestreben, einen weiteren Satz abzuleiten, den man im Falle solcher Funktionen benützen könnte, scheint deshalb durchaus gerechtfertigt zu sein. Dies wurde im Abschnitt 2 durchgeführt, wobei als Ausgangspunkt das Dinische Konvergenzkriterium für Fourier-Reihen benützt wurde.

In letzter Zeit gilt für das allgemeinste Konvergenzkriterium für Fourier-Reihen das sog. Gergensche Kriterium, das eine Verschärfung des bekannten Lebesgueschen Kriteriums darstellt. Dieses Kriterium umfasst z.B. das Dinische und das Dirichlet-Jordansche Kriterium, gleichfalls aber auch das Kriterium von de la Vallée-Poussin, welches wieder die beiden vorangehenden umfasst. Wegen der grossen Allgemeinheit dieses Kriteriums kommt es vor, dass seine Anwendungsfähigkeit im Falle konkreter Funktionen ziemlich schwierig ermittelt werden kann. Ohne Rücksicht auf diese Schwierigkeiten wurde im Abschnitt 3 auch dieses Kriterium benützt, obzwar um den Preis einer gewissen Einschränkung bezüglich der Funktion g (Anti-Periodizität).

Adresa autora: *Josef Matušů* C. Sc., ČVUT, Na bojišti 3, Praha 2.