Zbigniew Wesołowski
Rovinný problém ztráty stability v tahu

Aplikace matematiky, Vol. 10 (1965), No. 1, 1–14

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102930

ROVINNÝ PROBLÉM ZTRÁTY STABILITY V TAHU

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI

(Došlo dne 17. ledna 1963.)

Vyšetřuje se otázka stability ortotropního prutu. Dokazuje se, že v případě, kdy se délka prutu blíží nekonečnu, nastává ztráta stability tehdy, když tahová síla dosahuje maxima.

V posledních letech se objevila řada prací věnovaýnch problému ztráty stability pružných těles při konečném přetvoření. Metoda, které bylo přitom používáno, spočívala na zkoumání možnosti existence rovnováhy v sousedních polohách. Otázkou správnosti takové metody se zabývá práce GUO ZHONG-HENGA a W. URBANOWSKÉHO [4].

V této práci se vyšetřuje otázka stability pravoúhlého hranolu při konečném protažení. O hmotě se předpokládá, že je pružná a ortotropická o zcela obecné fysikální povaze. Analogická otázka pro případ, kdy hmota je pružná, isotropická a nestlačitelná byla řešena v práci [5].

1. DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PROBLÉMU

1.1. Počáteční stav konečného přetvoření

Hranol o délce $\overset{0}{l}$, šířce $2\overset{0}{h}$ a tloušťce $2\overset{0}{b}$, označený dále jako těleso $\overset{0}{B}$, zůstává v rovinném stavu přetvoření. Tento hranol je podroben počátečnímu prodloužení ve směru rozměrů $\overset{0}{l}$ a $\overset{0}{h}$. Vlivem tohoto prodloužení se příslušné rozměry změní na

$$l = \lambda_1 \overset{0}{l}\,, \quad h = \lambda_2 \overset{0}{h}\,, \tag{1.1}$$

kde λ_1 a λ_2 jsou parametry charakterisující velikost prodloužení. Těleso s takovým počátečním přetvořením označíme symbolem B. Zkoumání stability tělesa B je předmětem této práce.

Uvažujme případ, kdy hmota je pružná a ortotropická nejobecnější fysikální povahy a směry ortotropie se shodují se směry hran hranolu. Případ isotropické hmoty je obsažen v předcházejícím problému jako zvláštní případ. V první části práce budeme uvádět vzorce týkající se tohoto případu souběžně se vzorci pro hmotu ortotropickou; vzorec a rovnice uvedené v dalších částech mají obecný charakter a platí pro oba případy.

Otázka stanovení napjatosti, vyvolané popsaným počátečním přetvořením, je v literatuře podrobně zpracována (viz např. [2] a [5]). Omezíme se zde na uvedení konečných výsledků.

Sestrojíme-li v tělese B s počátečním přetvořením kartézkou soustavu souřadnic $(\Theta^1, \Theta^2, \Theta^3) = (x, y, z)$ takovou, že hranol je omezen rovinami

$$x = 0; l, \quad y = \pm h, \quad z = \pm \overset{0}{b} \tag{1.2}$$

a souřadnice budeme pokládat za spojené s přetvářením tělesem, jsou metrický tensor $\overset{0}{g}_{ij}$ v $\overset{0}{B}$ a metrický tensor g_{ij} v B určeny rovnicemi

$$(1.3) \qquad \overset{0}{g}_{ij} = \lambda_i^{-2}\delta_{ij}, \qquad \text{(nesčítat!)},$$

$$g_{ij} = \delta_{ij};$$

kde parametr λ_3 je určen vztahem $\lambda_3 \equiv 1$. V dalších vzorcích budeme používat tohoto parametru všude tam, kde dává vzorcům souměrný tvar nebo kde umožňuje cyklickou záměnu indexů.

Stav přetvoření tělesa B je charakterisován tensorem přetvoření γ_{ij}

$$(1.4) \qquad \gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2})\,\delta_{ij}, \qquad \text{(nesčítat!)},$$

jehož invarianty I_k a fysikální složky $\gamma_{(ij)}$ jsou

$$(1.5) \quad I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2, \quad I_2 = \lambda_1^2\lambda_2^2 + \lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2, \quad I_3 = \lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2,$$

$$(1.6) \qquad \gamma_{(ij)} = (g_{ii}g_{jj})^{-\frac{1}{2}}\,\gamma_{ij} = \tfrac{1}{2}(1 - \lambda_i^{-2})\,\delta_{ij} \qquad \text{(nesčítat!)}.$$

Předchozí vztahy plně určují přetvoření tělesa B. Nyní přistoupíme k určení napjatosti v tomto tělese.

V případě ortotropického tělesa s ortotropií spojenou s uvedenou soustavou souřadnic je pružný potenciál W, vztažený na jednotku objemu nepřetvořeného tělesa $\overset{0}{B}$, funkcí šesti veličin $\Gamma_{(ij)}$ definovaných vztahy

$$(1.7) \qquad \Gamma_{(ii)} = \gamma_{(ii)}, \quad \text{(nesčítat!)},$$

$$\Gamma_{(ij)} = \Gamma_{(ji)} = \gamma_{ij}^2, \quad i \neq j,$$

a invariantu I_3 stavu přetvoření

$$W = W(\Gamma_{(11)}, \Gamma_{(22)}, \Gamma_{(33)}, \Gamma_{(23)}, \Gamma_{(31)}, \Gamma_{(12)}, I_3). \tag{1.8}$$

Napjatost v tělese B je charakterisována tensorem napětí τ^{ij}. Složky tohoto tensoru pro uvažované těleso jsou určeny rovnostmi

$$(1.9) \qquad \begin{aligned} \tau^{ii} &= \lambda_i^2 H_{(ii)} + p \,, \qquad \text{(nesčítat!)},\\ \tau^{ij} &= 0 \,, \quad i \neq j \,, \end{aligned}$$

kde veličiny $H_{(ij)}$ a p jsou dány vztahy

$$(1.10) \qquad H_{(ij)} = \frac{1}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial \Gamma_{(ij)}} \,, \quad p = 2\sqrt{I_3} \frac{\partial W}{\partial I_3} \,.$$

Vztahy (1.9) a (1.10) popisují napjatost v isotropickém tělese jakožto zvláštní případ. V tomto případě je pružný potenciál W funkcí pouze invariantů stavu přetvoření

$$(1.11) \qquad W = W(I_3, I_2, I_3)$$

a veličiny $H_{(ij)}$ jsou určeny vztahy

$$(1.12) \qquad \begin{gathered} H_{(11)} = \Phi + (\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,\Psi \,, \quad H_{(22)} = \Phi + (\lambda_3^2 + \lambda_1^2)\,\Psi \,, \\ H_{(33)} = \Phi + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,\Psi \,, \\ \Phi = \frac{2}{\sqrt{I_3}} \frac{\partial W}{\partial I_1} \,, \quad \Psi = \frac{2}{\sqrt{I_{23}}} \frac{\partial W}{\partial I_2} \,. \end{gathered}$$

V případě, kdy těleso B je stejnorodé, splňuje uvedený tensor τ^{ij} identicky rovnice rovnováhy. Další úvahy omezujeme pouze na tento případ.

1.2. Přídavné malé přetvoření

Počátečně přetvořenému tělesu B popsanému v předcházejícím oddíle bude uděleno pole malých posunů $\varepsilon \mathbf{w}$. Těleso B přitom přejde v stav $\overset{*}{B}$, blízký stavu B. Obecnou teorii takového přetvoření ve vztahu v tělesu původně isotropickému vypracovali A. E. Green, R. S. Rivlin a R. T. Shield [1]. Ve vztahu k tělesu původně ortotropickému podal příslušné závislosti W. Urbanowski [2].

Omezíme se zde na vzorce, které se týkají přidání pole malých přetvoření tělesu, které bylo na počátku přetvořeno popsaným způsobem. Příslušné obecné rovnice a také podrobnější výpočty je možno najít v práci [3] (pro těleso původně isotropické) a v práci [2] (pro těleso původně ortotropické).

Vlivem přídavného přetvoření změní se složky τ^{ij} tensoru napětí o jisté přírůstky. Lineární části těchto přírůstků označíme příslušným symbolem s čárkou nahoře. Označíme-li u a v příslušné kovariantní složky w_1 a w_2 vektoru $\mathbf{w}$, platí

$$(1.13) \qquad \begin{aligned} &\tau'^{11} = c_{11}u_x + c_{12}v_y \,, \quad \tau'^{22} = c_{21}u_x + c_{22}v_y \,, \\ &\tau'^{33} = c_{31}u_x + c_{32}v_y \,, \quad \tau'^{12} = \tau'^{21} = c_{66}(u_y + v_x) \,, \\ &\tau'^{23} = \tau'^{32} = \tau'^{13} = \tau'^{31} = 0 \,. \end{aligned}$$

Veličiny c_{ij} se počítají pro stav B a mají hodnoty

$$(1.14)\quad c_{11} = \frac{\lambda_1^3}{\lambda_2\lambda_3} C_{(1111)} + 4\lambda_1^3\lambda_2\lambda_3 C_{(11)} + 4\lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^3 C_{(0)} - \lambda_1^2 H_{(11)} - p\,,$$

$$c_{12} = \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_3} C_{(1122)} + 2\lambda_1\lambda_2\lambda_3(\lambda_1^2 C_{(11)} + \lambda_2^2 C_{(22)}) + 4\lambda_1^3\lambda_2^3\lambda_3^3 C_{(0)} - \lambda_1^2 H_{(11)} + p\,,$$

$$c_{66} = \lambda_1^2\lambda_2^2 H_{(12)} - p\,, \quad c_{12} + \tau^{11} = c_{22} + \tau^{22}\,,$$

kde

$$(1.15)\qquad C_{(ijkl)} = \frac{\partial^2 W}{\partial \Gamma_{(ij)}\,\partial \Gamma_{(kl)}}\,, \quad C_{(ij)} = \frac{\partial^2 W}{\partial \Gamma_{(ij)}\,\partial I_3}\,, \quad C_{(0)} = \frac{\partial^2 W}{\partial I_3^2}\,.$$

Pro isotropické těleso jsou veličiny c_{ij} dány výrazy

$$(1.16)\quad c_{11} = 2\lambda_1^4 A_{(11)} + 2\lambda_1^4(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,A_{(22)} + 2\lambda_1^4\lambda_2^4\lambda_3^4 A_{(33)} + 4\lambda_1^4\lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,A_{(23)} + 4\lambda_1^4\lambda_2^2\lambda_3^2 A_{(31)} + 4\lambda_1^4(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)\,A_{(12)} - \lambda_1^2 H_{(11)} - p\,,$$

$$c_{12} = 2\lambda_1^2\lambda_2^2 A_{(11)} + 2\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_2^2 + \lambda_3^2)(\lambda_3^2 + \lambda_1^2)\,A_{(22)} + 2\lambda_1^4\lambda_2^4\lambda_3^4 A_{(33)} + 2\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_2^2\lambda_3^2 + \lambda_3^2\lambda_1^2 + 2\lambda_1^2\lambda_2^2)\,A_{(23)} + 2\lambda_1^2\lambda_2^2\lambda_3^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)\,A_{(31)} + 2\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + 2\lambda_3^2)\,A_{(12)} - \lambda_1^2\Phi - \lambda_1^2(\lambda_3^2 - \lambda_2^2)\,\Psi + p\,,$$

$$c_{66} = -\lambda_1^2\lambda_2^2\Psi - p\,, \quad c_{12} + \tau^{11} = c_{21} + \tau^{22}\,,$$

kde

$$(1.17)\qquad A_{(ij)} = \frac{2}{\sqrt{I_3}}\,\frac{\partial^2 W}{\partial I_i\,\partial I_j}\,.$$

Výrazy pro ostatní veličiny c_{ij} můžeme dostat ze vztahů (1.14) a (1.16) cyklickou záměnou indexů u parametrů λ_i a u veličin $H_{(ij)}$.

Další úvahy budou vycházet ze vztahů (1.13), které platí jak pro hmotu isotropickou tak i pro látku ortotropickou. Dále nebudeme uvádět, kterou hmotu máme na mysli. Kvalitativní vztahy, které budou dále odvozeny, platí pro oba typy hmot s podmínkou, že při podrobných výpočtech by bylo třeba do jednotlivých vztahů dosadit příslušné výrazy pro c_{ij}.

Rovnice rovnováhy tělesa B jsou

$$(1.18)\qquad \nabla_r \tau^{rj} + \Gamma'^{r}_{rs}\tau^{sj} + \Gamma'^{j}_{js}\tau^{rs} = 0\,,$$

kde Γ'^{i}_{jh} jsou lineárními částmi přírůstků Christoffelových symbolů

$$(1.19)\qquad \Gamma'^{i}_{jk} = \nabla_j \nabla_k w^i\,.$$

Dosadíme-li veličiny τ'^{ij} z (1.13) do rovnic rovnováhy (1.18), dostáváme nakonec

$$(1.20) \qquad \begin{aligned} &(c_{11} + 2\tau^{11})\, u_{xx} + (c_{66} + \tau^{22})\, u_{yy} + (c_{12} + c_{66} + \tau^{11})\, v_{xy} = 0\,, \\ &(c_{66} + c_{21} + \tau^{22})\, u_{xy} + (c_{66} + \tau^{11})\, v_{xx} + (c_{22} + 2\tau^{22})\, v_{yy} = 0\,. \end{aligned}$$

Předpokládáme, že v stavu B, jakož i v stavu $\overset{\Delta}{B}$ je hranol zatížen tím způsobem, že jeho dvě stěny $x = 0;\ l$ zůstávají rovinné a že jsou zatíženy jedině zatížením k nim kolmým a ostatní dvě stěny $y = \pm h$ jsou bez zatížení. Tyto předpoklady vedou k těmto okrajovým podmínkám

$$(1.21) \qquad \begin{aligned} \tau^{12} &= 0 \quad \text{na} \quad x = 0;\, l\,, \\ \tau^{21} = \tau^{22} &= 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,; \end{aligned}$$

$$(1.22) \qquad \begin{aligned} \tau'^{12} &= 0 \quad \text{na} \quad x = 0;\, l\,, \\ \tau'^{12} = \tau'^{22} &= 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,; \end{aligned}$$

$$(1.23) \qquad u = 0 \quad \text{na} \quad x = 0;\, l\,.$$

Okrajové podmínky (1.21) pro nediagonální složky tensoru τ^{ij} jsou splněny identicky a podmínka pro složku τ^{22} je pak

$$(1.24) \qquad \lambda_2^2 H_{(22)} + p = 0\,.$$

Tato podmínka určuje jistý vztah mezi prodloužením λ_1 a λ_2. V dalších částech práce budeme všude pokládat prodloužení λ_2 za funkci parametru λ_1.

Podmínky (1.22) se vzhledem k vztahům (1.13) dají napsat v tomto konečném tvaru

$$(1.25) \qquad \begin{aligned} u_y + v_x &= 0 \quad \text{na} \quad x = 0;\, l\,, \\ u_y + v_x &= 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,, \\ c_{21} u_x + (c_{22} + 2\tau^{22})\, v_y &= 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,. \end{aligned}$$

Uvažovaný problém vede tedy na problém vlastních hodnot určený homogenní rovnicí rovnováhy (1.20) a homogenními okrajovými podmínkami (1.23) a (1.25).

2. PODMÍNKA ZTRÁTY STABILITY

2.1. Rozvinutí v řadu

Hledáme řešení problému, formulovaného v předchozím oddíle, ve tvaru řady

$$(2.1) \qquad \begin{aligned} u &= \sum_{i=1}^{\infty} u_i\,, \quad u_i = \alpha_i(y) \sin \nu_i x + \alpha_i^*(y) \cos \nu_i x\,, \\ v &= \sum_{i=1}^{\infty} v_i\,, \quad v_i = \beta_i^*(y) \sin \nu_i x + \beta(y) \cos \nu_i x\,, \end{aligned}$$

kde ν_i jsou určitými parametry.

Dosadíme-li funkce u do okrajové podmínky (1.23), vidíme, že všechny funkce $\alpha_i^*(y) = 0$, podobně okrajová podmínka (1.22) ukazuje, že všechny funkce $\beta_i^*(y) = 0$.

Hledáme tedy řešení ve tvaru

$$u_i = \alpha_i(y) \sin \nu_i x , \quad v_i = \beta_i(y) \cos \nu_i x , \tag{2.2}$$

Dosadíme-li (2.2) do rovnic rovnováhy (1.20), dostáváme soustavu dvou obyčejných diferenciálních rovnic

$$\begin{gathered}(c_{66} + \tau^{22}) \frac{d^2\alpha_i}{dy^2} - \nu_i^2(c_{11} + 2\tau^{11})\, \alpha_i - \nu_i(c_{12} + c_{66} + \tau^{11}) \frac{d\beta_i}{dy} = 0 , \\ \nu_i(c_{21} + c_{66} + \tau^{22}) \frac{d\alpha_i}{dy} + (c_{22} + 2\tau^{22}) \frac{d^2\beta_i}{dy^2} - \nu_i^2(c_{66} + \tau^{11})\, \beta_i = 0 .\end{gathered} \tag{2.3}$$

Ze soustavy rovnic (2.3) můžeme vyloučit funkci

$$\begin{aligned}\alpha_i = &- \frac{1}{\nu_i^3} \cdot \frac{(c_{22} + 2\tau^{22})(c_{66} + \tau^{11})}{(c_{21} + c_{66} + \tau^{22})(c_{11} + 2\tau^{11})} \cdot \frac{d^3\beta_i}{dy^3} - \\ &- \frac{1}{\nu_i} \cdot \frac{(c_{12} + c_{66} + \tau^{11})^2 - (c_{66} + \tau^{11})(c_{66} + \tau^{22})}{(c_{11} + 2\tau^{11})(c_{12} + c_{66} + \tau^{22})} \cdot \frac{d\beta_i}{dy} ,\end{aligned} \tag{2.4}$$

což vede na jednu obyčejnou diferenciální rovnici

$$\frac{d^4\beta_i}{dy^4} - 2\nu_i^2 b \frac{d^2\beta_i}{dy^2} + \nu_i^4 c^2 \beta = 0 , \tag{2.5}$$

kde b a c^2 jsou konstantami, závislými jen na počátečním přetvoření a na hmotě, které se rovnají

$$\begin{aligned}2b &= \frac{c_{66} + \tau^{11}}{c_{22} + 2\tau^{22}} + \frac{c_{11} + 2\tau^{11}}{c_{66} + \tau^{22}} - \frac{(c_{12} + c_{66} + \tau^{11})(c_{21} + c_{66} + \tau^{22})}{(c_{66} + \tau^{22})(c_{22} + 2\tau^{22})} , \\ c^2 &= \frac{c_{66} + \tau^{11}}{c_{66} + \tau^{22}} \cdot \frac{c_{11} + 2\tau^{11}}{c_{22} + 2\tau^{22}} .\end{aligned} \tag{2.6}$$

Zde bylo zavedeno označení c^2, aby se docílilo určité souměrnosti dalších vzorců. Neznamená to však, že tento výraz je kladný.

Přejdeme nyní k dosazení funkce (2.2) do okrajových podmínek. Po dosazení do (1.23) dostáváme

$$\nu_i = \frac{n\pi}{l} = \frac{n\pi}{\lambda_1 \overset{0}{l}} , \tag{2.7}$$

kde n je libovolné přirozené číslo různé od nuly.

Případ $n = 0$ vede k napjatosti, která splňuje ne všechny okrajové podmínky. Aniž se omezí obecnost řešení, je možno vyloučit případ $n < 0$.

První z okrajových podmínek (1.22) splňují funkce (2.2) identicky, je-li splněna podmínka (2.7). Ostatní dvě podmínky (1.22) vedou k vztahům

$$\frac{d\alpha_i}{dy} - \nu_i \beta_i = 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,, \tag{2.8}$$

$$\nu_i c_{21} \alpha_i + (c_{22} + 2\tau^{22}) \frac{d\beta_i}{dy} = 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,,$$

odkud se zřetelem ke vztahu (2.4) nakonec vyplývá

$$\frac{d^2\beta_i}{dy^2} + \nu_i^2 s_1 \beta_i = 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,, \tag{2.9}$$

$$\frac{d^3\beta_i}{dy^3} + \nu_i^2 s_2 \frac{d\beta_i}{dy} = 0 \quad \text{na} \quad y = \pm h\,,$$

kde

$$s_1 = \frac{c_{12}}{c_{22} + 2\tau^{22}}\,, \quad s_2 = -2b - s_3\,, \quad s_3 = \frac{c_{11} + 2\tau^{11}}{c_{21}}\,. \tag{2.10}$$

Vyšetřovaný problém stability hranolu vedl tedy k hledání vlastních hodnot okrajové úlohy popsané obyčejnou diferenciální rovnicí (2.5) a okrajovými podmínkami (2.9).

2.2. Obecné řešení a podmínka ztráty stability

Charakteristická rovnice pro rovnici (2.5) [1])

$$r^4 - 2\nu^2 b r^2 + \nu^4 c^2 = 0 \tag{2.11}$$

má tyto kořeny

$$r_1 = -r_3 = \nu \sqrt{[b + \sqrt{(b^2 - c^2)}]}\,, \quad r_2 = -r_4 = \nu \sqrt{[b - \sqrt{(b^2 - c^2)}]}\,. \tag{2.12}$$

Tyto kořeny jsou v případě $b^2 \neq c^2$ všechny různé a pro $b^2 = c^2$ jsou vždy dva a dva stejné

$$r_1 = r_2 = \nu \sqrt{b}\,, \quad r_3 = r_4 = -\nu \sqrt{b}\,. \tag{2.13}$$

Případu $b = c = 0$ odpovídají čtyři stejné kořeny

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = 0\,. \tag{2.14}$$

Tento případ je triviální a nebudeme jej zde uvažovat.

---

[1]) Pro zjednodušení zápisu budeme dále vynechávat index i při ν, β a při dále zavedených veličinách r_k, C_k a D_k.

Omezíme se dále na případ, kdy přetvoření je souměrné vzhledem k rovině xz. Pro vyšetřovaný hranol namáhaný tahem nastává takový stav přetvoření právě ve chvíli ztráty stability. V souhlase s předchozími úvahami nás zajímají řešení, která splňují rovnosti

$$u(x, y) = u(x, -y), \quad v(x, y) = -v(x, -y). \tag{2.15}$$

Nutnou a postačující podmínkou pro splnění (2.15), jak vyplývá z (2.2) a (2.4), je splnění rovnice

$$\beta(y) = -\beta(-y). \tag{2.16}$$

V dalších úvahách je třeba vyšetřovat odděleně případ $b^2 \neq c^2$ a případ $b^2 = c^2$.

Případ $b^2 \neq c^2$

Zabývejme se nejdříve případem $b^2 \neq c^2$. Obecným řešením rovnice (2.5) je v tomto případě

$$\beta = C_1 e^{r_1 y} + C_2 r^{r_2 y} + C_3 e^{-r_1 y} + C_4 e^{-r_2 y}, \tag{2.17}$$

kde C_1, C_2, C_3 a C_4 jsou integrační konstanty. Toto řešení vyhovuje podmínce souměrnosti (2.16) pro $C_3 = -C_1$, $C_4 = -C_2$, odkud vyplývá

$$\beta = C_1 \sinh r_1 y + C_2 \sinh r_2 y. \tag{2.18}$$

Omezíme-li se na souměrné přetvoření, redukuje se počet okrajových podmínek (2.9) na dvě. Po dosazení funkce (2.18) do těchto podmínek vyplývá soustava algebraických rovnic

$$\begin{aligned} C_1(r_1^2 + v^2 s_1) \sinh r_1 h + C_2(r_2^2 + v^2 s_1) \sinh r_2 h &= 0, \\ C_1(r_1^2 + v^2 s_2)\, r_1 \cosh r_1 h + C_2(r_2^2 + v^2 s_2)\, r_2 \cosh r_2 h &= 0. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Soustava homogenních rovnic (2.19) má vždy triviální řešení $C_1 = C_2 = 0$, které odpovídá možnosti udělení nulového pole posunů tělesu B. Existuje též netriviální řešení soustavy (2.19), je-li její determinant roven nule. Tímto způsobem dostáváme podmínku ztráty stability[2])

$$\frac{(r_1^2 + v^2 s_1)(r_2^2 + v^2 s_2)}{(r_2^2 + v^2 s_1)(r_1^2 + v^2 s_2)} \frac{r_2 \operatorname{tgh} r_1 h}{r_1 \operatorname{tgh} r_2 h} = 1. \tag{2.20}$$

[2]) Jestliže se neomezíme na případ přetvoření souměrného vzhledem k rovině xz, dostáváme podmínku

$$\left[\frac{(r_1^2 + v^2 s_1)(r_2^2 + v^2 s_2)}{(r_2^2 + v^2 s_1)(r_1^2 + v^2 s_2)} \frac{r_2 \operatorname{tgh} r_1 h}{r_1 \operatorname{tgh} r_2 h} - 1\right] \cdot \left[\frac{(r_1^2 + v^2 s_1)(r_2^2 + v^2 s_2)}{(r_2^2 + v^2 s_1)(r_1^2 + v^2 s_2)} \frac{r_2 \operatorname{tgh} r_2 h}{r_1 \operatorname{tgh} r_1 h} - 1\right] = 0.$$

Nulová hodnota prvního členu odpovídá ztrátě stability při souměrném přetvoření $v(x, y) = -v(x, -y)$, nulová hodnota druhého členu ztrátě stability při antisymetrickém přetvoření $v(x, y) = v(x, -y)$.

Tato rovnice umožňuje najít kritické prodloužení λ_{1kr}, je-li dán potenciál W a rozměry hranolu.

Je třeba zdůraznit, že rovnice (2.20) určuje celé spektrum kritických hodnot prodloužení λ_1, každá z těchto hodnot odpovídá hodnotě parametru n. Směrodatná je nejmenší hodnota prodloužení λ_1, která vyhovuje rovnici (2.20).

Této hodnotě nemusí odpovídat $n = 1$. V takovém případě ztráty stability vznikne na hranolu více než jedna polovlna.

Případ $b^2 = c^2$

V případě $b^2 = c^2$ jsou obecným řešením rovnice (2.5) a řešením vyhovujícím podmínce souměrnosti přetvoření (2.16) tyto výrazy

$$\beta = D_1 e^{r_1 y} + D_2 y e^{r_1 y} + D_3 e^{-r_1 y} + D_4 y e^{-r_1 y}, \tag{2.21}$$

$$\beta = D_1 \sinh r_1 y + D_2 y \cosh r_1 y . \tag{2.22}$$

Po dosazení funkce (2.22) do okrajových podmínek (2.8) vyplývá jako v předchozím případě soustava dvou algebraických rovnic. Existuje netriviální řešení této soustavy, rovná-li se její determinant nule. Příslušné výrazy mají tvar

$$\begin{gathered} D_1(r_1^2 + v^2 s_1) \sinh r_1 h + D_2[2r_1 \sinh r_1 h + h(r_1^2 + v^2 s_1) \cosh r_1 h] = 0 , \\ D_1(r_1^2 + v^2 s_2)\, r_1 \cosh r_1 h + D_2[(3r_1^2 + v^2 s_2) \cosh r_1 h + r_1 h(r_1^2 + v^2 s_2) \sinh h r_1 h] = 0 , \end{gathered} \tag{2.23}$$

$$\frac{r_1^2 + v^2 s_1}{r_1(r_1^2 + v^2 s_2)} \cdot \frac{(3r_1^2 + v^2 s_2) + r_1 h(r_1^2 + v^2 s_2) \operatorname{tgh} r_1 h}{h(r_1^2 + v^2 s_2) + 2r_1 \operatorname{tgh} r_1 h} \operatorname{tgh} r_1 h = 1 . \tag{2.24}$$

Rovnost $b^2 = c^2$ nastává celkem v konečném počtu isolovaných bodů. V těchto bodech je třeba se pouze přesvědčit, je-li podmínka (2.24) splněna. Je třeba přitom uvažovat všechny možné hodnoty parametru n.

2.3. Jiné tvary podmínky ztráty stability

Kořeny r_1 a r_2, které jsou závislé na hodnotách parametrů b a c, mohou být čísly reálnými, imaginárními nebo komplexně sdruženými. Příslušné možnosti ilustruje schéma, které dále uvádíme.

	c^2
4. oba kořeny komplexně sdružené	1. $b > 0$ oba kořeny reálné 2. $b < 0$ oba kořeny imaginární
0	$(b - c^2$
5. případ nenastane	3. jeden kořen reálný a jeden imaginární

Podmínky (2.20) a (2.24) platí pro každý z uvedených případů. Bezprostřední použití mají však jen v případě označeném číslicí 1. Pro ostatní případy je nutno přepsat tyto podmínky v příhodnějším tvaru. Dále provedeme příslušnou transformaci podmínky (2.20).

V případě označeném čísliší 2 máme $r_1 = i|r_1|$, $r_2 = i|r_2|$, odkud se zřetelem k vztahu $\operatorname{tgh} ir = i \operatorname{tg} r$ vyplývá

$$(2.25) \qquad \frac{(-|r_1|^2 + v^2 s_1)(-|r_2|^2 + v^2 s_2)}{(-|r_2^2| + v^2 s_1)(-|r_1|^2 + v^2 s_2)} \cdot \frac{|r_2| \operatorname{tgh} |r_1| h}{|r_1| \operatorname{tgh} |r_2| h} = 1 .$$

V případě označeném čísliší 3 máme $r_1 = |r_1|$, $r_2 = i|r_2|$, odkud vyplývá

$$(2.26) \qquad \frac{(r_1^2 + v^2 s_1)(-|r_2|^2 + v^2 s_2)}{(-|r_2|^2 + v^2 s_1)(r_1^2 + v^2 s_2)} \cdot \frac{|r_2| \operatorname{tgh} r_1 h}{r_1 \operatorname{tg} |r_2| h} = 1 .$$

V případě označeném čísliší 4 jsou oba kořeny r_1 a r_2 komplexně sdružené

$$(2.27) \qquad r_1 = \varphi + i\psi , \qquad r_2 = \varphi - i\psi ,$$
$$\varphi = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{(c + b)} , \qquad \psi = \frac{v}{\sqrt{2}} \sqrt{(c - b)} ,$$

kde parametry φ a ψ jsou reálné hodnoty.

Výraz (2.18) je možno upravit a po dosazení nových konstant dostaneme

$$(2.28) \qquad \beta = C_1 \sinh \varphi y \cos \psi y + C_2 \cosh \varphi y \sin \psi y .$$

Po dosazení výrazu (2.28) do okrajových podmínek (2.9) vyplývá odtud soustava algebraických rovnic

$$(2.29) \qquad \begin{aligned} & C_1(\omega_1 \sinh \varphi h \cos \psi h - \omega_2 \cosh \varphi h \sin \psi h) + \\ & + C_2(\omega_1 \cosh \varphi h \sin \psi h + \omega_2 \sinh \varphi h \cos \psi h) = 0 , \\ & C_1(\omega_3 \cosh \varphi h \cos \psi h - \omega_4 \sinh \varphi h \sin \psi h) + \\ & + C_2(\omega_3 \sinh \varphi h \sin \psi h + \omega_4 \cosh \alpha h \sin \psi h) = 0 , \end{aligned}$$

kde

$$(2.30) \qquad \begin{aligned} \omega_1 &= \varphi^2 - \psi^2 + v^2 s_1 & \omega_2 &= 2\varphi\psi , \\ \omega_3 &= \varphi(\varphi^2 - 3\psi^2 - 2v^2 b - v^3 s_3) , & \omega_4 &= \psi(3\varphi^2 - \psi^2 - 2v^2 b - v^2 s_3) . \end{aligned}$$

Tato soustava má netriviální řešení, rovná-li se její determinant nule. Prostou úpravou dostáváme tuto podmínku ztráty stability

$$(2.31) \qquad \frac{\omega_1 \omega_4 - \omega_2 \omega_3}{\omega_1 \omega_3 + \omega_2 \omega_4} \cdot \frac{\sinh 2\varphi h}{\sin 2\psi h} = 1 ,$$

nebo

$$(2,32) \qquad \frac{(c - b)(c - s_3) - (b + s_1)(c + s_3)}{(c + b)(c + s_3) + (b + s_1)(c - s_3)} \cdot \frac{\varphi \sin 2\psi h}{\psi \sinh 2\varphi h} = 1 .$$

Rovnice (2.20), (2.25), (2.26) a (2.32) tvoří soubor rovnic, které umožňují numericky určit kritické prodloužení λ_1.

3. HRANOL NEKONEČNĚ DLOUHÝ. SPRÁVNOST METODY

3.1. Podmínka ztráty stability

Z odvozených rovnic se pro každý poměr výšky h k délce l dá stanovit kritické přetvoření. V tomto oddíle se omezíme na vyšetřování zvláštního případu, kdy poměr $h:(nl)$ se blíží k nule. To odpovídá vzniku nekonečně dlouhé polovlny na hranolu ve chvíli ztráty stability.

V uvažovaném případě se hodnoty $r_i h$ blíží k nule. Funkce tgh $r_i h$ je tedy možno nahradit hodnotami $r_i h$, odkud v souhlase se vztahem (2.20) vyplývá tato podmínka ztráty stability (3.1)

$$s_1 = s_2 . \tag{3.1}$$

Po dosazení vztahů (2.6) a (2.10) do podmínky (3.1) a po úpravě odtud vyplývá

$$(c_{11} + 2\tau^{11})(c_{22} + 2\tau^{22}) - c_{21}^2 = 0 , \tag{3.2}$$

nezávisle na tom, jsou-li kořeny r_1, r_2 reálnými čísly nebo ne.

Dále ukážeme, že prodloužení λ_1, které splňuje podmínku (3.2) odpovídá stavu, za kterého síla, která namáhá hranol tahem, dosahuje maximální hodnoty.

3.2. Podmínka maxima tahové síly

Vztahů (1.13), které byly dříve uvedeny a které představují lineární části přírůstku tensoru napětí, je možno použít pro stanovení prodloužení, kterému odpovídá maximum síly namáhající hranol tahem. Dále určíme toto prodloužení. Budeme přitom používat označení pro parametr ε a pro hodnoty c_{ij}, zavedených v předcházejících oddílech, při čemž však budeme mít na zřeteli, že se zde tato označení týkají jiného problému.

Předpokládejme, že hranol je ještě v homogenním stavu přetvoření a napětí (prodloužení je menší než jeho kritická hodnota). Stav napětí a přetvoření v tomto hranolu je ve shodě s rozborem vztahu (1.4) funkcí prodloužení λ_1.

Předpokládejme, že prodloužení λ_1 se změní o malý přírůstek ε. Body tělesa B změní pak svou polohu o malá posunutí $\varepsilon\vec{w}$. V dříve zavedené soustavě souřadnic má vektor $\boldsymbol{w}$ složky

$$u = \frac{x}{\lambda_1} , \quad v = \frac{y}{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} . \tag{3.3}$$

Dosadíme-li (3.3) do rovnice (1.13), dostáváme

$$\begin{aligned} \tau'^{11} &= c_{11} \frac{1}{\lambda_1} + c_{12} \frac{1}{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} , \\ \tau'^{22} &= c_{21} \frac{1}{\lambda_1} + c_{22} \frac{1}{\lambda_2} \frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} , \\ \tau'^{22} &= 0 . \end{aligned} \tag{3.4}$$

Přírůstek skutečného napětí σ'_{ij} (vztaženého na jednotku povrchu přetvořeného tělesa) je možno dostat po transformaci tensoru $\tau^{ij} + \varepsilon\tau'^{ij}$ z hmotné soustavy souřadnicové Θ^i do prostorové kartézské soustavy souřadnic. Prosté úvahy vedou ke vztahům

$$\sigma_{11} + \varepsilon\sigma'_{11} = \tau^{11} + \varepsilon\left[\left(c_{11} + 2\tau^{11}\right)\frac{1}{\lambda_1} + c_{12}\frac{1}{\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}\right], \tag{3.5}$$

$$\sigma_{22} + \varepsilon\sigma'_{22} = \tau^{22} + \varepsilon\left[c_{21}\frac{1}{\lambda_1} + \left(c_{22} + 2\tau^{22}\right)\frac{1}{\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}\right].$$

Přírůstek nominálního napětí σ'^n_{ij} (vztaženého na jednotku povrchu nepřetvořeného tělesa) dostaneme násobením příslušného výrazu (3.5) poměřem povrchové plochy a tělesa přetvořeného a nepřetvořeného. Tento poměr se pro plochy Θ^1 = konst. a Θ^2 = konst. rovná výrazům

$$k_1 = \lambda_1 + \varepsilon\,, \quad k_2 = \lambda_2 + \varepsilon\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}\,, \tag{3.6}$$

odkud vyplývají vztahy

$$\sigma^n_{11} + \varepsilon\sigma'^n_{11} = \lambda_2\tau^{11} + \varepsilon\left[\left(c_{11} + 2\tau^{11}\right)\frac{\lambda_2}{\lambda_1} + \left(c_{12} + \tau^{11}\right)\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}\right], \tag{3.7}$$

$$\sigma^n_{22} + \varepsilon\sigma'^n_{22} = \lambda_1\tau^{22} + \varepsilon\left[\left(c_{21} + \tau^{22}\right) + \left(c_{22} + 2\tau^{22}\right)\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1}\right].$$

Na ploše $\Theta^2 = \pm h$ je nominální napětí stálé (rovná se nule) a přírůstek σ'^n_{22} se tedy rovná nule. Odtud dostáváme

$$\frac{d\lambda_2}{d\lambda_1} = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\cdot\frac{c_{21} + \tau^{22}}{c_{22} + 2\tau^{22}}\,. \tag{3.8}$$

Extrém nominálního napětí σ^n_{11} nastává, když se přírůstek napětí σ'^n_{11} rovná nule. Ze vztahů (3.7) a (3.8) dostáváme podmínku pro dosažení tohoto extrému

$$\left(c_{11} + 2\tau^{11}\right)\left(c_{22} + 2\tau^{22}\right) - \left(c_{12} + \tau^{11}\right)\left(c_{21} + \tau^{22}\right) = 0\,, \tag{3.9}$$

který se zřetelem ke vztahům (1.14) a (1.21) se dá vyjádřit v tomto konečném tvaru

$$\left(c_{11} + 2\tau^{11}\right)\left(c_{22} + 2\tau^{22}\right) - c^2_{21} = 0\,. \tag{3.10}$$

Porovnání vztahů (3.2) a (3.10) vede k závěru, že ztráta stability u nekonečně dlouhého hranolu nastává tehdy, když tahová síla dosahuje maxima. Je třeba zdůraznit, že pro konečné délky hranolu tento závěr neplatí. Existují též takové hmoty, že k ztrátě stability v tahu nedochází.

3.3. Správnost metody

Úvahy této práce se opírají o statické kritérium stability. Podle tohoto kritéria je těleso v trvalé rovnováze, hestliže okrajová úloha přidání malých přetvoření ke konečným přetvořením připouští mnoho řešení. Jedině správným kritériem je však kritérium kinematické, podle kterého je těleso v trvalé rovnováze, je-li amplituda přídavného pohybu vyvolaného libovolným impulsem je malá, je-li sám impuls malý. Jak je ukázáno v práci (4), vedou obě kritéria k témže výsledkům, je-li okrajová úloha příslušná statickému kritériu samoadjugovaná.

Podle práce (4) se dá podmínka samoadjugovanosti napsat v tomto tvaru

$$(3.11)\quad \int_S n_r\{\underset{2}{w_s}[\underset{1}{\tau'^{rs}} + \tau^{rs}\,\nabla_p \underset{1}{w^p} + \tau^{rp}\,\nabla_p \underset{1}{w^s}] - \underset{1}{w^s}[\underset{2}{\tau'^{rs}} + \tau^{rs}\,\nabla_p \underset{2}{w^p} + \tau^{rp}\,\nabla_p \underset{2}{w^s}]\}\,\mathrm{d}S = 0\,,$$

kde S značí povrch vyšetřovaného hranolu, $\underset{1}{w_k}$ a $\underset{2}{w_k}$ dvě různá pole přídavného posunutí vyhovující okrajovým podmínkám a $\underset{1}{\tau'^{ij}}$ a $\underset{2}{\tau'^{ij}}$ pole tensoru τ'^{ij}, která přísluší těmto polím.

Vzhledem k tomu, že $\boldsymbol{n} = (\pm 1; 0; 0)$ na $x = 0$; l a $\boldsymbol{n} = (0; \pm 1; 0)$ na $y = \pm h$, podmínka (3.11) se dá napsat v tomto tvaru

$$(3.12)\quad \int_0^h [\underset{2}{w_s}(\underset{1}{\tau'^{1s}} + \tau^{1s}\,\nabla_p \underset{1}{w^p} + \tau^{1p}\,\nabla_p \underset{1}{w^s}) - \underset{1}{w_s}(\underset{2}{\tau'^{1s}} + \tau^{1s}\,\nabla_p \underset{2}{w^p} + \tau^{1p}\,\nabla_p \underset{2}{w^s})]\,\mathrm{d}y +$$

$$+ \int_0^l [\underset{2}{w_s}(\underset{1}{\tau'^{2s}} + \tau^{2s}\,\nabla_p \underset{1}{w^p} + \tau^{2p}\,\nabla_p \underset{1}{w^s}) - \underset{1}{w_s}(\tau'^{2s} + \tau^{2s}\,\nabla_p \underset{2}{w^p} + \tau^{2p}\,\nabla_p \underset{2}{w^s})]\,\mathrm{d}x = 0\,.$$

Na základě okrajových podmínek (1.21) až (1.23) vidíme ihned, že podmínka (3.12) je splněna identicky. Odtud vyplývá, že okrajová úloha definovaná podmínkami (1.20) až (1.23) je samoadjungovaná. Založení výpočtů na statické definici stability je tedy oprávněné a vede k správným výsledkům.

Literatura

[1] *A. E. Green, R. S. Rivlin, R. T. Shield:* General theory of small elastic deformations superposed on finite elastic deformations; Proc. Roy. Soc. *A 211* (1952).

[2] *W. Urbanowski:* Small deformations superposed on finite deformation of a curvilinearly orthotropic body; Arch. Mech. Stos., 2, *11* (1959).

[3] *A. E. Green, W. Zerna:* Theoretical Elasticity; Oxford 1954.

[4] *Guo Zhong-heng, W. Urbanowski:* Stability of non-conservative systems in the theory of elasticity of finite deformations; Arch. Mech. Stos., 2, *15*, (1963).

[5] *Z. Wesołowski:* Some problems of stability in tension in the light of the theory of finite strain; Arch. Mech. Stos., 6, *14* (1962).

Резюме

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ НАТЯЖЕНИИ

ЗБИГНИЕВ ВЕСОЛОВСКИ (Zbigniew Wesołowski)

В работе исследуется вопрос устойчивости призмы при конечном растяжении. О материале предполагается, что он упругий и ортотропный и что он обладает самой общей физической характеристикой.

Полная деформация делится на две части: конечная предварительная деформация и малая добавочная деформация. Отношения, касающиеся добавочной деформации, линеаризированы. После разложения добавочных перемещений в ряд проблема сводится к нахождению собственных значений краевой задачи, определенной обыкновенным дифференциальным уравнением с соответствующими краевыми условиями.

Условие потери устойчивости выведено в замкнутом виде. Доказано, что в случае, когда длина призмы стремится в бесконечность, условие потери устойчивости совпадает с условием максимума силы, нагружающей призму при натяжении.

Summary

PLANAR PROBLEM OF STABILITY LOSS UNDER STRETCHING

ZBIGNIEW WESOŁOWSKI

The stability of a parallelepiped subjected to finite stretching is investigated. The material is assumed to be elastic an orthotropic, with arbitrary non-linear physical properties.

The deformation is divided into two parts: a finite initial deformation and a small additional deformation. All the relations which correspod to the additional deformation are linearized. After expanding the additional displacements into series, an ordinary differential equation with corresponding boundary conditions is obtained. Eigenvalues of this boundary problem are the sought-for critical elongations.

It is proved that in the case, when the length of the parallelepiped tends to infinity, loss of stability occurs when the stretching force attains its maximum.

Adresa autora: Dr. *Zbigniew Wesołowski*, Instytut Podstawowych Problemów Techniki Polskiej Akademii Nauk, Świętokrzyska 21, Warszawa.