

Aplikace matematiky

Josef Schmid

Řešení některých úloh z vedení tepla pro válcově souměrná prostředí s malými nelinearitami

Aplikace matematiky, Vol. 9 (1964), No. 5, 341–369

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/102912>

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1964

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH ÚLOH Z VEDENÍ TEPLA PRO VÁLCOVĚ SOUMĚRNÁ PROSTŘEDÍ S MALÝMI NELINEARITAMI

JOSEF SCHMID

(Došlo dne 14. září 1963.)

V práci je řešeno teplotní pole válcově souměrných prostředí se zdroji tepla libovolného rozložení při okrajových podmínkách proměnných po obvodu pro případ, kdy nelinearity, způsobené respektováním závislosti součinitele tepelné vodivosti λ , kontaktního odporu na rozhraní dvou prostředí ϱ a součinitele přestupu tepla α na teplotě jsou malé.

0. ÚVOD

Ve většině úloh z vedení tepla, které přicházejí v praxi v úvahu, lze považovat součinitel tepelné vodivosti za nezávislý na teplotě. V některých oborech se však též vyskytují úlohy, kdy je třeba tuto závislost respektovat. Jako příklad je možno uvést podrobný výpočet teplotního pole palivového článku jaderného reaktoru pro případ, kdy palivo je v keramické formě. Protože se součinitel tepelné vodivosti materiálů mění při značných teplotních rozdílech obvykle o řadu desítek procent a závislost na teplotě je ve většině případů monotonní, byla pro řešení nelineární rovnice vedení tepla pro tento typ úloh použita iterační metoda.

Při řešení okrajových úloh s třetí okrajovou podmínkou na povrchu anebo čtvrtou okrajovou podmínkou na rozhraní dvou prostředí je možno postupovat obdobnou cestou vzhledem k tomu, že korekce součinitele přestupu tepla α s ohledem na tepelný tok dosahuje nejvýše 20–30% a vliv teploty na kontaktní odpor není příliš silný.

V práci se zkoumá teplotní pole mezikruží a kruhu pro případ, kdy tepelné zdroje jsou funkcí poloměru a azimutálního úhlu, kdy okrajové podmínky jsou po obvodu proměnné a kdy je respektována slabá závislost tepelné vodivosti a součinitele přestupu tepla na teplotě. Dále je uvedeno řešení průběhu teplot pro mezikruhovou oblast, složenou z libovolného počtu mezikruží pro případ, kdy nelinearity, způsobené závislostí λ , α a ϱ na teplotě jsou malé.

Ve výpočtu zanedbáváme vedení tepla ve směru osy z .

Předložená práce je pokračováním práce [6], zabývající se vyšetřováním teplotního pole ve válcové geometrii pro λ , α a ϱ na teplotě nezávislé.

1. POUŽITÁ OZNAČENÍ

r, φ	polární souřadnice	[m], [rad]
R	poloměr rozhraní dvou prostředí	[m]
t	teplota	[°C], [°K]
λ	součinitel tepelné vodivosti	[kcal/mh°C]
α	součinitel přestupu tepla	[kcal/m ² h°C]
q	hustota tepelných zdrojů	[kcal/m ³ h]
ϱ	teplný odpor kontaktu	[m ² h°C/kcal]

2. ŘEŠENÍ ROVNICE VEDENÍ TEPLA S MALÝMI NELINEARITAMI V CYLINDRICKÉ GEOMETRII

Rovnici vedení tepla

$$(1) \quad -\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} t) = q(\mathbf{r})$$

přepíšeme pro válcovou geometrii do tvaru

$$(2) \quad -\left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \right] = q(r, \varphi).$$

Pro další úvahy bude výhodné vyjádřit závislost součinitele tepelné vodivosti λ na teplotě takto:

$$(3) \quad \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1(t),$$

kde

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= \lambda(t_0), \\ \lambda_1(t) &= \lambda(t) - \lambda(t_0) \end{aligned}$$

a kde t_0 je vhodně zvolená vztažná teplota. Dosadíme-li výraz (3) do rovnice (2) dostáváme

$$(4) \quad -\lambda_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right] = q(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right].$$

Předpokládejme, že vliv členů

$$(5) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right]$$

na řešení je malý a hledíme řešení iteračním postupem (viz též [1]). Nulté přiblížení pro funkci $t(r, \varphi)$ určíme z rovnice

$$(6) \quad -\lambda_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t^{(0)}}{\partial \varphi^2} \right] = q(r, \varphi),$$

vypočteme výraz (5) pro $t = t^{(0)}$ a prvé přiblížení řešením rovnice

$$(7) \quad -\lambda_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t^{(1)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t^{(1)}}{\partial \varphi^2} \right] = \\ = q(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_1(t^{(0)}) \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda_1(t^{(0)}) \frac{\partial t^{(0)}}{\partial \varphi} \right].$$

Postupujeme-li stejným způsobem dále, dostáváme pro m -té přiblížení rovnici

$$(8) \quad -\lambda_0 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial \varphi^2} \right] = \\ = q(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_1(t^{(m-1)}) \frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda_1(t^{(m-1)}) \frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial \varphi} \right].$$

Ukazuje se, že v našem případě bude výhodné upravit výraz (5) do tvaru

$$(9) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial r} \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[\lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right] = \\ = \lambda_1(t) \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{d\lambda_1}{dt} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2 \right]$$

a přepsat rovnice (6), (7), (8) takto:

$$(10) \quad \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial \varphi^2} = -q^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

kde

$$(11) \quad q^{(0)} = \frac{1}{\lambda_0} q(r, \varphi), \\ q^{(m)} = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ q(r, \varphi) - \lambda_1(t^{(m-1)}) q^{(m-1)} + \frac{d\lambda_1}{dt} \Big|_{t=t^{(m-1)}} \left[\left(\frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} \quad (m = 1, 2, 3, \dots).$$

Řešení rovnice (10) pro mezikruhovou oblast můžeme napsat s použitím práce [6] ve tvaru

Obdobně dostáváme pro $\partial t/\partial r$ výraz

$$(17) \quad \frac{\partial t^{(m)}(r, \varphi)}{\partial r} = \mathbf{S}({}_2\mathbf{M}\mathbf{C}^{(m)} + \mathbf{Z}'^{(m)}) = \mathbf{S}\mathbf{T}_r^{(m)},$$

kde ${}_2\mathbf{M}$ je derivací matice ${}_1\mathbf{M}$ a $\mathbf{Z}'^{(m)}$ resp. $\mathbf{T}_r^{(m)}$ derivací vektoru $\mathbf{Z}^{(m)}$ resp. $\mathbf{T}^{(m)}$.
Výraz pro $1/r \cdot \partial t/\partial \varphi$ napíšeme ve tvaru

$$(18) \quad \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(m)}(r, \varphi)}{\partial \varphi} = \mathbf{S}\mathbf{T}_\varphi^{(m)},$$

kde

$$\mathbf{T}_\varphi^{(m)} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} 0 \\ C_1^{(m)}r + D_1^{(m)}r^{-1} + sZ_1^{(m)} \\ -(A_1^{(m)}r + B_1^{(m)}r^{-1} + cZ_1^{(m)}) \\ \vdots \\ C_n^{(m)}r^n + D_n^{(m)}r^{-n} + sZ_n^{(m)} \\ -(A_n^{(m)}r^n + B_n^{(m)}r^{-n} + cZ_n^{(m)}) \end{pmatrix}.$$

Součin dvou Fourierových řad se součiniteli a_n, b_n a v_n, w_n , tj. součin

$$\mathbf{SA} \cdot \mathbf{SV},$$

kde vektory \mathbf{A} resp. \mathbf{V} obsahují Fourierovy koeficienty a_n, b_n resp. v_n, w_n lze napsat takto

$$\mathbf{SK}_a\mathbf{V}.$$

Matice \mathbf{K}_a je funkcí součinitelů a_n, b_n a je tvaru

$$\mathbf{K}_a = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_0, & a_1, & b_1, & a_2, & b_2, & a_3, & b_3, & \dots \\ 2a_1, & 2a_0 + a_2, & b_2, & a_1 + a_3, & b_1 + b_3, & a_2 + a_4, & b_2 + b_4, & \dots \\ 2b_1, & b_2, & 2a_0 - a_2, & -b_1 + b_3, & a_1 - a_3, & -b_2 + b_4, & a_2 - a_4, & \dots \\ 2a_2, & a_1 + a_3, & -b_1 + b_3, & 2a_0 + a_4, & b_4, & a_1 + a_5, & b_1 + b_5, & \dots \\ 2b_2, & b_1 + b_3, & a_1 - a_3, & b_4, & 2a_0 - a_4, & -b_1 + b_5, & a_1 - a_5, & \dots \\ 2a_3, & a_2 + a_4, & -b_2 + b_4, & a_1 + a_5, & -b_1 + b_5, & 2a_0 + a_6, & b_6, & \dots \\ 2b_3, & b_2 + b_4, & a_2 - a_4, & b_1 + b_5, & a_1 - a_5, & b_6, & 2a_0 - a_6, & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \end{pmatrix}.$$

Řadu (14) pro $\lambda_1(t^{(m-1)}(r, \varphi))$ můžeme po dosazení za $t(r, \varphi)$ z (15a) s použitím označení

$$\mathbf{U}^{(m-1)} = \mathbf{T}^{(m-1)} - \mathbf{T}_0,$$

kde

$$\mathbf{T}_0 = \begin{pmatrix} t_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

napsat ve tvaru

$$(19a) \quad \lambda_1^{(m-1)}(r, \varphi) = \mathbf{S} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \mathbf{K}_{U^{(m-1)}}^j \right) \mathbf{U}^{(m-1)}.$$

Fourierovy koeficienty funkce $\lambda_1^{(m-1)}(r, \varphi)$ jsou tedy dány vztahem

$$(19b) \quad \lambda_1^{(m-1)} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \mathbf{K}_{U^{(m-1)}}^j \right) \mathbf{U}^{(m-1)}.$$

Stejným postupem dostáváme pro Fourierovy koeficienty funkce $d\lambda_1/dt$ výraz

$$(20) \quad \lambda_2^{(m-1)} = \mathbf{a}_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (j+1) a_j \mathbf{K}_{U^{(m-1)}}^{j-1} \right) \mathbf{U}^{(m-1)},$$

kde

$$\mathbf{a}_0 = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}.$$

Dosadíme-li nyní uvedené výrazy do pravé strany vztahu (11), odvodíme pro rozložení efektivních tepelných zdrojů $q^{(m)}$ výraz

$$q^{(m)} = \frac{1}{\lambda_0} \{ \mathbf{S} \bar{\mathbf{q}}^{(0)} - \mathbf{S} \mathbf{q}^{(m-1)} \cdot \mathbf{S} \lambda_1^{(m-1)} + \mathbf{S} \lambda_2^{(m-1)} [\mathbf{S} \mathbf{T}_r^{(m-1)} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T}_r^{(m-1)} + \mathbf{S} \mathbf{T}_\varphi^{(m-1)} \cdot \mathbf{S} \mathbf{T}_\varphi^{(m-1)}] \},$$

kde $\mathbf{q}^{(m-1)}$ je vektor, jehož složky jsou funkce $\varepsilon \bar{q}_n^{(m-1)}(r)$, $s \bar{q}_n^{(m-1)}(r)$. Výraz pro vektor $\mathbf{q}^{(m)}$ lze tedy vyjádřit takto:

$$(21) \quad \mathbf{q}^{(m)} = \mathbf{q}^{(0)} + \frac{1}{\lambda_0} \{ -\mathbf{K}_{q^{(m-1)}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j \mathbf{K}_{U^{(m-1)}}^j \right) \mathbf{U}^{(m-1)} + (\mathbf{K}_{T_r^{(m-1)}}^2 + \mathbf{K}_{T_\varphi^{(m-1)}}^2) [\mathbf{a}_0 + \left(\sum_{j=1}^{\infty} (j+1) a_j \mathbf{K}_{U^{(m-1)}}^{j-1} \right) \mathbf{U}^{(m-1)}] \}.$$

Můžeme nyní z rovnice (10) pro $m = 0$ určit $t^{(0)}(r, \varphi)$, z (21) výraz pro $q^{(1)}$, řešením (10) pro $m = 1$ funkci $t^{(1)}(r, \varphi)$, atd. Lze očekávat, že v případech, kdy chování funkce $\lambda(t)$ je z fyzikálního hlediska rozumné³⁾, bude iterační postup konvergovat ke správnému výsledku. Velmi krátce se o otázce konvergence zmíníme u první okrajové úlohy.

Z fyzikálního hlediska má velkou důležitost závislost součinitele tepelné vodivosti λ na teplotě ve tvaru⁴⁾

$$\lambda(t) = b_0 + b_k (t - t_0)^{-k}$$

³⁾ Předpokládáme, že funkce $\lambda(t)$ nenabývá nulových nebo záporných hodnot.

⁴⁾ k je přirozené kladné číslo.

nebo obecněji

$$\lambda(t) = b_0 + b_1 v + b_2 v^2 + b_3 v^3 + \dots + b_k v^k + \dots,$$

kde

$$v = \frac{1}{t - t_0}.$$

Abychom mohli postupovat stejným způsobem jako u závislosti (14) musíme nejprve stanovit Fourierovy součinitele funkce v . Úpravou výrazu pro v dostáváme

$$(t - t_0)v = 1,$$

neboli po rozepsání na jednotlivé složky

$$(22) \quad \mathbf{K}_u \mathbf{V} = \mathbf{J},$$

kde

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}, \quad u = t - t_0.$$

Násobením rovnice (22) maticí \mathbf{K}_u^{-1} zleva dostaneme pro vektor \mathbf{V} výraz

$$\mathbf{V} = \mathbf{K}_u^{-1} \mathbf{J}.$$

Pro složky vektoru $\mathbf{q}^{(m)}$ odvodíme tedy

$$(21') \quad \mathbf{q}^{(m)} = \mathbf{q}^{(0)} - \frac{1}{\lambda_0} \{ \mathbf{K}_q^{(m-1)} \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \mathbf{K}_V^{j-1} \right) + \\ + (\mathbf{K}_{T_r}^2 + \mathbf{K}_{T_\phi}^2) \left(\sum_{j=1}^{\infty} j b_j \mathbf{K}_V^j \right) \} \mathbf{V}^{(m-1)}.$$

Napišme ještě tvar rovnic pro případ, kdy zdroje (a okrajové podmínky) jsou pouze funkcí nezávisle proměnné r . Rovnice (10) se zjednoduší na tvar

$$(10') \quad t^{n(m)} + \frac{1}{r} t'^{(m)} = -q^{(m)} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

kde

$$(11') \quad q^{(0)} = \frac{1}{\lambda_0} q(r), \\ q^{(m)} = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ q(r) - \lambda_1(t^{(m-1)}) q^{(m-1)} + \frac{d\lambda_1}{dt} \Big|_{t=t^{(m-1)}} (t'^{(m-1)})^2 \right\}$$

a řešením

$$(12') \quad t^{(m)} = A_0^{(m)} + B_0^{(m)} \lg r - \int_{r_0}^r \frac{1}{r'} \int_{r_0'}^{r'} r'' q^{(m)}(r'') dr'' dr'.$$

V tomto případě je však vhodnější ponechat nelineární členy ve tvaru, daném vztahem (5). Řešením rovnice (10') potom dostáváme výraz

$$(12'') \quad t^{(m)} = A_0^{(m)} + B_0^{(m)} \lg r + cZ_0^{(0)} - \int_{r_0}^r \frac{\lambda_1^{(m-1)}(r)}{\lambda_0} t'^{(m-1)}(r') dr'.$$

Poznámka 1. Jestliže je oblast kruhová, vypadnou z fyzikálních důvodů z řady (12) součinitelé se záporným mocnitelem r a logaritmický člen, tj. $B_n = D_n = 0$.

Poznámka 2. Z výše uvedeného je patrné, že výpočet vektoru $\mathbf{q}^{(m)}$ není nikterak jednoduchý. Abychom se v složitějších případech vyhnuli těžkopádnému odvozování výrazů pro ${}^c\bar{q}_n^{(m)}$ a ${}^s\bar{q}_n^{(m)}$ je výhodnější, rozdělit obor proměnné r na řadu úseků a výpočet vektorů $\mathbf{q}^{(m)}(r_i)$ provést numericky.

3. OKRAJOVÉ ÚLOHY PRO MEZIKRUŽÍ A KRUH⁵⁾

3.1. První okrajová úloha (Dirichletova úloha)

První okrajová úloha požaduje na vnitřním a vnějším poloměru (R_1, R_2) splnění podmínek

$$(23) \quad \begin{aligned} t(R_1, \varphi) &= F_1(\varphi), \\ t(R_2, \varphi) &= F_2(\varphi), \end{aligned}$$

kde $F_1(\varphi)$ a $F_2(\varphi)$ jsou dané funkce argumentu φ . Rozvineme-li je do Fourierových řad a postupujeme-li stejným způsobem jako v [6], můžeme okrajové podmínky (23) pro řešení $t^{(0)}$ (tj. pro $m = 0$) napsat takto:

$$(24) \quad \begin{aligned} {}_1\mathbf{M}_1 \mathbf{C}^{(0)} &= {}_1\mathbf{F}_1^{(0)}, \\ {}_1\mathbf{M}_2 \mathbf{C}^{(0)} &= {}_1\mathbf{F}_2^{(0)}, \end{aligned}$$

kde

$$\begin{aligned} {}_1\mathbf{F}_1^{(0)} &= \mathbf{A}_1 - \mathbf{Z}_1^{(0)}, \\ {}_1\mathbf{F}_2^{(0)} &= \mathbf{A}_2 - \mathbf{Z}_2^{(0)} \end{aligned}$$

a kde ${}_1\mathbf{M}_1$ resp. ${}_1\mathbf{M}_2$ jsou matice tvaru (16), vztahující se na poloměr $r = R_1$ resp. $r = R_2$. Vektory $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2$ obsahují Fourierovy součinitele funkcí $F_1(\varphi), F_2(\varphi)$ (tj. $a_{1n}, b_{1n}; a_{2n}, b_{2n}$) a vektory $\mathbf{Z}_1^{(0)}, \mathbf{Z}_2^{(0)}$ se vztahují na poloměr R_1 resp. R_2 .

⁵⁾ Především nás zajímá třetí okrajová podmínka; první a druhý typ okrajových podmínek uvádíme pro úplnost.

Řešení rovnic (24) je u první okrajové úlohy jednoduché a dává pro integrační konstanty $A_0^{(0)}, B_0^{(0)}, A_1^{(0)}, B_1^{(0)}, C_1^{(0)}, D_1^{(0)}, \dots$ výrazy

(25)

$$A_0^{(0)} = \frac{1}{\lg R_2 - \lg R_1} [(a_{10} - {}^cZ_0^{(0)}(R_1)) \lg R_2 - (a_{20} - {}^cZ_0^{(0)}(R_2)) \lg R_1],$$

$$B_0^{(0)} = \frac{1}{\lg R_2 - \lg R_1} [a_{20} - {}^cZ_0^{(0)}(R_2) - a_{10} + {}^cZ_0^{(0)}(R_1)],$$

$$A_n^{(0)} = \frac{1}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} [R_2^{-n}(a_{1n} - {}^cZ_n^{(0)}(R_1)) - R_1^{-n}(a_{2n} - {}^cZ_n^{(0)}(R_2))] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$B_n^{(0)} = \frac{1}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} [R_1^n(a_{2n} - {}^cZ_n^{(0)}(R_2)) - R_2^n(a_{1n} - {}^cZ_n^{(0)}(R_1))] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$C_n^{(0)} = \frac{1}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} [R_2^{-n}(b_{1n} - {}^sZ_n^{(0)}(R_1)) - R_1^{-n}(b_{2n} - {}^sZ_n^{(0)}(R_2))] \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$D_n^{(0)} = \frac{1}{R_1^n R_2^{-n} - R_1^{-n} R_2^n} [R_1^n(b_{2n} - {}^sZ_n^{(0)}(R_2)) - R_2^n(b_{1n} - {}^sZ_n^{(0)}(R_1))] \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Na základě řešení $t^{(0)}(r, \varphi)$ vypočteme funkci $q^{(1)}$ (vektor $\mathbf{q}^{(1)}$, viz (21)), pomocí (13) vektory $\mathbf{Z}_1^{(1)}, \mathbf{Z}_2^{(1)}$. Integrační konstanty řešení $t^{(1)}(r, \varphi)$ určíme z podmínek (23). Pro $A_0^{(1)}, B_0^{(1)}, A_1^{(1)}, B_1^{(1)}, C_1^{(1)}, D_1^{(1)}, \dots$ dostáváme stejné výrazy (25), pouze s tím rozdílem, že ${}^cZ_n^{(0)}$ a ${}^sZ_n^{(0)}$ jsou nahrazeny výrazy pro ${}^cZ_n^{(1)}$ a ${}^sZ_n^{(1)}$. Obdobně postupujeme při výpočtu $t^{(2)}, t^{(3)}$ atd.

Příklady

Ukážeme na několika velmi jednoduchých případech zhruba charakter konvergence iteračního postupu. Závislost součinitele tepelné vodivosti na teplotě vybereme tak, aby bylo možné v našem konkrétním případě snadno nalést přesné řešení rovnice vedení tepla (2) pomocí substituce (viz [1], [2])

$$\vartheta = \int_{t_0}^t \frac{\lambda(t)}{\lambda(t_0)} dt.$$

Konvergenci a přesnost uvedené metody můžeme pak posoudit srovnáním s tímto řešením.

Zabývejme se odhadem konvergence iteračního postupu pro kruhový váleček s tepelnými zdroji po průřezu konstantními a pro okrajovou podmínku prvního typu na poloměru R , nezávisící na úhlu φ (položme pro jednoduchost $t(R) = 0$).

a) Uvažujme-li závislost součinitele tepelné vodivosti na teplotě ve tvaru

$$\lambda = \lambda_0 - at,$$

dostáváme pomocí vztahů (10'), (11'), (12') (nebo, což je totéž pomocí (12'')) pro průběh teploty $t^{(m)}(r)$ následující rekurentní vzorce:

$$t^{(m)}(r) = A^{(m)}(R^2 - r^2) + B^{(m)}(R^4 - r^4) + C^{(m)}(R^6 - r^6) + D^{(m)}(R^8 - r^8) + \dots,$$

kde

$$A^{(m)} = \frac{a}{\lambda_0} t^{(m-1)}(0) A^{(m-1)} + \frac{q}{4\lambda_0},$$

$$B^{(m)} = \frac{a}{\lambda_0} [t^{(m-1)}(0) B^{(m-1)} - \frac{1}{2}(A^{(m-1)})^2],$$

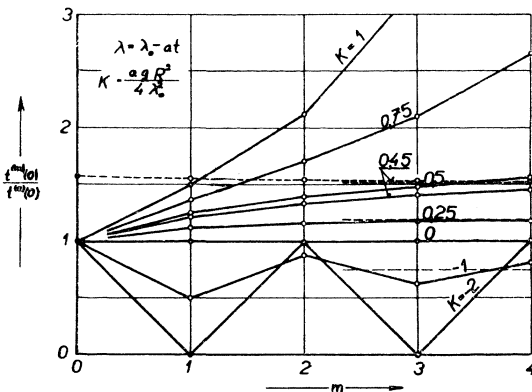
$$C^{(m)} = \frac{a}{\lambda_0} [t^{(m-1)}(0) C^{(m-1)} - A^{(m-1)} B^{(m-1)}],$$

$$D^{(m)} = \frac{a}{\lambda_0} [t^{(m-1)}(0) D^{(m-1)} - A^{(m-1)} C^{(m-1)} - \frac{1}{2}(B^{(m-1)})^2],$$

$$E^{(m)} = \frac{a}{\lambda_0} [t^{(m-1)}(0) E^{(m-1)} - A^{(m-1)} D^{(m-1)} - B^{(m-1)} C^{(m-1)}],$$

$$F^{(m)} = \frac{a}{\lambda_0} [t^{(m-1)}(0) F^{(m-1)} - A^{(m-1)} E^{(m-1)} - B^{(m-1)} D^{(m-1)} - \frac{1}{2}(C^{(m-1)})^2],$$

.....



Obr. 1. Maximální teplota v ose článku kruhového průřezu při jednotlivých iteracích pro různé hodnoty kritéria K .

a kde

$$A^{(0)} = \frac{q}{4\lambda_0},$$

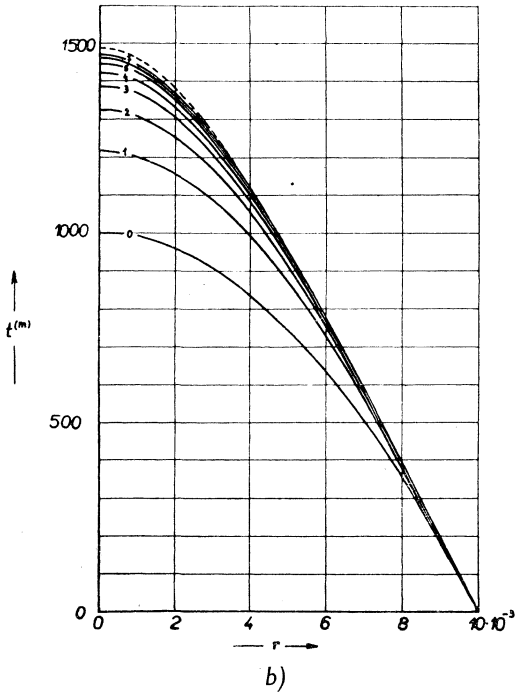
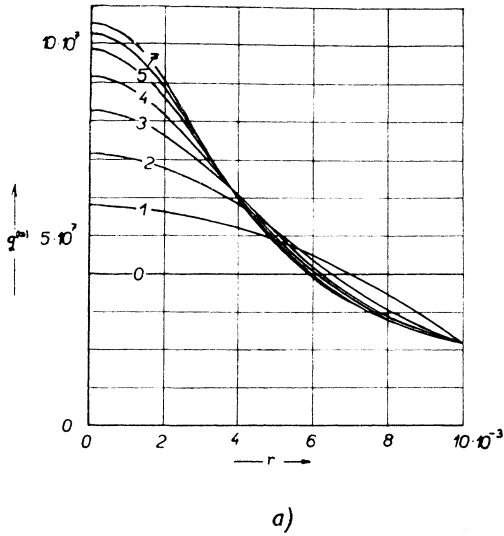
$$B^{(0)} = C^{(0)} = D^{(0)} = \dots = 0,$$

$$t^{(0)}(0) = \frac{qR^2}{4\lambda_0}.$$

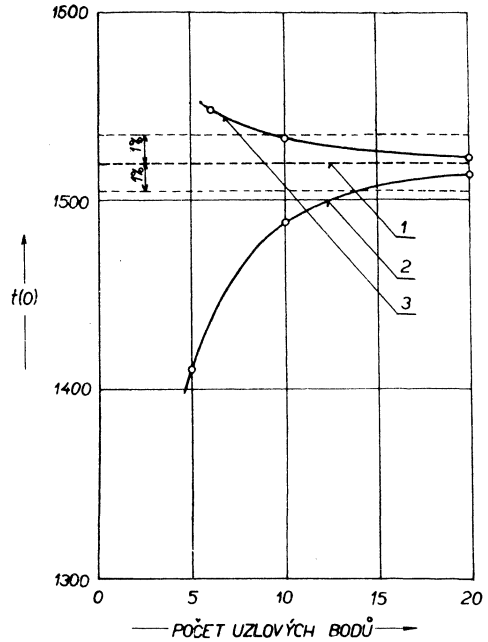
Teplota $t^{(m)}(0)$ je pro jednotlivé iterace a pro různé hodnoty bezrozměrného kritéria

$$K = \frac{aqR^2}{4\lambda_0^2}$$

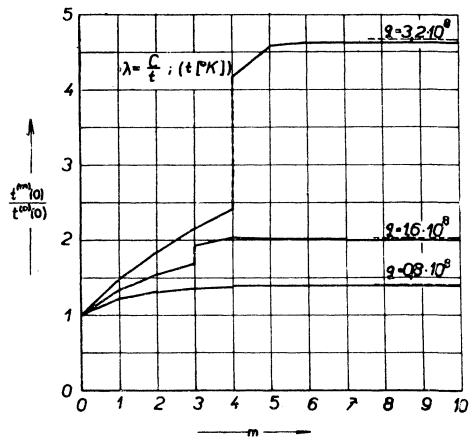
vynesena na obr. 1.



Obr. 2. Průběh efektivních tepelných zdrojů (a) a průběh teploty (b) v závislosti na poloměru r při jednotlivých iteracích.



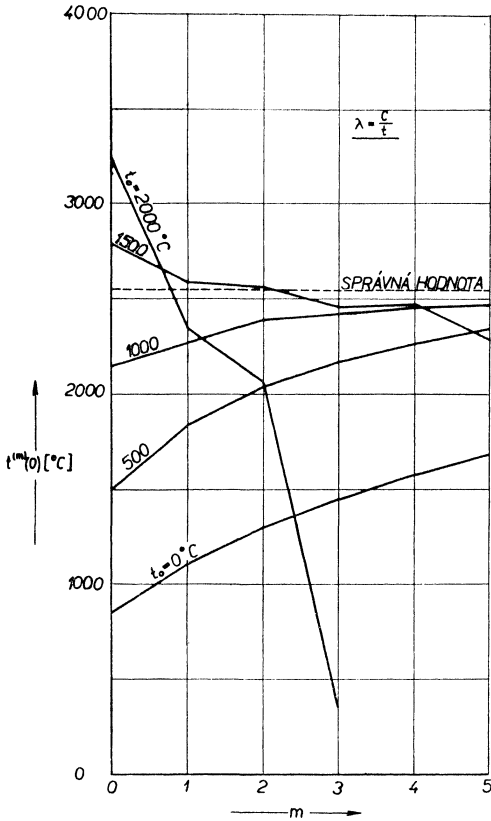
Obr. 3. Přesnost výpočtu v závislosti na počtu uzlových bodů (1 – přesná hodnota, 2 – výpočet s použitím lichoběžníkového pravidla při numerické integraci, 3 – výpočet s použitím Simpsonova pravidla).



Obr. 4. Maximální teplota v ose článku kruhového průřezu při jednotlivých iteracích (po několika iteracích byla použita Aitkenova metoda pro odhad výsledné hodnoty).

Je možno odhadnout, že postupná přiblížení teploty $t^{(m)}(0)$ konvergují pro $-2 < K < 0,5$

k správnému výsledku (viz slabé čáry na obr. 1). Hodnota $K = 0,5$ odpovídá případu, kdy $\lambda|_{r=0} = 0$. Konvergenci je možno urychlit, odhadneme-li předem střední teplotu a místo λ_0 bereme λ_s (viz čárkovanou čáru pro $K = 0,45$).



Obr. 5. Maximální teplota v ose článku kruhového průřezu při jednotlivých iteracích pro různé hodnoty $\lambda(t_0)$ ($q = 1,6 \cdot 10^8$ kcal/m³h, $\lambda = c/t$, $c = 3092$ kcal/mh, $R = 10$ mm).

kruhového válce v jednotlivých iteracích (pro urychlení konvergence byla vždy po několika iteracích použita Aitkenova metoda pro odhad výsledné hodnoty).

c) Obdobný výpočet byl proveden též pro závislost λ na teplotě ve tvaru

$$\lambda = \lambda_0 - at + bt^2.$$

Ukazuje se opět, že konvergence nastává v případech, kdy se λ nepřibližuje příliš k nulovým hodnotám.

Snadněji je možno uvedenou úlohu (zvláště při větším počtu iterací) řešit numerickým integrováním výrazu (12') nebo (12''). Jako příklad je na obr. 2 vynesena průběh efektivních tepelných zdrojů $q^{(m)}(r)$ (a) a průběh teploty $t^{(m)}(r)$ (b) v jednotlivých iteracích pro hodnotu kritéria $K = 0,45$. Ukazuje se, že i v tomto případě konverguje postup ještě poměrně rychle. Pro případ $K < 0,25$ postačí přibližně 3–4 iterace k určení dostatečně přesného výsledku. Na obr. 3 je naznačena přesnost výpočtu v závislosti na počtu uzlových bodů a způsobu numerické integrace.

b) Pro závislost součinitele tepelné vodivosti na teplotě ve tvaru

$$\lambda = \frac{c}{t} \quad (\text{teplota } t \text{ ve } ^\circ\text{K})$$

byl proveden numerický výpočet pro různé hodnoty tepelného zatížení q . Ukazuje se, že iterační postup konverguje v našem případě pro libovolné q , i když při značných rozdílech teplot potřebný počet iterací narůstá. Pro urychlení konvergence je možno pro odhad výsledného průběhu $t(r)$, $t'(r)$, $q(r)$ použít po několika prvních iteracích Aitkenovy metody [3]. Na obr. 4 je pro několik hodnot q vynesena teplota v ose

Rozborem výrazu (12ⁿ) je možno ukázat, že ve zvoleném případě konverguje uvedená metoda zřejmě pro případ, kdy

$$\left| \frac{\lambda_1^{(m-1)}}{\lambda_0} \right|_{\max} \leq k < 1.$$

Z tohoto hlediska je tedy třeba určité opatrnosti při volbě hodnoty λ_0 . Na obr. 5 je pro případ ad b) ukázán charakter konvergence při různých hodnotách t_0 , tedy λ_0 .

Stejným způsobem je možno vyšetřovat konvergenci iteračního postupu pro mezikruhový útvar nebo pro případ, kdy okrajové podmínky nebo tepelné zdroje jsou závislé na azimutálním úhlu.

3.2. Druhá okrajová úloha (Neumannova úloha)

Okrajové podmínky druhého typu pro mezikruží je možno napsat takto (R_1 – vnitřní poloměr, R_2 – vnější poloměr)

$$(26) \quad \begin{aligned} \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= G_1(\varphi), \\ -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= G_2(\varphi), \end{aligned}$$

kde funkce $G_1(\varphi)$ a $G_2(\varphi)$ jsou dány, nejsou však na sobě zcela nazávislé. Z Gauss-Ostrogradského věty dostáváme podmínku

$$R_1 \int_0^{2\pi} G_1(\varphi) d\varphi + R_2 \int_0^{2\pi} G_2(\varphi) d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} q(r, \varphi) r dr d\varphi$$

neboli po dosazení Fourierových řad funkcí $G_1(\varphi)$, $G_2(\varphi)$, $q(r, \varphi)$

$$(27) \quad R_1 c_{10} + R_2 c_{20} = \int_{R_1}^{R_2} {}^c \bar{q}_0(r) r dr,$$

kde

$${}^c \bar{q}_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} q(r, \varphi) d\varphi,$$

$$c_{10} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_1(\varphi) d\varphi,$$

$$c_{20} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_2(\varphi) d\varphi.$$

Rovnice (26) přepíšeme do tvaru⁶⁾

$$\pm \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_i} = G_i(\varphi) \mp \lambda_1(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_i} \quad (i = 1, 2)$$

a budeme je řešit postupnými iteracemi

$$(28) \quad \pm \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_i} = G_i(\varphi) \quad (i = 1, 2), \quad (m = 0),$$

$$\pm \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_i} = G_i(\varphi) \mp \lambda_1(t) \frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_i} \quad (i = 1, 2), \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Po rozepsání rovnic (28) pro jednotlivé funkce nezávislé proměnné dostáváme soustavu rovnic, kterou v maticovém zápise napíšeme takto:

$$(29) \quad \begin{aligned} {}_2\mathbf{M}_1 \mathbf{C}^{(m)} &= {}_2\mathbf{F}_1^{(m)}, \\ {}_2\mathbf{M}_2 \mathbf{C}^{(m)} &= {}_2\mathbf{F}_2^{(m)}, \end{aligned}$$

kde ${}_2\mathbf{M}_1$ a ${}_2\mathbf{M}_2$ jsou derivace matic ${}_1\mathbf{M}_1$ a ${}_1\mathbf{M}_2$,

$$\begin{aligned} {}_2\mathbf{F}_1^{(m)} &= \frac{1}{\lambda_0} [\mathbf{B}_1 - \lambda_0 \mathbf{Z}'_1^{(m)} - \mathbf{K}_{\lambda_1^{(m-1)}} \mathbf{T}_r^{(m-1)}(R_1)], \\ {}_2\mathbf{F}_2^{(m)} &= \frac{1}{\lambda_0} [-\mathbf{B}_2 - \lambda_0 \mathbf{Z}'_2^{(m)} - \mathbf{K}_{\lambda_1^{(m-1)}} \mathbf{T}_r^{(m-1)}(R_2)], \end{aligned}$$

a kde \mathbf{B}_1 a \mathbf{B}_2 obsahují Fourierovy součinitele funkcí $G_1(\varphi)$ a $G_2(\varphi)$. Spojením rovnic (29) dostáváme

$$\mathbf{M} \mathbf{C}^{(m)} = \mathbf{F}^{(m)},$$

kde⁷⁾

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} {}_2\mathbf{M}_1 \\ {}_2\mathbf{M}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^{(m)} = \begin{pmatrix} {}_2\mathbf{F}_1^{(m)} \\ {}_2\mathbf{F}_2^{(m)} \end{pmatrix},$$

přičemž u druhé okrajové podmínky má matice \mathbf{M} nulitu rovnou jedné. Lze ukázat, že prvky prvního řádku matice ${}_2\mathbf{M}_1$ a ${}_2\mathbf{M}_2$ a prvé složky vektorů na pravé straně rovnic (29) si jsou úměrné, je-li splněna podmínka (27). Pro odstranění nulity matice \mathbf{M} škrtneme jeden ze zmíněných řádků, odpovídající složku vektoru na pravé straně a první sloupec matice \mathbf{M} (který je nulový) a zbylou rovnici řešíme. Při konkrétním výpočtu je nutno vhodně zvolit aditivní konstantu A_0 , protože se s její změnou deformuje teplotní pole.

⁶⁾ Pro $i = 1$ platí horní znaménko, pro $i = 2$ dolní znaménko.

⁷⁾ Horní část čtvercové matice \mathbf{M} tvoří obdélníková matice ${}_2\mathbf{M}_1$, dolní část obdélníková matice ${}_2\mathbf{M}_2$. Obdobný význam má označení $\mathbf{F}^{(m)}$.

3.3. Třetí okrajová úloha

Třetí typ okrajové úlohy napíšeme takto:

$$(30) \quad \begin{aligned} \lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= \alpha_1(\varphi, t, t_1) [t(R_1, \varphi) - t_1(\varphi)], \\ -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_2} &= \alpha_2(\varphi, t, t_2) [t(R_2, \varphi) - t_2(\varphi)]. \end{aligned}$$

Předpokládáme-li, že funkci $\alpha_i(\varphi, t, t_i)$ je možno upravit do tvaru

$$\alpha_i(\varphi, t, t_i) = \Phi_i(\varphi) [1 + F_i(t, t_i)] \quad (i = 1, 2)$$

a použijeme-li vztahu (3), můžeme okrajové podmínky (30) vyjádřit takto:

$$(31) \quad \mp \lambda_0 \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_i} + \Phi_i(\varphi) [t(R_i, \varphi) - t_i(\varphi)] = N_i \quad (i = 1, 2),$$

kde

$$N_i = -\Phi_i(\varphi) F_i(t, t_i) [t(R_i, \varphi) - t_i(\varphi)] \pm \lambda_{1i}(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R_i}.$$

Rovnice (31) budeme řešit iteračním postupem. Nulté přiblížení teplotního pole určíme z (31) pro $N_i = 0$, tj.

$$(32a) \quad \mp \lambda_0 \frac{\partial t^{(0)}}{\partial r} \Big|_{r=R_i} + \Phi_i(\varphi) [t^{(0)}(R_i, \varphi) - t_i(\varphi)] = 0$$

a další iterace řešením rovnic

$$(32b) \quad \mp \lambda_0 \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=R_i} + \Phi_i(\varphi) [t^{(m)}(R_i, \varphi) - t_i(\varphi)] = N_i^{(m-1)},$$

kde funkce

$$(33) \quad N_i^{(m-1)} = -\Phi_i(\varphi) F_i(t^{(m-1)}, t_i) [t^{(m-1)}(R_i, \varphi) - t_i(\varphi)] \pm \lambda_{1i}(t^{(m-1)}) \frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \Big|_{r=R_i}$$

jsou již známé, určené z předchozího řešení.

Pro závislost součinitele přestupu tepla na teplotě bývají udávány vztahy [4]

$$(34) \quad \alpha = \alpha_0 \left(\frac{t}{t_i} \right)^{-k} \quad (t, t_i [^\circ\text{K}]; k = 0,55)$$

nebo [5]

$$\alpha = \alpha_0 \left(\frac{Pr_f}{Pr_w} \right)^p,$$

kde

$$\alpha_0 = 0,021 Re_f^{0,8} Pr_f^{0,4}$$

(Re – Reynoldsovo číslo, Pr – Prandlovo číslo; indexy f , w se vztahují na parametry chladicího média při střední teplotě chladiva, resp. teplotě stěny).

Zvolíme-li výraz (34), dostáváme

$$\alpha_i = \Phi_i(\varphi) \left[1 + \frac{t - t_i}{t_i} \right]^{-k}$$

neboli

$$\alpha_i = \Phi_i(\varphi) \left[1 + \binom{-k}{1} \frac{t - t_i}{t_i} + \binom{-k}{2} \left(\frac{t - t_i}{t_i} \right)^2 + \dots + \binom{-k}{l} \left(\frac{t - t_i}{t_i} \right)^l + \dots \right].$$

Pro funkci F_i dostáváme tedy řadu

$$(35) \quad F_i = c_0 w + c_1 w^2 + \dots + c_{l-1} w^l + \dots,$$

kde

$$(36) \quad w = \frac{t - t_i}{t_i}.$$

Funkci F_i upravíme dosazením za t ze vztahu (12) a za t_i z výrazu

$$t_i = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{in} \cos n\varphi + b_{in} \sin n\varphi).$$

Fourierovy koeficienty pro w (vektor těchto koeficientů označme \mathbf{W}) můžeme odvodit pomocí vztahu

$$t_i w = t - t_i.$$

Dostáváme (viz odst. 2)

$$\mathbf{W} = \mathbf{K}_{T_i}^{-1} (\mathbf{T} - \mathbf{T}_i).$$

Pro Fourierovy součinitele funkce $F_i(t, t_i)$ tedy odvodíme

$$(37) \quad \mathbf{F}_i = \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j \mathbf{K}_w^j \right) \mathbf{W}.$$

Rovnice (32b) a (33) upravíme nyní pro výpočet integračních konstant $\mathbf{C}^{(m)}$ takto:

$$(\mathbf{K}_{\alpha_i} \mathbf{M}_i \mp \lambda_{0,2} \mathbf{M}_i) \mathbf{C}^{(m)} = \mathbf{K}_{\alpha_i} (\mathbf{T}_i - \mathbf{Z}_i^{(m)}) \pm \lambda_0 \mathbf{Z}_i^{\prime(m)} + \mathbf{N}_i^{(m-1)} \\ (i = 1, 2), (m \leq 0, 1, 2, \dots)$$

neboli

$$(38) \quad {}_3 \mathbf{M}_i \mathbf{C}^{(m)} = {}_3 \mathbf{F}_i^{(m)},$$

kde

$$(39) \quad \begin{aligned} {}_3\mathbf{M}_i &= \mathbf{K}_{\alpha_i} \mathbf{M}_i \mp \lambda_0 {}_2\mathbf{M}_i, \\ {}_3\mathbf{F}_i^{(m)} &= \mathbf{K}_{\alpha_i} (\mathbf{T}_i - \mathbf{Z}_i^{(m)}) \pm \lambda_0 \mathbf{Z}_i^{(m)} + \mathbf{N}_i^{(m-1)}, \\ \mathbf{N}_i^{(m-1)} &= \begin{cases} \mathbf{0} & (m = 0), \\ -\mathbf{K}_{\alpha_i} (\mathbf{K}_{T^{(m-1)}} - \mathbf{K}_{T_i}) \mathbf{F}_i^{(m-1)} \pm \mathbf{K}_{T_r}^{(m-1)} \lambda_{1i}^{(m-1)} & (m = 1, 2, \dots). \end{cases} \end{aligned}$$

Jestliže je $\lambda = \lambda_0 = \text{const.}$, dostáváme

$$\mathbf{Z}_i^{(m)} = \mathbf{Z}_i^{(0)} \quad \text{a} \quad \lambda_{1i} = \mathbf{0},$$

takže stačí rovnici vedení tepla (2) řešit pouze jednou a vypočítat integrační konstanty z (38).

4. OKRAJOVÉ ÚLOHY PRO MEZIKRUHOVOU OBLAST, SLOŽENOU Z VÍCE VRSTEV

4.1. Podmínky na rozhraní dvou prostředí

Okrajové podmínky na rozhraní dvou koncentrických mezikruží, stýkajících se na poloměru R , můžeme napsat ve tvaru (1 – vnitřní mezikruží, 2 – vnější mezikruží)

$$(40) \quad \begin{aligned} t_2(R_1, \varphi) &= t_1(R_1, \varphi) + \lambda_1(t_1) \varrho_1(\varphi, t_1, t_2) \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \\ -\lambda_2(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= -\lambda_1(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1}. \end{aligned}$$

Upravíme-li výraz pro kontaktní odpor do tvaru

$$\varrho_1(\varphi, t_1, t_2) = \psi_1(\varphi) [\varrho_{10} + \varrho_{11}(t_1, t_2)]$$

a použijeme-li stejně jako dříve vztahu (3), dostáváme z podmínek (40) závislosti

$$(41) \quad \begin{aligned} t_2(R_1, \varphi) &= t_1(R_1, \varphi) + \lambda_{01} \varrho_{01} \psi_1(\varphi) \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} + P_1, \\ \lambda_{02} \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1} &= \lambda_{01} \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} + Q_1, \end{aligned}$$

kde

$$(42) \quad \begin{aligned} P_1 &= \{\lambda_{01} \varrho_{11}(t, t_2) + \lambda_{11}(t_1) [\varrho_{01} + \varrho_{11}(t_1, t_2)]\} \psi_1(\varphi) \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1}, \\ Q_1 &= \lambda_{11}(t_1) \frac{\partial t_1}{\partial r} \Big|_{r=R_1} - \lambda_{12}(t_2) \frac{\partial t_2}{\partial r} \Big|_{r=R_1}. \end{aligned}$$

1. Nulté přiblížení řešení vypočteme při zanedbání nelinearity tak, jak bylo naznačeno v odstavcích 2 a 3. V závislostech typu (43) mezi integračními konstantami sousedících pásem vypadnou vektory \mathbf{P}_i a \mathbf{Q}_i . Vnější okrajové podmínky budeme psát pro třetí typ. Obdobně můžeme řešit okrajovou úlohu pro první a druhý typ okrajových podmínek (pokud se týká případu, kdy se na poloměrech R_0 i R_L uplatňuje druhá okrajová podmínka, je možno postupovat stejně jako v odst. 3.2). Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$(47) \quad (\mathbf{K}_{\alpha 0 \ 1} \mathbf{M}_0 - \lambda_{0 \ 1 \ 2} \mathbf{M}_0) \mathbf{C}_1^{(0)} = \mathbf{K}_{\alpha 0}(\mathbf{T}_0 - \mathbf{Z}_1^{(0)}) + \lambda_{0 \ 1} \mathbf{Z}_1^{\prime(0)} \quad (r = R_0),$$

$$(48) \quad (\mathbf{K}_{\alpha L \ 1} \mathbf{M}_L + \lambda_{0 \ L \ 2} \mathbf{M}_L) \mathbf{C}_L^{(0)} = \mathbf{K}_{\alpha L}(\mathbf{T}_L - \mathbf{Z}_L^{(0)}) - \lambda_{0 \ L} \mathbf{Z}_L^{\prime(0)} \quad (r = R_L),$$

$$(49) \quad \mathbf{C}_L^{(0)} = {}_4 \mathbf{M}_{1,L} \mathbf{C}_1^{(0)} + {}_4 \mathbf{F}_{1,L}^{(0)}.$$

Vyloučíme-li z rovnice (48) vektor $\mathbf{C}_L^{(0)}$ pomocí (49), dostáváme po úpravě pro vektor $\mathbf{C}_1^{(0)}$ výraz

$$(50) \quad \mathbf{C}_1^{(0)} = \mathbf{M}_c^{-1} \mathbf{F}_c^{(0)},$$

kde

$$\mathbf{M}_c = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha 0 \ 1} \mathbf{M}_0 - \lambda_{0 \ 1 \ 2} \mathbf{M}_0 \\ (\mathbf{K}_{\alpha L \ 1} \mathbf{M}_L + \lambda_{0 \ L \ 2} \mathbf{M}_L) {}_4 \mathbf{M}_{1,L} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}_c^{(0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha 0}(\mathbf{T}_0 - \mathbf{Z}_1^{(0)}) + \lambda_{0 \ 1} \mathbf{Z}_1^{\prime(0)} \\ \mathbf{K}_{\alpha L}(\mathbf{T}_L - \mathbf{Z}_L^{(0)}) - \lambda_{0 \ L} \mathbf{Z}_L^{\prime(0)} - (\mathbf{K}_{\alpha L \ 1} \mathbf{M}_L + \lambda_{0 \ L \ 2} \mathbf{M}_L) {}_4 \mathbf{F}_{1,L}^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Pomocí vztahů (43) při $\mathbf{P}_i = \mathbf{Q}_i = \mathbf{0}$ vypočteme ostatní vektory $\mathbf{C}_i^{(0)}$.

2. Prvé (nebo m -té) přiblížení určíme takto: Vypočteme nejprve vektory $\mathbf{q}_i^{(1)}$ ($\mathbf{q}_i^{(m)}$) viz (21) nebo (22) (pokud je v některém pásmu $\lambda = \text{const}$, pak $\mathbf{q}_i^{(m)} = \mathbf{q}_i^{(m-1)} = \dots = \mathbf{q}_i^{(0)}$), dále vektory $\mathbf{Z}_i^{(1)}$ ($\mathbf{Z}_i^{(m)}$) a všechny nelineární členy v rovnicích (38) a (44) tj. $\mathbf{N}_i^{(0)}$, $\mathbf{P}_i^{(0)}$, $\mathbf{Q}_i^{(0)}$ ($\mathbf{N}_i^{(m-1)}$, $\mathbf{P}_i^{(m-1)}$, $\mathbf{Q}_i^{(m-1)}$). Dostáváme obdobné rovnice, jako (47), (48), doplněné členy $\mathbf{N}_i^{(0)}$, $\mathbf{N}_L^{(0)}$ ($\mathbf{N}_L^{(m-1)}$, $\mathbf{N}_1^{(m-1)}$) viz (38). Pro určení prvního (m -tého) přiblížení $\mathbf{C}_1^{(1)}$ ($\mathbf{C}_1^{(m)}$) dostáváme stejný výraz jako (50), pouze vektor $\mathbf{F}_c^{(0)}$ se změní na tvar

$$\mathbf{F}_c^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{\alpha 0}(\mathbf{T}_0 - \mathbf{Z}_1^{(1)}) + \lambda_{0 \ 1} \mathbf{Z}_1^{\prime(1)} + \mathbf{N}_1^{(0)} \\ \mathbf{K}_{\alpha L}(\mathbf{T}_L - \mathbf{Z}_L^{(1)}) - \lambda_{0 \ L} \mathbf{Z}_L^{\prime(1)} - (\mathbf{K}_{\alpha L \ 1} \mathbf{M}_L + \lambda_{0 \ L \ 2} \mathbf{M}_L) {}_4 \mathbf{F}_{1,L}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Poznámka 1. V případě, že závislost λ na teplotě je velmi slabá avšak ϱ a α nikoliv, může být pro urychlení výpočtu vhodné po každé iteraci rovnice (2) počítat více iterací u okrajových podmínek.

Poznámka 2. Pomocí výsledků práce [6] a zde uvedené metodiky je možno řešit též úlohy s excentrickými mezikružními.

5. APLIKACE METODIKY

Uvedeme pro ilustraci uvedené metodiky řešení několika úloh, vyskytujících se při podrobném tepelném výpočtu palivového článku jaderného reaktoru.

Příklad 1.

Zabývejme se řešením teplotního pole elementu palivového článku prutového typu pro případ, kdy po obvodu proměnný součinitel přestupu tepla závisí na teplotě, a kdy součinitelé tepelné vodivosti paliva a povlaku jsou konstantní.

Mají-li pruty v palivovém článku poměrně malý průměr a jsou-li distanční mřížky dosti daleko od sebe, mohou nastat vlivem vyhořívání uranu nebo tepelným cyklováním takové deformace, že se dva pruty dotknou (viz obr. 6). Změněné poměry vedou k nerovnoměrnému ochlazování a ke vzrůstu maximálních teplot. Zvolme průběh součinitele přestupu tepla α takto

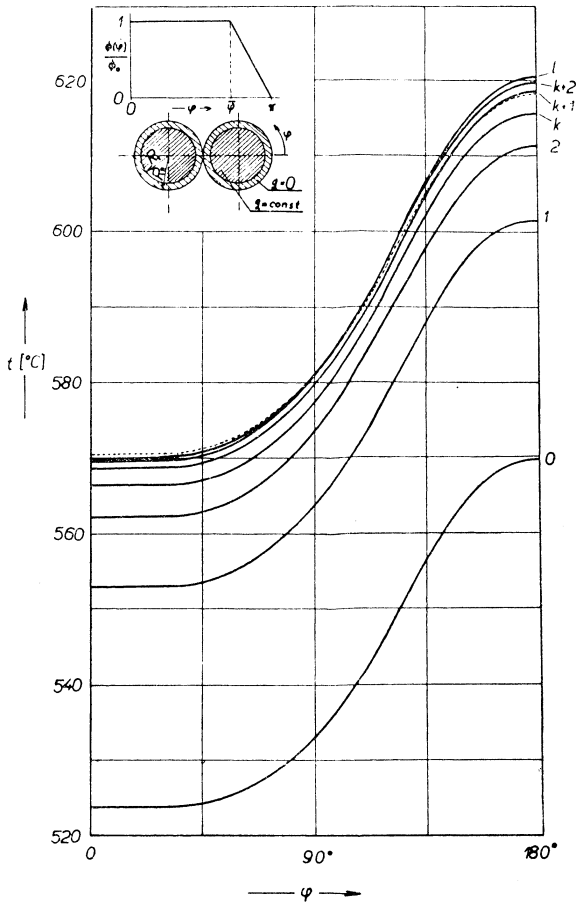
$$\alpha(\varphi, t, t_2) = \Phi(\varphi) \left(\frac{t}{t_2} \right)^{-0,55},$$

kde $\Phi(\varphi)$ má tvar (stejně jako v [6])

$$\frac{\Phi(\varphi)}{\Phi_0} = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq \varphi < \bar{\varphi}, \\ \frac{\pi}{\pi - \varphi} - \frac{\varphi}{\pi - \varphi} & \text{pro } \bar{\varphi} \leq \varphi < \pi. \end{cases}$$

Ponecháme-li v rozvoji (35) pouze jeden člen, je okrajová podmínka na poloměru R_2 (vnější poloměr povlaku) dána vztahem (viz (31))

$$(51) \quad \left. \frac{\partial t_2}{\partial r} \right|_{r=R_2} + a(\varphi) [t_2(R_2, \varphi) - t_2] = 0,55 \cdot a(\varphi) \frac{[t_2(R_2, \varphi) - t_2]^2}{t_2},$$



Obr. 6. Průběh povrchové teploty prutu palivového článku (0 – povrchová teplota při zanedbání vlivu teploty na α , 1, 2, ... – povrchová teplota při jednotlivých iteracích, l – výsledný průběh povrchové teploty, průběh povrchové teploty při přibližném výpočtu ($R_1 = 4$ mm, $R_2 = 5$ mm, $\alpha_2 = 4000$ kcal/m²h°C, $\lambda_1 = 20$ kcal/mh°C, $\lambda_2 = 138$ kcal/mh°C, $q = 10^{-4}$ m²h°C/kcal, $q = 3,75$ kcal/m³h).

kde

$$a(\varphi) = \frac{\Phi(\varphi)}{\lambda_2}.$$

Postupujeme-li dle odstavce 3.3 a 4.1, dostáváme rovnice

$$(52) \quad (\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) \mathbf{C}_2^{(m)} = \mathbf{K}_a \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_2^{(m-1)},$$

$$(53) \quad \mathbf{N}_2^{(m-1)} = \begin{cases} \mathbf{0} & (m = 0), \\ 0,55 \mathbf{K}_{a_2} (\mathbf{K}_{T_2}^{-1} \mathbf{K}_{T(R_2)} - \mathbf{I}) (\mathbf{T}_{(R_2)} - \mathbf{T}_2) & (m = 1, 2, \dots), \end{cases}$$

$$(54) \quad \mathbf{C}_2^{(m)} = {}_4 \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{C}_1^{(m)} + {}_4 \mathbf{F}_{1,2}.$$

Dosadíme-li za $\mathbf{C}_2^{(m)}$ z rovnice (54) do (52), můžeme vypočítat nulté přiblížení vektoru \mathbf{C}_1 z rovnice

$$(55) \quad (\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) {}_4 \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{C}_1^{(0)} = \mathbf{K}_{a_2} \mathbf{T}_2 - (\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) {}_4 \mathbf{F}_{1,2},$$

dále určíme $\mathbf{C}_2^{(0)}$ z (54), vektor $\mathbf{N}_2^{(0)}$ pomocí (53), takže pro výpočet $\mathbf{C}_1^{(1)}$ dostáváme rovnici

$$(56) \quad (\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) {}_4 \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{K}_{a_2} \mathbf{T}_2 + \mathbf{N}_2^{(0)} - (\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) {}_4 \mathbf{F}_{1,2}.$$

Odečteme-li rovnici (55) od (56), dostáváme pro určení vektoru

$$\Delta \mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{C}_1^{(1)} - \mathbf{C}_1^{(0)}$$

rovnici

$$(\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) {}_4 \mathbf{M}_{1,2} \Delta \mathbf{C}_1^{(1)} = \mathbf{N}_2^{(0)}.$$

Obdobně postupujeme dále; na základě přiblížení $m-1$ pro \mathbf{C}_1 vypočteme z (54) a (53) přiblížení $m-1$ pro \mathbf{C}_2 , $\mathbf{N}_2^{(m-1)}$ a m -té přiblížení dle vztahu

$$\mathbf{C}_1^{(m)} = \mathbf{C}_1^{(0)} + \Delta \mathbf{C}_1^{(m)},$$

kde vektor $\Delta \mathbf{C}_1^{(m)}$ je řešením rovnice

$$(\mathbf{K}_{a_2 \ 1} \mathbf{M}_2 + {}_2 \mathbf{M}_2) {}_4 \mathbf{M}_{1,2} \Delta \mathbf{C}_1^{(m)} = \mathbf{N}_2^{(m-1)}.$$

Průběh teploty na poloměru R_2 je v závislosti na úhlu φ vyneseno na obr. 6 pro jednotlivé iterace. Ukazuje se, že pro daný případ dvojnásobné použití extrapolace Aitkenovou metodou postačí k určení dostatečně přesného výsledku. Výpočet je možno v případech, kdy se povrchová teplota po obvodu příliš nemění poněkud zjednodušit. Určíme-li řešením rovnice

$$t_s = t_2 + \frac{R_1^2 q}{2R_2 \Phi_s \left(1 - 0,55 \frac{t_s - t_2}{t_2}\right)}$$

střední povrchovou teplotu t_s , dostáváme pro průběh součinitele přestupu tepla přibližný vztah

$$\alpha(\varphi) = \Phi(\varphi) \left(1 - 0,55 \frac{t_s - t_2}{t_2} \right)$$

a řešením rovnice (55) přibližný průběh teplotního pole. Na obr. 6 je povrchová teplota určená zjednodušeným výpočtem vynesena tečkovaně.

Příklad 2.

Určíme teplotní pole elementu prutového palivového článku pro případ, kdy respektujeme nerovnoměrné rozložení tepelného výkonu po průřezu. Jestliže je uvažovaný prut na obvodu svazku, lze rozložení tepelných zdrojů přibližně uvažovat ve tvaru (k_1, k_2 známé konstanty)

$$(57) \quad q = q_s \frac{1 + k_1 r^2}{1 + \frac{1}{2} k_1 R^2} (1 + k_2 r \cos \varphi).$$

Předpokládáme, že palivo je v keramické formě, pro které bývá závislost tepelné vodivosti na teplotě udávána ve tvaru

$$\lambda_1 = \frac{c}{t} \quad (t \text{ [}^\circ\text{K]}).$$

Upravou dostaneme

$$(58) \quad \lambda_1 = \lambda_{01} + \lambda_{11},$$

kde

$$\lambda_{01} = \frac{c}{t_{s0}},$$

$$\lambda_{11} = c \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t_{s0}} \right)$$

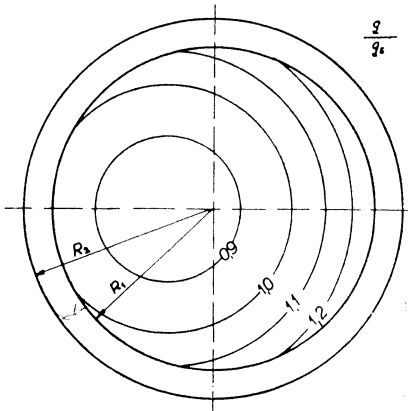
a kde t_{s0} je odhadnutá povrchová teplota paliva. Předpokládejme, že mezi palivem a povlakem (pro který bereme $\lambda_2 = \text{const.}$) je malá mezera vyplněná heliem. Odhadneme předběžným výpočtem střední teplotu helia t_{He} a položíme $\lambda_{\text{He}} = \text{const.}$ Uvažujeme-li, že chladivem je kapalina ($t_2 = \text{const.}$) lze v případě, kdy předpokládáme slabou závislost teploty povlaku na azimutálním úhlu považovat součinitel přestupu tepla za nezávislý na teplotě.

Podmínky pro určení nultého přiblížení teplotního pole jsou popsány rovnicemi (43) a (38) nebo (48) a (49). Dosadíme-li za $\mathbf{C}_2^{(0)}$ z (49) do (48) dostáváme rovnici pro $\mathbf{C}_1^{(0)}$ ve tvaru

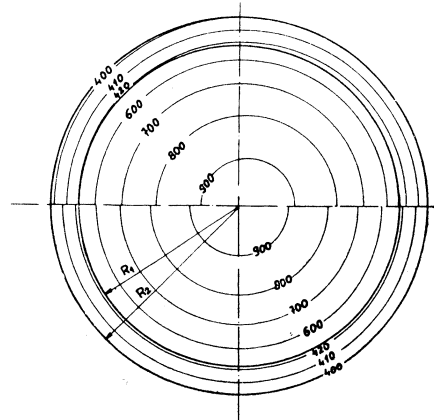
$$(59) \quad (\alpha_2 \mathbf{1} \mathbf{M}_2 + \lambda_2 \mathbf{2} \mathbf{M}_2) \mathbf{4} \mathbf{M}_{1,2} \mathbf{C}_1^{(0)} = \alpha_2 \mathbf{T}_2 - (\alpha_2 \mathbf{1} \mathbf{M}_2 + \lambda_2 \mathbf{2} \mathbf{M}_2) \mathbf{4} \mathbf{F}_{1,2}^{(0)}.$$

Řešením dostaneme $\mathbf{C}_1^{(0)}$, pomocí (49) $\mathbf{C}_2^{(0)}$, z (21') $\mathbf{q}^{(1)}$, dále vypočteme $\mathbf{P}_1^{(0)}$, $\mathbf{Q}_1^{(0)}$, $4\mathbf{F}_{1,2}^{(1)}$ a z rovnice (59) prvé přiblížení pro \mathbf{C}_1 . Obdobně postupujeme u dalších přiblížení.

Rozložení tepelných zdrojů na naznačeno na obr. 7. Teplotní pole je vyneseno na horní polovině obr. 8. Vzhledem k tomu, že výsledky třetí iterace se od hodnot druhé iterace téměř neliší, nebylo více iterací počítáno. Na dolní polovině je pro srovnání ukázáno teplotní pole pro případ, kdy q nezávisí na azimutálním úhlu.



Obr. 7. Rozložení tepelných zdrojů v periferním prutu ($k_1 = 0,3 \text{ l/m}^2$, $k_2 = 35,2 \text{ l/m}$, $R_1 = 4,25 \text{ mm}$, $R_2 = 5 \text{ mm}$; viz rovnici (57)).



Obr. 8. Teplotní pole periferního palivového prutu ($R_1 = 4,25 \text{ mm}$, $R_1' = 4,29 \text{ mm}$, $R_2 = 5 \text{ mm}$, $\lambda_{He} = 0,26 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, $\lambda_2 = 20 \text{ kcal/mh}^\circ\text{C}$, $c = 3400 \text{ kcal/mh}$, $q_s = 3,32 \text{ kcal/m}^3\text{h}$, $t_2 = 340^\circ\text{C}$, $\alpha_2 = 10\,000 \text{ kcal/m}^2\text{h}^\circ\text{C}$); horní polovina obr.: tepelné zdroje jsou funkcí r a φ (viz obr. 6); dolní polovina obr.: tepelné zdroje nezávisí na φ .

6. ZÁVĚR

Předložená práce rozšiřuje výsledky práce [6] pro případ, kdy součinitel tepelné vodivosti, kontaktní odpor na rozhraní dvou prostředí a součinitel přestupu tepla slabě závisí na teplotě.

Nelineární rovnice tepla byla řešena iteračním postupem tak, že se nelineární členy považují za známé, určené na základě předcházející iterace. Obdobně byly řešeny okrajové úlohy. Maticové vyjádření rovnic umožnilo nejen stručný zápis výpočtových vztahů, ale i poměrně jednoduchý numerický výpočet.

Při konkrétním výpočtu, kdy závislost α , λ , ϱ na teplotě je slabá, postačí počítat většinou tři až čtyři iterace. V prakticky v úvahu přicházejících případech závisí obvykle pouze některý z parametrů α , λ , ϱ na teplotě, takže výpočet není časově zvláště náročný.

Autor považuje za svou povinnost poděkovat s. ing. Václavu Stachovi CSc. za cenné rady a podnětné návrhy které mu poskytl při práci na uvedené úloze.

Literatura

- [1] Crank J.: The Mathematics of Diffusion; Oxford 1956.
- [2] Carslaw H. S., Jaeger J. C.: Conduction of Heat in Solids; Oxford 1959.
- [3] Березин И. С., Жидков Н. П.: Методы вычислений; Физматгиз, Москва 1960.
- [4] Кутателадзе С. С., Боршанский В. М.: Справочник по теплопередаче; Госэнергоиздат, Москва-Ленинград 1958.
- [5] Михеев М. А.: Основы теплопередачи; Госэнергоиздат, Москва-Ленинград 1958.
- [6] Schmid J.: Teplotní pole válcově souměrných prostředí se zdroji tepla libovolného průběhu při okrajových podmínkách proměnných po obvodu. Aplikace matematiky 1962, č. 5.

Резюме

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ПО ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧЕСКИХ СРЕД С МАЛЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

ЙОСЕФ ШМИД (Josef Schmid)

В некоторых отраслях, например, при исследовании температурного поля тепловыделяющих элементов ядерных реакторов, встречаются задачи, требующие решить уравнение теплопроводности, соблюдая зависимость коэффициента теплопроводности от температуры, или такие задачи, что при решении краевых задач коэффициент теплоотдачи или контактное сопротивление на границе двух сред являются функциями температуры.

Уравнение теплопроводности в цилиндрической геометрии

$$(1) \quad - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \right] = q(r, \varphi)$$

было сведено при помощи выражения

$$(2) \quad \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1(t)$$

к виду

$$(3) \quad - \lambda_0 \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right] = q(r, \varphi) + \lambda_1(t) \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{d\lambda_1}{dt} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

Если мы предполагаем, что вклад нелинейностей, т.е. второго и третьего членов в правой части уравнения (3) небольшой, мы можем искать решение итерационным способом. После оформления уравнения (3) мы получаем

$$(4) \quad \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial \varphi^2} = -q^{(m)},$$

где

$$q^{(0)} = \frac{1}{\lambda_0} q(r, \varphi) \quad (m = 0),$$

$$q^{(m)} = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ q(r, \varphi) - \lambda_1(t^{(m-1)}) q^{(m-1)} + \frac{d\lambda_1}{dt} \Big|_{t=t^{(m-1)}} \left[\left(\frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\} \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Решение уравнения (4) имеет форму

$$(5) \quad t^{(m)} = A_0^{(m)} + B_0^{(m)} \lg r + Z_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^{(m)} r^n + B_n^{(m)} r^{-n} + C_n^{(m)}) \cos n\varphi + (C_n^{(m)} r^n + D_n^{(m)} r^{-n} + Z_n^{(m)}) \sin n\varphi],$$

где

$${}^i Z_n^{(m)} = -r^n \int_{r_0}^r r'^{-(2n+1)} \int_{r'_0}^{r'} (r'')^{n+1} {}^i \bar{q}_n^{(m)}(r'') dr'' dr', \quad e = \begin{cases} c & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ s & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

и где ${}^i \bar{q}_n^{(m)}(r)$ — коэффициенты фурье функции $q^{(m)}$.

Нелинейные краевые условия были оформлены аналогичным способом, как уравнение (1); например, для третьего типа краевого условия формы

$$(6) \quad -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha(\varphi, t, t_R) [t(R, \varphi) - t_R(\varphi)]$$

мы получаем, применяя отношения (2) и выражения

$$\alpha(\varphi, t, t_R) = \Phi(\varphi) [1 + F(t, t_R)],$$

уравнение

$$(7) \quad \lambda_0 \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=R} + \Phi(\varphi) [t^{(m)}(R, \varphi) - t_R(\varphi)] = -\Phi(\varphi) F(t^{(m-1)}, t_R) [t^{(m-1)}(R, \varphi) - t_R(\varphi)] - \lambda_1(t^{(m-1)}) \frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \Big|_{r=R},$$

которое мы опять решим итерационным способом.

По периметру переменные краевые условия были разложены в ряды Фурье и при решении краевых задач было применено матричное исчисление. Наружные краевые условия можно написать в форме (смотри тоже [6])¹⁾

$$(8) \quad {}_k \mathbf{M} \mathbf{C}^{(m)} = {}_k \mathbf{F}^{(m)}.$$

При решении температурного поля систем, состоящих из большого количества слоев, необходимо прежде всего исключить интеграционные постоянные промежуточных полос с помощью условий на границе двух сред, которые можно выразить следующим образом:

$$(9) \quad \mathbf{C}_l^{(m)} = {}_4 \mathbf{M}_{l-1,l} \mathbf{C}_{l-1}^{(m)} + {}_4 \mathbf{F}_{l-1,l}^{(m)}.$$

Можно ожидать, что приведенный метод будет сходиться, пока нелинейности, вызванные соблюдением зависимости функций λ , α , ρ от температуры, не будут большими.

Summary

SOLUTION OF SOME PROBLEMS CONCERNING HEAT CONDUCTION IN CYLINDRICAL SYMMETRIC BODIES WITH SMALL NONLINEARITIES

JOSEF SCHMID

A heat conduction boundary problem with temperature dependent heat conduction coefficient and with nonlinear boundary conditions of the third and fourth type, i.e. with temperature dependent heat transfer coefficient or with temperature dependent contact resistance on the interface of two media, is solved.

The heat conduction equation in cylindrical coordinates

$$(1) \quad - \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \lambda \frac{\partial t}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\lambda \frac{\partial t}{\partial \varphi} \right) \right] = q(r, \varphi)$$

was transformed using the expression

$$(2) \quad \lambda(t) = \lambda_0 + \lambda_1(t)$$

into the form

$$(3) \quad -\lambda_0 \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right] = q(r, \varphi) + \lambda_1(t) \left[\frac{\partial^2 t}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t}{\partial \varphi^2} \right] + \frac{d\lambda_1}{dt} \left[\left(\frac{\partial t}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial t}{\partial \varphi} \right)^2 \right].$$

¹⁾ Вектор $\mathbf{C}^{(m)}$ содержит постоянные интегрирования $A_0^{(m)}, B_0^{(m)}, A_1^{(m)}, B_1^{(m)}, C_1^{(m)}, D_1^{(m)}, \dots$, ${}_k \mathbf{M}$ — матрица и ${}_k \mathbf{F}^{(m)}$ — вектор.

If we suppose that the contribution of the nonlinearities, i.e. the second and third term on the right side of (3) is small, we can find the solution using an iterative process. After rearrangement of (3) we obtain

$$(4) \quad \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 t^{(m)}}{\partial \varphi^2} = -q^{(m)},$$

where

$$q^{(0)} = \frac{1}{\lambda_0} q(r, \varphi) \quad (m = 0),$$

$$q^{(m)} = \frac{1}{\lambda_0} \left\{ q(r, \varphi) - \lambda_1 (t^{(m-1)}) q^{(m-1)} + \frac{d\lambda_1}{dt} \Big|_{t=t^{(m-1)}} \left[\left(\frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial \varphi} \right)^2 \right] \right\}$$

$$(m = 1, 2, \dots).$$

The solution of the equation has the form

$$(5) \quad t^{(m)} = A_0^{(m)} + B_0^{(m)} \lg r + {}^c Z_0^{(m)} + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n^{(m)} r^n + B_n^{(m)} r^{-n} + {}^c Z_n^{(m)}) \cos n\varphi + (C_n^{(m)} r^n + D_n^{(m)} r^{-n} + {}^s Z_n^{(m)}) \sin n\varphi],$$

where

$${}^l Z_n^{(m)} = -r^n \int_{r_0}^r r'^{-(2n+1)} \int_{r'_0}^{r'} (r'')^{n+1} {}^l \bar{q}_n^{(m)}(r'') dr'' dr', \quad l = \begin{cases} c & (n = 0, 1, 2, \dots) \\ s & (n = 1, 2, 3, \dots) \end{cases}$$

and where ${}^l \bar{q}_n^{(m)}(r)$ are the Fourier coefficients of the function $q^{(m)}$.

The boundary conditions with small nonlinearities can be expressed in a similar way; for example the boundary condition of the third type, which has the form

$$(6) \quad -\lambda(t) \frac{\partial t}{\partial r} \Big|_{r=R} = \alpha(\varphi, t, t_R) [t(R, \varphi) - t_R(\varphi)]$$

can be written, using (2) and also

$$\alpha(\varphi, t, t_R) = \Phi(\varphi) [1 + F(t, t_R)],$$

as

$$(7) \quad \lambda_0 \frac{\partial t^{(m)}}{\partial r} \Big|_{r=R} + \Phi(\varphi) [t^{(m)}(R, \varphi) - t_R(\varphi)] = -\Phi(\varphi) F(t^{(m-1)}, t_R) [t^{(m-1)}(R, \varphi) - t_R(\varphi)] - \lambda_1 (t^{(m-1)}) \frac{\partial t^{(m-1)}}{\partial r} \Big|_{r=R}.$$

Equation (7) can be solved by a similar iterative process.

The boundary conditions varying along the perimeter were expanded in Fourier series and the boundary problems were solved using matrix calculation. The external boundary conditions may be written (see also [6])¹⁾ in the form

$$(8) \quad {}_k \mathbf{M} \mathbf{C}^{(m)} = {}_k \mathbf{F}^{(m)}.$$

When solving the temperature field in systems consisting of more layers, it is necessary to eliminate the integration constants of the intermediate zones using the conditions on the boundary of two layers, which may be expressed in the form

$$(9) \quad \mathbf{C}_l^{(m)} = {}_4 \mathbf{M}_{l-1,l} \mathbf{C}_{l-1}^{(m)} + {}_4 \mathbf{F}_{l-1,l}^{(m)}.$$

It may be expected that the iterative process will converge, if the nonlinearities caused by respecting the temperature dependence of the values λ , α , ϱ are small.

Adresa autora: Ing. Josef Schmid, Ústav jaderného výzkumu ČSAV, Řež.

¹⁾ The vector $\mathbf{C}^{(m)}$ contains the integration constants $A_0^{(m)}, B_0^{(m)}, A_1^{(m)}, B_1^{(m)}, C_1^{(m)}, D_1^{(m)}, \dots$, ${}_k \mathbf{M}$ is a matrix and ${}_k \mathbf{F}^{(m)}$ is a vector.