Aplikace matematiky

Jan Sedláček

Aditivní procesy s náhodnými skoky do absorpční bariery a jejich použití při výkladu lomu v kovech

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 1, 26–44

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/102998

ADITIVNÍ PROCESY S NÁHODNÝMI SKOKY DO ABSORPČNÍ BARIÉRY A JEJICH POUŽITÍ PŘI VÝKLADU LOMU V KOVECH

JAN SEDLÁČEK

(Došlo dne 28. května 1964.)

1. ÚVOD

Statistická interpretace únavy a únavových lomů v kovech, k níž první kroky učinil ve své práci v r. 1949 W. WEIBULL, přihlížela delší dobu pouze ke klasickému laboratornímu hodnocení únavových vlastností, které spočívá ve vyšetřování závislosti únavových životů N, (počet cyklů do lomu), na střídavém cyklickém napětí o konstantní amplitudě σ. Mechanismus únavového lomu je v tomto případě popisován pomocí jednoduché lineární hypotézy kumulace poškození, vztažené k procesu růstu únavové trhliny. Tato hypotéza, vyjádřena vztahem $\Delta Z_\sigma = 1/N_\sigma$, vymezuje přírůstek poškození způsobovaného každým cyklem střídavého napětí o amplitudě σ, přičemž N_σ udává celkový počet cyklů do lomu při konstantní amplitudě napětí σ.

Uvažujeme-li nyní, že se průběhem únavové zkoušky vystřídají proměnlivá cyklická napětí o různých amplitudách σ_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, je příslušná lineární hypotéza kumulace poškození representována vztahem

$$\sum_{i=1}^{k} n_{\sigma_i}/N_{\sigma_i} = 1\,,$$

kde N_{σ_i} označuje délku únavových životů při konstantní amplitudě napětí σ_i a $n_{\sigma_i} < N_{\sigma_i}$ udává počet cyklů z celkové délky únavového života, při nichž amplituda napětí byla na úrovni σ_i.

Tato hypotéza je hlavně pro svou jednoduchost používána téměř výlučně jako jediný prostředek pro řešení úloh z oboru únavy v těch případech, kdy se proces střídavých napětí vyznačuje v čase změnami v amplitudě, i když je již dnes experimentálně prokázáno, že výraz $\sum_{i=1}^{k} n_{\sigma_i}/N_{\sigma_i} \neq 1$, a že nabývá hodnot v širokém intervalu (a, b); $a < 1$, $b > 1$. Řada experimentálních prací, provedených v zahraničí, uvádí pro tento součet dokonce tak široký interval kolísání, že je namístě nedůvěra k odhadům a předpovědím únavové životnosti, založeným na této hypotéze.

Ukazuje se však, že lineární pravidlo pro popis mechanismu únavového lomu neplatí ani v případě, kdy amplituda střídavých napětí zůstává konstantní, a že jediným možným prostředkem pro věrohodný výklad únavových lomů jsou stochastické procesy.

První způsob výkladu únavových lomů, založený na stochastickém průběhu procesu kumulace poškození, byl proveden v pracích [2] a [3]. U nás jsme se od r. 1958 zabývali obecnějším teoretickým řešením stochastického pojetí procesu kumulace poškození, jež by umožňovalo spojení skutečné povahy provozního zatěžování strojních částí s mechanismy lomů v kovech, čímž by byla připravena teoretická základna pro řešení otázek provozní únavy. V tomto článku jsou uvedeny některé výsledky řešení založeného na stochastickém výkladu procesu šíření únavové trhliny a vytváření situace pro provozní lom, přičemž je uvažováno prohloubení ještě v tom smyslu, aby bylo možno podchytit též lomy náhlé povahy, k nimž může dojít za každého stavu porušení soudržnosti kovu prudkým skokem ve vývoji lomové trhliny. Tím je vlastně umožněna statistická interpretace i jiných lomů, než jsou lomy únavové (jako např. lom statický, tvárný apod.).

2. DEFINICE ÚNAVY

K pochopení základní stavby teoretického modelu únavy je zapotřebí uvést přesnou definici únavy. Abychom pak mohli vzájemně porovnat technické pojetí únavy s matematicko-statistickou interpretací únavy, uvedeme nejprve, co se pod pojmem „únava kovů" rozumí v technickém slova smyslu.

2.1. Technické pojetí únavy

Únavou kovů rozumíme časový proces poruch soudržnosti kovů, jehož jedinou příčinou vzniku je cyklicky měnivé napětí $\sigma(t)$ (např. střídání tahu a tlaku). Přitom k únavě dochází i tehdy, když amplitudy střídavých napětí jsou pod mezí kluzu σ_K, (tedy v oblasti platnosti Hookova zákona), a teprve od určité hodnoty σ_c, která je nazývána mezí únavy, nezpůsobují střídavá napětí o amplitudě $\sigma \leqq \sigma_c$ únavu kovů.

Poznámka 1. Pro další výklad únavy připomeňme, že proces poruch má obecně několikaetapový průběh, jejž lze charakterisovat takto:

1. etapa – spočívá ve hromadění mikrodefektů v místech, kde se nachází větší nepravidelnosti ve stavbě kovu, které nakonec vedou ke vzniku prvních nespojitostí.

2. etapa – je charakterisována soustřeďováním nespojitostí do jediného místa a vznikem mikrotrhliny, která je zárodkem únavového lomu.

3. etapa – představuje jakýsi růstový, nevratný proces, v němž mikrotrhlinka přechází z mikrooblasti do makrooblasti.

4. etapa – je vlastně závěr 3. etapy, neboť je charakterisována tím, že růstový proces trhliny dosáhl stavu z_{krit}, v němž je materiál tak zeslaben, že pod vlivem maxima napětí dochází k lomu.

Stručně lze pak tento čtyřetapový proces interpretovat jako dvouetapový proces ryze náhodného charakteru, kde jednotlivé etapy vymezují:

1. etapa – iniciace lomu (zárodečné mikrotrhliny) a růstový proces mikrotrhlinky v makrotrhlinku;

2. etapa – dosažení jistého kritického stavu nutného pro vznik lomu, k němuž můžeme dospět jednak růstovým procesem, jednak náhlým prudkým skokem z libovolného stavu $0 \leqq z < z_{\mathrm{krit}}$.

2.2. Matematická definice

Únavu materiálu považujeme za stochastický proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ nevratné povahy, který splňuje následující požadavky:

(1) $Z(0) = 0$.

(2) pro každé $t > 0$ jest

$$Z(t) = \sum_{i=1}^{k(t)} \xi_i ,$$

kde ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, k(t))$ jsou nezáporné náhodné veličiny, mající stejné rozdělení spojitého typu, nezávislé na čase t, a $\{k(t) : t > 0\}$ je náhodný proces s vlastnostmi:

a) pro každé $t > 0$ je $k(t) = 0, 1, 2, \ldots$;

b) pro libovolnou dvojici $t_1 < t_2$ jest $k(t_1) \leqq k(t_2)$.

(3) Proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ končí absorpcí v určitém pevném stavu $z = z_{\mathrm{krit}}$.

Dále budeme značit symbolem $G(x)$ distribuční funkci veličiny ξ, symbolem $\gamma(x)$ její hustotu pravděpodobnosti, a symbolem τ dobu trvání procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, tedy dobu do absorpce procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ ve stavu z_{krit}. Podrobnější popis procesu $\{k(t) : t > 0\}$ jest obsažen v oddíle 3.1. Z předpokladů o procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ zřejmě plyne:

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \quad \text{pro všechna} \quad x \leqq 0 , \\ \gamma(x) &= 0 \quad \text{pro všechna} \quad x < 0 , \\ \tau &= \sup \{t : Z(t) \leqq z_{\mathrm{krit}}\} . \end{aligned}$$

Poznámka 2. Při realisaci výše definovaného procesu vyjadřuje $Z(t)$ rozsah poškození v daném časovém okamžiku t, takže v realisacích popisuje $Z(t)$ časový průběh kumulace dílčích poškození, čili zákonitosti vzniku, šíření a růstu nespojitostí, předcházejících před jakýmkoliv případem lomu v kovech. Realisace procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ můžeme tedy považovat za teoretické modely mechanismů lomových jevů v kovech a za vyjádření obecných zákonů vytváření lomových situací vůbec.

3. MODEL PROCESU $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ A JEHO MATEMATICKO-STATISTICKÉ VYJÁDŘENÍ

3.1. Stručná charakteristika teoretického modelu

Nechť $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ je proces únavy materiálu, splňující podmínky oddílu 2.2. Změny stavů tohoto procesu rozdělme podle jejich povahy a podle pravděpodobnostního mechanismu jejich výskytu do dvou tříd:

a) Stavovou změnou typu a) budeme rozumět přechod procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ během časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ ze stavu $Z(t) = z$ do stavu $Z(t + \Delta t) = z + \xi < z_{\text{krit}}$, kde ξ je náhodná veličina s distribuční funkcí $G(x)$. Budeme předpokládat, že výskyty změn typu a) tvoří (obecně nehomogenní) Poissonův proces. To znamená, že pravděpodobnost $p_a(t)$ výskytu aspoň jedné změny v intervalu $(t, t + \Delta t)$ se rovná

$$p_a(t) = \lambda_1(t)\,\Delta t + o(\Delta t)\,, \tag{4a}$$

pravděpodobnost dvou nebo více změn v tomto intervalu je $o(\Delta t)$, a počty změn ve dvou disjunktních intervalech jsou navzájem nezávislé. Zde značí $\lambda_1(t)$ spojitou nezápornou funkci parametru t (tzv. intensita pravděpodobnosti přechodu), a $o(\Delta t)$ veličinu nekonečně malou řádu vyššího než Δt.

b) Stavovou změnou typu b) rozumíme náhlý prudký skok až do absorpční bariéry z_{krit}, jehož výsledkem je náhlý křehký lom, tj. přechod procesu během intervalu $(t, t + \Delta t)$ ze stavu $Z(t) = z$ do stavu $Z(t + \Delta t) = z_{\text{krit}}$. O pravděpodobnosti $p_b(z, t)$ změny tohoto typu budeme předpokládat

$$p_b(z, t) = \lambda(z, t)\,\Delta t + o(\Delta t)\,, \tag{4b}$$

takže pravděpodobnost změny typu b) závisí nejen na čase, nýbrž i na předcházejícím stavu. Pro jednoduchost se budeme zabývat případem, kdy intensitu pravděpodobnosti přechodu $\lambda(z, t)$ lze rozložit na součet dvou nezáporných funkcí, z nichž jedna závisí jen na stavu z a jedna jen na čase t, tj.

$$\lambda(z, t) = \lambda_2(z) + \lambda_3(t)\,.$$

V každé realisaci procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ může nastat nejvýše jedna změna typu b), neboť při uskutečnění takové změny proces zaniká. Poznamenejme ještě, že dojde-li v intervalu $(t, t + \Delta t)$ ke změně typu a), není již v tomto intervalu změna typu b) možná, takže proces může zaniknout nejdříve v dalším intervalu, tj. v okamžiku $t + 2\Delta t$.

3.2. Podrobnější matematicko-statistické vyjádření a popis modelu únavy

Model únavy definovaný procesem $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ v odst. 3.1, lze nejlépe representovat funkcí $p_0(z, t)$, s jejíž pomocí je možno vyjádřit trvání procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, nachází-li se tento na počátku časového intervalu $(t, t + \Delta t)$ v jistém stavu $\zeta \leqq z < z_{\text{krit}}$. Podle tohoto výkladu bude tedy funkce $p_0(z, t)$ definována simultánní pravděpodobností

$$p_0(z, t)\,\mathrm{d}z = P_{st}\{z \leqq Z(t) < z + \mathrm{d}z,\ \tau > t\}\,, \quad (0 \leqq t < \infty,\ 0 \leqq z < z_{\text{krit}})\,, \tag{5}$$

přičemž podle předpokladu z odst. 2.2 resp. 3.1 musí platit pro $z > z_{\text{krit}}$, že

$$p_0(z, t) \equiv 0 \quad \text{pro všechna} \quad t \geqq 0\,.$$

Z definice (5) funkce $p_0(z, t)$ tedy vyplývá, že

$$P_{st}\{\zeta \leqq z, \quad \tau > t\} = \int_0^z p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\,, \tag{6}$$

což slovy znamená, že proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ nebyl při stavu $\zeta \leqq z < z_{\text{krit}}$ do doby t absorbován, a tudíž stále ještě trvá, alespoň do doby $t + \Delta t$.

Dosadíme-li do vztahu (6) za z kritický stav z_{krit}, dostaneme

$$P_{st}\{\zeta \leqq z_{\text{krit}}, \ \tau > t\} = P_{st}\{\text{život} > t\} = \int_0^{z_{\text{krit}}} p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\,, \tag{7}$$

kterýžto vztah vlastně představuje doplněk marginální distribuční funkce náhodné proměnné τ do jedničky. To tedy znamená, že výraz

$$1 - \int_0^{z_{\text{krit}}} p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta = P_{st}\{\tau \leqq t\} = L_{z_{\text{krit}}}(t) \tag{8}$$

definuje distribuční funkci délek časů, potřebných do dosažení kritického stavu v procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, čili model životnosti při únavě. Vzhledem k předpokladu o spojitosti veličiny τ dostáváme pro hustotu pravděpodobnosti $l_{z_{\text{krit}}}(t)$ vztah

$$l_{z_{\text{krit}}}(t) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int_0^{z_{\text{krit}}} p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\right]. \tag{9}$$

Obecně pak platí pro jakékoli $z < z_{\text{krit}}$, že funkce

$$L_z(t) = 1 - \int_0^Z p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta \tag{10}$$

definuje pravděpodobnost výstupů ze stavů $\zeta_1 \in \langle 0, z)$ v procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ do stavů $\zeta_2 \in \langle z, z_{\text{krit}}\rangle$ v době $\tau \leqq t$, a vyjadřuje tudíž inversní proces $\{T(z) : z \geqq 0\}$ k původnímu procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$,

Zkráceně tedy píšeme:

(11) proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ ... je vyjádřen funkcí $p_0(z, t)$, která udává pravděpodobnost, že lom do doby t za stavu poškození $\zeta \leqq z$ ještě nenastal;

(12) proces $\{T(z) : z \geqq 0\}$... je vyjádřen funkcí $1 - \int_0^z p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta$, z níž vyplývá popis únavové životnosti, tj. délek únavových životů τ, a to formou simultánní pravděpodobnosti.

$$\begin{aligned} l_z(t)\,\mathrm{d}t &= P_{st}\{\zeta \leqq z, \ t \leqq \tau < t + \mathrm{d}t\} = \\ &= \left[-\int_0^z \frac{\partial}{\partial t}\left(p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\right)\right]\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{12'}$$

3.3. Odvození základní rovnice procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$

Uvažujme libovolný stav u procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, a předpokládejme o něm, že splňuje nerovnost $u \leqq z < z_{\text{krit}}$. Uvažujme dále časový interval $(t, t + \Delta t)$, na jehož počátku je právě tento uvažovaný stav u, takže v okamžiku t je proces ve stavu $z_t = u$, a ptejme se s jakou pravděpodobností se proces na konci intervalu $t + \Delta t$ bude nacházet ve stavu $z_{t+\Delta t} = z$. Tato pravděpodobnost je podle předchozího výkladu určena vztahem $P_{st}\{z \leqq \zeta < z + \mathrm{d}z, \tau < t + \Delta t\} = p_0(z, t + \Delta t)\, \mathrm{d}z$, tj. je vymezena funkcí $p_0(z, t)$. Pro určení funkce $p_0(z, t)$ z daného mechanismu procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ vycházejme z těchto dvou možných případů:

První případ

Vycházíme-li z předpokladu, že v čase t je proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ ve stavu $u < z$, pak pro stav z na konci intervalu $(t, t + \Delta t)$ je nutné, aby během Δt nastal skok typu a) velikosti $z - u$. Poněvadž je uvažovaný proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ podle předpokladu aditivním procesem, platí pro uskutečnění tohoto skoku, že k němu dojde s pravděpodobností

$$(13) \qquad p_u = \lambda_1(t)\, \Delta t \int_0^z p_0(u, t)\, \gamma(z - u)\, \mathrm{d}u + o(\Delta t) = \lambda_1(t) \left[\gamma(z) * p_0(z, t)\right] \Delta t + o(\Delta t)$$

(kde výraz $[\gamma * p_0]$ označuje konvoluci funckí $\gamma(x)$, $p(x, t)$).

Druhý případ

Jako druhý možný případ uvažujeme takovou skutečnost, že na počátku intervalu $(t, t + \Delta t)$ je proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ ve stavu $u = z$. Má-li se proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ v tomto stavu nacházet i po uplynutí doby $t + \Delta t$, znamená to, že musí po interval délky Δt setrvat ve stavu z, a nesmí tudíž dojít ani ke změně stavu typu a) ani typu b). Tento druhý případ lze charakterisovat pravděpodobností setrvání p_z, pro níž platí

$$(14) \qquad p_z = p_0(z, t) \left[1 - \lambda_1(t)\, \Delta t - \lambda(t, z)\, \Delta t\right]$$

(zanedbáme-li členy 2. a vyššího řádu).
Spojíme-li nyní oba možné případy, dostáváme

$$\frac{p_0(z, t + \Delta t) - p_0(z, t)}{\Delta t} = \lambda_1(t) \left[\gamma(z) * p_0(z, t)\right] + p_0(z, t) \left[-\lambda_1(t) - \lambda(t, z)\right] + o(\Delta t)\,,$$

takže v limitě pro $\Delta t \to 0$ dostáváme pro funkci $p_0(z, t)$ integrodiferenciální rovnici tvaru

$$(15) \qquad \frac{\partial p_0(z, t)}{\partial t} = \lambda_1(t)\,[\gamma(z) * p_0(z, t)] - p_0(z, t)\,[\lambda_1(t) + \lambda(t, z)]\,.$$

Tato rovnice typu Fellerova-Kolmogorova je obecným vyjádřením teoretického modelu procesu kumulace poškození $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, a lze ji považovat za popis mechanismu nejen únavových lomů, nýbrž i všech lomů dalších, jež jsou vyvolány náhodně kolísajícím provozním napětím. Speciálně zde máme na mysli náhodné silové rázy, pulsy, síly od poryvů a náhodná krátkodobá přetížení, vyvolávající náhodná střídavá napětí, pod jejichž účinkem je pak ve struktuře vyvoláván progresivní poruchový proces soudržnosti $\{Z(t) : t \geqq 0\}$.

3.4. Popis inversního procesu $\{T(z) : 0 \leqq z \leqq z_{\text{krit}}\}$

Inversním procesem $\{T(z) : 0 \leqq z \leqq z_{\text{krit}}\}$ není nutno se obírat podrobněji. Stručně bylo v odst. 3.2 ukázáno, jaká je spojitost mezi popisem procesů $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ a $\{T(z) : z \geqq \}$, takže rovnice (15) spolu se vzorci (12) a (12′) jednoznačně určuje i proces inversní.

4.0. Speciální případy mechanismů lomů v kovech (konkrétní realisace procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$)

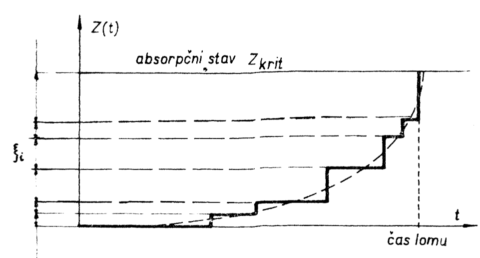
4.1. Jednoduchý model, odpovídající nehomogennímu procesu kumulace dílčích poškození (poruch)

4.11. Funkce $p_0(z, t)$

Uvažujme základní rovnici (15) procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, v níž pro jednoduchost položme $\lambda(z, t) \equiv 0$ pro všechna z, t, takže rovnice (15) se nám zjednodušuje do tvaru

$$(16) \qquad \frac{\partial p_0(z, t)}{\partial t} = \lambda_1(t)\{[\gamma(z) * p_0(z, t)] - p_0(z, t)\}\,.$$

Tato rovnice (16) odpovídá všem těm mechanismům lomových jevů, jež lze charakterisovat pouze skoky typu a), což je schématicky znázorněno na obr. 1.



Obr. 1.

Pro řešení integro-diferenciální rovnice (16) použijeme Laplaceovy transformace vůči proměnné z, (dále označované jako $\mathcal{L}$-transformace), která nám převádí rovnici (16) na jednoduchou diferenciální rovnici tvaru

$$(17) \qquad \frac{\partial P_0(s, t)}{\partial t} = \lambda_1(t)\,P_0(s, t)\,[g(s) - 1]$$

s počátečními podmínkami

$$(17') \qquad P_0(s, 0) = 0\,, \quad 0 \leqq P_0(0, t) \leqq 1\,.$$

Přitom značí

$$(18) \qquad P_0(s, t) = \mathscr{L}\{p_0(z, t)\} = \int_0^\infty e^{-sz} p_0(z, t)\,\mathrm{d}z\,,$$

$$g(s) = \mathscr{L}\{\gamma(z)\} = \int_0^\infty e^{-sz} \gamma(z)\,\mathrm{d}z\,.$$

Řešením rovnice (17) obdržíme

$$(19) \qquad P_0(s, t) = e^{-\int_0^t \lambda_1(\tau)[1-g(s)]\mathrm{d}\tau}$$

čili

$$(20) \qquad P_0(s, t) = e^{-\Lambda(t)+\Lambda(t)g(s)}\,,$$

kde $\Lambda(t)$ je absolutně spojitá, měřitelná funkce, definovaná integrálem

$$(21) \qquad \Lambda(t) = \int_0^t \lambda_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Výsledný vztah pro funkci $p_0(z, t)$ obdržíme tedy z inversní $\mathscr{L}$-transformace ($\mathscr{L}^{-1} = \Lambda$) funkce $P_0(s, t)$, tj.

$$(22) \qquad p_0(z, t) = \Lambda\{P_0(s, t)\} = e^{-\Lambda(t)} \Lambda\{e^{\Lambda(t)g(s)}\}\,.$$

Vztah (22) charakterisuje celou řadu jednodušších mechanismů lomových jevů, které respektují nehomogenitu procesu uskutečňování skokových přírůstků náhodné velikosti ξ. Případ homogenity je zde obsažen jako speciální případ, kdy $\lambda_1(t) = \lambda_1 = \text{const}$. V takovémto případě je $\Lambda(t) = \lambda_1 t$ a $p_0(z, t)$ je tudíž dána vztahem

$$(23) \qquad p_0(z, t) = e^{-\lambda_1 t} \Lambda\{e^{\lambda_1 t . g(s)}\} = \Lambda\{e^{-\lambda_1 t[1-g(s)]}\}\,,$$

$$g(s) = \mathscr{L}\{\gamma(z)\}\,.$$

4.12. Životnost za daného mechanismu lomového jevu

Popis životnosti za daného mechanismu lomu, který, jak poznáváme ze vztahu (22), je plně definován znalostí funkcí $\lambda_1(t)$ a $\gamma(z)$, je velmi úzce spojen s popisem procesu $Z(t)$, tj. s funkcí $p_0(z, t)$. Ze vztahu (8) lze např. odvodit, že

$$(24) \qquad \mathscr{L}\{L_{z_{\mathrm{krit}}}(t)\} = \mathscr{L}\{1\} - \mathscr{L}\left\{\int_0^{z_{\mathrm{krit}}} p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\right\} = \frac{1}{s}\,[1 - P_0(s, t)]\,,$$

neboť pro $\mathscr{L}$-transformaci funkce $\varphi(z)$ ve tvaru

$$\varphi(z) = \int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x$$

platí vztah

$$\mathscr{L}\{\varphi(z)\} = \frac{1}{s}\,\Phi(s)\,, \tag{25}$$

kde

$$\Phi(s) = \mathscr{L}\{f(x)\}\,.$$

Uvažujeme-li tedy např. homogenní proces skokových změn v procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, dostáváme ze vztahu (23), že pro distribuční funkci délek životů τ platí obecný vztah

$$\mathscr{L}\{L_{z_{\mathrm{krit}}}(t)\} = \frac{1}{s}\,\{1 - e^{-\lambda_1 t[1-g(s)]}\}\,. \tag{26}$$

Většinou výhodnější pro nás bude uvažovat místo funkce $L_{z_{\mathrm{krit}}}(t)$ funkci hustoty pravděpodobnosti $l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)$, pro níž na základě vztahu (9) a vztahu (25) platí, že

$$\mathscr{L}\{l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)\} = -\,\frac{1}{s}\,\frac{\partial P_0(s, t)}{\partial t}\,. \tag{27}$$

Uvažujeme-li tedy homogenní proces uskutečňování skoků v mechanismu lomového jevu, je podle (20) $\mathscr{L}$-zobrazení funkce $p_0(z, t)$ dáno funkcí

$$P_0(s, t) = e^{-\lambda_1 t[1-g(s)]}\,,$$

takže $\mathscr{L}$-zobrazení funkce $l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)$ bude určeno vztahem

$$\mathscr{L}\{l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)\} = \frac{\lambda_1}{s}\,[1 - g(s)]\,e^{-\lambda_1 t[1-g(s)]}\,. \tag{28}$$

Rozepíšeme-li pak exponenciální funkci ve vztahu (28) v řadu, dostáváme, že

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k\,\frac{\lambda_1^{k+1} t^k}{k!}\,\frac{[1 - g(s)]^{k+1}}{s} = \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 - g(s)}{s}\,\frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\,[g(s)]^k\,.\end{aligned} \tag{29}$$

Odtud tedy vyplývá, že lze $\mathscr{L}$-zobrazení funkce hustoty pravděpodobnosti $l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)$ vyjádřit ve tvaru rozdílu dvou součtů

$$\mathscr{L}\{l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)\} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\,\frac{[g(s)]^k}{s} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!}\,\frac{[g(s)]^{k+1}}{s}\right\}, \tag{30}$$

což může být vhodnější vztah při hledání originálu k $\mathscr{L}$-obrazu funkce $l_{z_{\mathrm{krit}}}(t)$.

Příklad 1. Nechť skokové přírůstky ξ_j vyhovují podmínce

(31) $$\xi_j = c \pm \varepsilon \quad \text{pro} \quad \text{všechna} \quad j = 0, 1, 2, \ldots,$$

(přičemž $\varepsilon \approx 0$),

takže jde o mechanismus únavy s přibližně stejnými přírůstky poškození, uskutečňovanými náhodně v čase.

V takovémto případě odpovídá tedy funkci $\gamma(x)$ známá δ-funkce

(32) $$\delta(x, \varepsilon) = \gamma_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1/2\varepsilon & \text{pro} \quad c - \varepsilon < x < c + \varepsilon, \\ 0 & \text{pro} \quad x < c - \varepsilon,\ x > c + \varepsilon, \end{cases}$$

pro jejíž Laplaceovo zobrazení dostáváme

(33) $$\mathscr{L}\{\gamma_\varepsilon(x)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathscr{L}\{\delta(x, \varepsilon)\} = g(s) = e^{-cs}.$$

Dosadíme-li tedy (33) do (30), obdržíme, že

(34) $$\mathscr{L}\{l_{z_{\text{krit}}}(t)\} = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \sum_{k=0}^{K} \frac{(\lambda_1 t)^k}{k!} \frac{1}{s} \left[e^{-kcs} - e^{-(k+1)cs}\right],$$

kde K je největší celé číslo určené podílem

(35) $$\left[\frac{z_{\text{krit}}}{c}\right] = K.$$

Poněvadž pak platí, že

$$\Lambda \left\{\frac{e^{-kcs}}{s}\right\} = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad z < kc, \\ 1 & \text{pro} \quad z > kc, \end{cases}$$

dostaneme pro originál $\mathscr{L}$-obrazu (34) jako výsledný vztah funkci hustoty pravděpodobnosti ve tvaru

(36) $$l_{z_{\text{krit}}}(t) = \frac{\lambda_1^{K+1}}{\Gamma(K+1)} t^K e^{-\lambda_1 t},$$

což je Pearsonova křivka III. typu.

Poznáváme tedy, že homogenní Poissonův proces poruch soudržnosti v kovech s konstantními přírůstky poškození vede na Pearsonovu křivku životnosti (36), k jejímuž určení je nutno znát 3 parametry, které lze spojit s technickou povahou lomových jevů takto:

1) průměrný počet napěťových cyklů, jejichž amplituda σ překračuje danou mez únavy σ_c, udává odhad parametru λ_1,

2) kritický rozsah poškození z_{krit}, který lze vyjádřit pomocí pevnosti, tj. napětím, jehož je zapotřebí, aby nastal lom statický,

3) velikost průměrného dílčího poškození, tj. odhad parametru c, který je úměrný vhodné mocnině amplitudy střídavých napětí σ.

K parametru λ_1, který je možno považovat za hlavní určující parametr únavového procesu, připojme, že pokud je proces střídavých napětí, vyvolávající únavu, stacionární, ergodický, s nulovou střední hodnotou, lze pro jeho odhad vycházet ze vztahu

$$\lambda_1 \approx \hat{\lambda}_1 = \frac{n_0}{2} e^{-(\sigma_c^2/2B_\sigma(0))}, \tag{37}$$

(n_0 = průměrný počet průchodů procesu $\sigma(t)$ nulovou polohou za jednotku času) resp. ze vztahu

$$\lambda_1 \approx \hat{\lambda}_1 = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\ddot{B}_\sigma(0)}{B_\sigma(0)}\right]^{\frac{1}{2}} e^{-(\sigma_c^2/2B_\sigma(0))}, \tag{38}$$

kde $B_\sigma(\tau)$ značí korelační funkci procesu střídavých napětí a σ_c mez únavy. Poznamenejme, že oba tyto vztahy udávají očekávaný počet střídavých napětí o amplitudě $\sigma > \sigma_c$, připadající na časovou jednotku, a jsou tedy spojeny s primárními procesy lomových jevů, tj. s povahou skutečných zatěžovacích procesů v době provozu. (Podrobnosti jsou uvedeny v práci [8].)

Spojení vztahů (36) a (38) nám umožňuje též rozbor únavových vlastností a životnosti s ohledem na určité, zvolené typy procesů střídavých napětí, nebo nám dovoluje zvážit vliv různých amplitud σ střídavých napětí na únavu, jestliže mechanismus únavy je vyjádřen Poissonovým homogenním procesem poruch přibližně konstantních velikostí $c = \alpha\sigma^\beta$, (tj. úměrných β-mocnině příslušné amplitudy σ).

4.2. Jednoduchý model náhlých křehkých lomů

4.21. Funkce $p_0(z, t)$

Uvažujme základní rovnici (15) v níž položme

$$\begin{aligned} \lambda_1(t) &= \text{const} = \lambda_1 \geqq 0\,, \\ \lambda_2(z) &= z\lambda_2, \quad \lambda_2 \neq 0\,, \\ \lambda_3(t) &= \lambda(t)\,, \end{aligned} \tag{39}$$

takže po dosazení a $\mathscr{L}$-zobrazení jednotlivých složek integro-diferenciální rovnice (15) obdržíme pro tento mechanismus lomu parciální lineární nehomogenní diferenciální rovnici tvaru

$$\lambda_2 \frac{\partial P_0(s, t)}{\partial s} - \frac{\partial P_0(s, t)}{\partial t} = a(s, t)\, P_0(s, t)\,, \tag{40}$$

kde

$$(41)\qquad \begin{aligned} a(s, t) &= \lambda_1[1 - g(s)] + \lambda(t)\,, \\ P_0(s, t) &= \mathscr{L}\{p_0(z, t)\}\,, \\ g(s) &= \mathscr{L}\{\gamma(z)\}\,. \end{aligned}$$

Přitom $P_0(s, t)$ vyhovuje těmto počátečním podmínkám:

$$(42)\qquad P_0(s, 0) = (P_0, s) \equiv 0 \quad \text{pro všechna} \quad s \geqq 0\,,$$
$$P_0(0, t) = P_0(t),\ t \geqq 0,\ \text{ nabývá hodnot } \ 0 \leqq P_0(t) \leqq 1\,.$$

Řešení rovnice (40) lze převést na řešení Cauchyho úlohy pro parciální lineární homogenní rovnice a platí pro ně (viz [7]) vztah

$$(43)\qquad P_0(s, t) = e^{-\lambda_1 t - \int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\, e^{\lambda_1/\lambda_2 \int_s^{s+\lambda_2 t} g(\tau)\mathrm{d}\tau}\,.$$

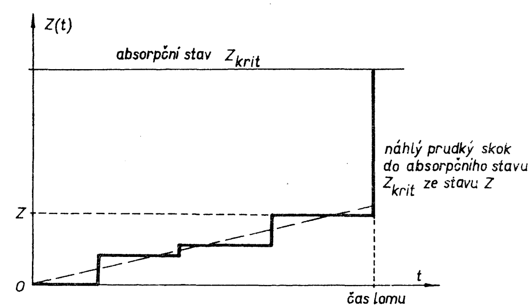
Funkce $p_0(z, t)$ je tedy dána jako originál k Laplaceově obrazu ve tvaru (43), tj. platí pro ni

$$(44)\qquad p_0(z, t) = e^{-\lambda_1 t - \int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\, \Lambda\,\{e^{\lambda_1/\lambda_2 \int_t^{s+\lambda_2 t} g(\tau)\mathrm{d}\tau}\}\,,$$

přičemž

$$\lambda_1 \geqq 0\,, \quad \lambda_2 \neq 0\,.$$

Pro názornost a grafickou představu uvažovaného mechanismu náhlého křehkého lomu uvádíme ještě závěrem schematický obr. 2.



Obr. 2.

4.22. Životnost při náhlých křehkých lomech

Životnost při procesech únavy, charakterisovaných náhlým skokem do absorpční bariéry, jak je to schematicky naznačeno pro proces $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ na obr. 2, bude popsána inversním procesem $\{T(z) : 0 \leqq z \leqq z_{\text{krit}}\}$ a k němu přináležejícími funkcemi $L_{z_{\text{krit}}}(t)$ a $l_{z_{\text{krit}}}(t)$. Ze vztahů (8) až (12) spolu se vztahem (25) lze pro ně odvodit, že

$$\mathscr{L}\{L_{z_{\text{krit}}}(t)\} = \frac{1}{s}\,[1 - P_0(s, t)]\,,$$

čili

$$(45)\qquad L_{z_{\text{krit}}}(t) = 1 - e^{-\lambda_1 t - \int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau}\, \Lambda \left\{\frac{1}{s}\, e^{(\lambda_1/\lambda_2)\int_s^{s+\lambda_2 t} g(\tau)\mathrm{d}\tau}\right\},$$

a podobně

$$\mathscr{L}\{l_{z_{\text{krit}}}(t)\} = -\frac{1}{s}\frac{\partial P_0(s, t)}{\partial t},$$

čili

$$\mathscr{L}\{l_{z_{\text{krit}}}(t)\} = \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{s}\, e^{-\lambda_1 t - \int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau + (\lambda_1/\lambda_2)\int_s^{s+\lambda_2 t} g(\tau)\mathrm{d}\tau}\right). \tag{46}$$

Připomeňme však, že lze kromě vztahů (45) a (46) použít k určení funkcí životnosti $L_{z_{\text{krit}}}(t)$ a $l_{z_{\text{krit}}}(t)$ tohoto obratu:

O funkci $p_0(z, t)$ byl učiněn předpoklad, že pro všechna $z > z_{\text{krit}}$ a všechna $t \neq 0$ se identicky rovná 0. Můžeme tedy psát, že

$$\int_0^\infty p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{z_{\text{krit}}} p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta + \int_{z_{\text{krit}}}^\infty p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta = \int_0^{z_{\text{krit}}} p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\,. \tag{47}$$

Dosadíme-li tedy (47) do vztahu (8), dostáváme, že

$$L_{z_{\text{krit}}}(t) = 1 - \int_0^\infty p_0(\zeta, t)\,\mathrm{d}\zeta\,, \tag{48}$$

kde za $p_0(\zeta, t)$ uvažujme vztah (44).

Připomeňme si, že $\mathscr{L}$-zobrazení funkce $p_0(z, t)$ vzhledem k proměnné z je definováno vztahem

$$\int_0^\infty e^{-sz} p_0(z, t)\,\mathrm{d}z = P_0(s, t)\,, \tag{49}$$

které za předpokladu, že $p_0(z, t)$ je vhodná exponenciální funkce, může být definováno i pro čísla s, jichž

$$\mathscr{Re}\, s \leqq 0\,, \quad \mathscr{Im}\, s = 0\,.$$

Uvažujeme-li tedy krajní případ, kdy $\mathscr{Re}\, s = 0$, potom

$$\lim_{s \to 0} P_0(s, t) = P_0(0, t) = \int_0^\infty p_0(z, t)\,\mathrm{d}z\,, \tag{50}$$

takže distribuční funkce délek životů $L_{z_{\text{krit}}}(t)$ může být na základě vztahů (48) a (50) definována vztahem

$$L(t) = 1 - P_0(0, t) = 1 - e^{-\lambda_1 t - \int_0^t \lambda(\tau)\mathrm{d}\tau + (\lambda_1/\lambda_2(\int_0^{\lambda_2 t} g(\tau)\mathrm{d}\tau}\,. \tag{51}$$

Obecně pak platí, že lze distribuční funkci délek životů τ vyjádřit ve tvaru

$$L(t) = 1 - e^{-\int_0^t \mu(\tau)\mathrm{d}\tau}, \tag{52}$$

kde $\mu(\tau)$ je tzv. intensita úmrtnosti při lomových jevech.

Porovnáním vztahů (52) a (51) tedy dostáváme, že intensita úmrtnosti při lomových jevech náhlého charakteru je dána vztahem

$$\mu(t) = \lambda_1 + \lambda(t) - \lambda_1\, g(\lambda_2 t)\,, \tag{53}$$

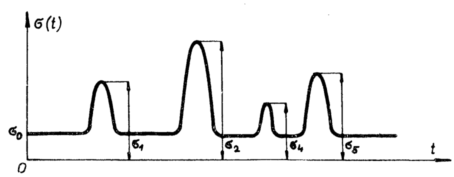
kde

$$g(s) = \mathscr{L}\{\gamma(z)\} = \int_0^\infty e^{-sz}\,\gamma(z)\,\mathrm{d}z\,,$$

$$\lambda_1 = \text{konstanta} \geqq 0\,,$$

$$\lambda_2 = \text{konstanta} \neq 0\,.$$

Příklad 2. Uvažujme primární proces lomového jevu, tj. časový průběh působícího napětí $\sigma(t)$, jenž odpovídá náhodnému procesu, jehož jedna realisace je znázorněna na obr. 3. Z ní vyplývá, že dochází k jakýmsi krátkodobým napěťovým špičkám $\sigma_j > 0$, kde jak výskyt špiček v čase, tak i jejich velikost, jsou veličiny náhodně proměnlivé.



Obr. 3.

a) Předpokládejme, že napěťové špičky σ_j $(j = 1, 2, \ldots, k(t))$ jsou veličinami napozorovanými na náhodné veličině σ, jejíž hustota pravděpodobnosti je dána funkcí ve tvaru

$$h(\sigma) = a e^{-a\sigma} \tag{54}$$

$$(0 \leqq \sigma < \infty\,, \quad a > 0)\,.$$

Předpokládejme dále, že každá ze špiček σ_j vyvolá v procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ skokový přírůstek poškození ξ_j, pro nějž lze v první aproximaci předpokládat přímou úměrnost, takže uvažujeme jednoduchou lineární transformaci proměnné σ, tj.

$$\xi = \alpha\sigma\,, \quad (\alpha > 0)\,. \tag{55}$$

Ze vztahů (54) a (55) můžeme tedy odvodit, že hustota pravděpodobnosti $\gamma(x)$, vystupující v modelu procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, je za uvažovaného předpokladu (55) dána vztahem

$$\gamma(x) = \frac{1}{\alpha}\, h\left(\frac{x}{\alpha}\right) = \frac{a}{\alpha}\, e^{-(a/\alpha)x}\,, \tag{56}$$

takže $\mathscr{L}$-zobrazení funkce $\gamma(x)$ nás přivádí ke vztahu

$$g(s) = \mathscr{L}\{\gamma(x)\} = \frac{a}{\alpha}\,\frac{1}{s + a/\alpha}\,. \tag{57}$$

b) O procesu krátkodobých špiček $\sigma(t)$, (viz obr. 3), dále předpokládejme, že pro jejich uskutečňování lze uvažovat homogenní Poissonův proces, takže udává-li v počet špiček, které nastanou v intervalu časovém $(0, t)$, je tato náhodná veličina popsána frekvenční funkcí $p_v(t)$ ve tvaru

$$p_v(t) = \frac{(\lambda t)^v}{v!} e^{-\lambda t} \tag{58}$$

$$(v = 0, 1, 2, \ldots, \lambda \geqq 0, t \geqq 0).$$

Parametr λ tohoto rozložení lze pak interpretovat jako průměrný počet špiček, připadající na jednotku času. Můžeme jej v dalším považovat za odhad parametru λ_1, který udává intensitu pravděpodobnosti přechodu v procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$, a má tudíž vztah ke změnám stavu typu a) v procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$.
Platí tedy

$$\lambda = \lambda_1 = E(v) = \bar{v}. \tag{59}$$

c) Poslední předpoklad, který učiníme o realisaci procesu $\{Z(t) : t \geqq 0\}$ se týká stavových změn typu b). Předpokládejme, že náhlý skok za stavu $z \in \langle 0, z_{\text{krit}})$ je přímo úměrný pouze tomuto stavu, takže platí pro funkci $\lambda(z, t)$ jednoduchý vztah

$$\lambda(z, t) = z, \quad (\lambda_3(t) \equiv 0, \lambda_2 = 1). \tag{60}$$

Vycházíme-li nyní z předpokladů (57), (59) a (60), dostáváme pro proces $\{Z(t) : : t \geqq 0\}$ vztah

$$\begin{aligned} P_0(s, t) &= e^{-\bar{v}t} e^{\bar{v}(a/\alpha)\int_s^{s+t}(\tau+(a/\alpha))^{-1}\mathrm{d}\tau} = \\ &= e^{-\bar{v}t+\bar{v}(a/\alpha)\lg(s+(a/\alpha)+t)/(s+(a/\alpha))} = \\ &= e^{-\bar{v}t}\left(1 + \frac{t}{s + a/\alpha}\right)^{\bar{v}(a/\alpha)}. \end{aligned} \tag{61}$$

Na základě vztahu (51) můžeme tedy ze vztahu (61) odvodit pro distribuční funkci délek životů, že

$$\begin{aligned} L(t) &= 1 - P_0(0, t) = 1 - e^{-\bar{v}t+(a\bar{v}/\alpha)\int_0^t(\tau+(a/\alpha)^{-1}\mathrm{d}\tau} = \\ &= 1 - e^{-\bar{v}t}\left(e^{\lg(t+(a/\alpha)/(a/\alpha)}\right)^{a\bar{v}/\alpha} = \\ &= 1 - e^{-\bar{v}t}\left(\frac{t + a/\alpha}{a/\alpha}\right)^{a\bar{v}/\alpha}. \end{aligned} \tag{62}$$

Intensita selhání při uvedeném mechanismu lomového jevu je tedy dána vztahem

$$\mu(t) = \bar{v}\left(1 - \frac{a/\alpha}{t + a/\alpha}\right) = \bar{v}\frac{t}{t + a/\alpha}, \tag{63}$$

$$(a > 0, \alpha > 0, \bar{v} > 0, t \geqq 0)$$

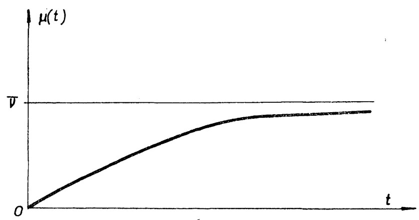
z něhož vyplývá, že

$$\lim_{t \to 0+} \mu(t) = 0 . \tag{64}$$

$$\lim_{t \to \infty} \mu(t) = \bar{v} .$$

To tedy znamená, že intensita $\mu(t)$ je v daném případě rostoucí funkcí času, která má za asymptotu rovnoběžku s osou t o rovnici $\mu(t) = \bar{v}$. Schematicky je tato funkce znázorněna na obr. 4.

Poznámka. V konkrétních případech výše uvedeného modelu bude většinou vhodné předpokládat, že skokové přírůstky ξ_j jsou úměrné energii napjatosti. Jestliže tedy uvažujeme krátkodobé špičky napětí velikosti σ_j, platí pro energii napjatosti ε_j od jednotlivých špiček σ_j, že



Obr. 5.

$$\varepsilon_j \approx \text{const}\, \sigma_j^2 , \quad (j = 1, 2, \dots, k(t)) ,$$

takže namísto transformace (55) zavedeme transformaci proměnné σ ve tvaru

$$\xi = \text{const}\, \varepsilon = \beta \sigma^2 \tag{65}$$

$$(\beta = \text{konstanta} > 0) .$$

Za daného předpokladu dostáváme pro hustotu pravděpodobnosti $\gamma(x)$ náhodné proměnné ξ nový vztah

$$\gamma(x) = \beta^{-\frac{1}{2}} h\left(\sqrt{\frac{x}{\beta}}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{a x^{-\frac{1}{2}}}{2\sqrt{\beta}}\, e^{-(a/\sqrt{\beta}) x^{1/2}} . \tag{66}$$

V další analyze mechanismu lomu bychom tedy za předpokladu (65) museli uvažovat namísto dřívějšího vztahu (56) pro $\gamma(x)$ vztah nový, označený jako (66).

Z dosavadních výsledků experimentálního výzkumu šíření únavové trhliny je možno vyvodit závěr, že náhodná proměnná ξ má v obecných případech křehkých lomů Γ-rozložení, s hustotou pravděpodobnosti tvaru

$$\gamma(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)}\, x^{b-1}\, e^{-ax} \tag{67}$$

$$(x \geqq 0,\ a > 0,\ b \geqq 1) .$$

takže Laplaceovo zobrazení funkce $\gamma(x)$ je tvaru

$$g(s) = \frac{a^b}{(s + a)^b} . \tag{68}$$

V tomto případě je pak intensita selhání za daného mechanismu lomu definována funkcí $\mu(t)$ ve tvaru

$$\mu(t) = \bar{v}\left[1 - \frac{a^b}{(t + a)^b}\right], \tag{69}$$

který odpovídá celé řadě mechanismů lomových jevů strojírenské praxe.

5. ZÁVĚR

V článku byly objasněny teoretické základy stochastického výkladu mechanismu únavových lomů a příslušné modely životnosti. Teorie byla vyložena tak, aby v sobě obsáhla též nejnovější poznatky experimentálního výzkumu, směřujícího k poznání, jak se šíří nespojitosti a vytvářejí trhliny, které se pak pod vlivem dynamických sil dále rozrůstají, až ve svém závěru končí lomem. Přitom je možno považovat tuto teorii též za průpravu pro výklad obecných procesů stárnutí, pokud je možno tyto procesy charakterisovat veličinou, závislou na nějakém parametru (např. radioaktivní rozpad, procesy opotřebení, ubývání pevnostní únosnosti atd.). Realisace výsledků zde vyložené teorie při výkladu lomů v kovech může být tedy považována za jeden případ možných aplikací na strojírenskou praxi.

Literatura

[1] *Cramer Harald:* Collective Risk Theory, The Jubilee Volume Skandia Insurance Company 1955.

[2] *Birnbaum Z. W., Saunders S. C.:* A Statistical Model for Life-Length of Materials", JASA, March 1958, Vol. 55.

[3] *Mercer A., Smith C. S.:* A Random Walk in which the Steps Occur Randomly in Time, Biometrika, June 1959, Part 1, 2.

[4] *Sedláček J., Režný Z.:* Výzkum únavových vlastností materiálů valivých ložisek metodami matematické statistiky, Výzkumná zpráva SVÚTT-59-01014.

[5] *Sedláček J., Režný Z.:* Úvod do statistické teorie podobnosti pří řešení otázek pevnosti, Výzkumná zpráva SVÚTT-60-01016.

[6] *Sedláček J.:* Statistická interpretace fysikálních a mechanických vlastností kovů a výrobků, Sborník konference KAMS, 15.—17. května 1962, Liblice u Prahy.

[7] *Sedláček J.:* Stochastické modely procesu vývoje poruch ve struktuře kovů, Výzkumná zpráva SVÚTT-62-01028.

[8] *Sedláček J.:* Únavová životnost při stochastickém kmitání lineárních mechanických soustav, Výzkumná zpráva SVÚTT-63-01019.

[9] *Němec J.:* Studium šíření únavových trhlin v tělesech, Strojírenství, 12, 1962, čís. 5.

[10] *Serensen S. V., Kogajev V. P.:* Statistické zákonitosti podobnosti při únavových lomech, Strojírenství, 13, 1963, čís. 9.

[11] *Frost N. E.:* The Propagation of Fatigue Cracks in Various Sheet Materials, National Engineering Laboratory Report, AB, Div. No 50/58.

Резюме

АДДИТИВНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ НАЛИЧИИ СЛУЧАЙНЫХ СКАЧКОВ В БАРЬЕР АБСОРПЦИИ И ИХ ПРИМЕНЕНИЕ К ИЗЛОЖЕНИЮ ЯВЛЕНИЙ ИЗЛОМА В МЕТАЛЛАХ

ЯН СЕДЛАЧЕК (JAN SEDLÁČEK)

В статье описаны теоретические основы статистической интерпретации явлений излома в металлах, при объяснении которых используется теория стохастических процессов. Главное внимание уделяется самой сущности явлений излома, т. е. процессу кумуляции повреждений; стохастическое объяснение дает возможность выразить действительную природу механизма изломов и состояние излома. Одновременно обращено внимание на связь между статистическим процессом постепенного повреждения сртуктуры металлов и между действительной природой внешних процессов нагрузки и на то, чтобы способствовать решению более общих проблем усталостных явлений конструктивных частей машин во время эксплуатации, т. е. во время их службы.

Далее выводится основное уравнение Феллера-Колмогорова, выражающее стохастический процесс кумуляции повреждений, которое дает не только описание постепенного возрастания изломовых трещин, но также описание внезапного образования изломов. Таким образом дано объяснение не только усталостных изломов, но и других изломов, имеющих место в практике машиностроения.

Что касается описания усталостных свойств металлов, из основного уравнения стохастического процесса кумуляции повреждений выводятся функции плотности вероятности, отнесенные к распределению сроков в абсорпцию процесса, которые соответствуют срокам долговечности. Эти функции, определенные в результате уже упомянутого уравнения Феллера-Колмогорова, содержат все те параметры, которые более конкретно определяют процесс нагрузки и во время работы или относятся к основным показателям прочности металлов. Таким образом есть возможность решить усталостные проблемы механических конструкций, что является главной целью в приложениях решения задачи.

Summary

ADDITIVE PROCESSES WITH RANDOM JUMPS INTO THE ABSORPTION BARRIER AND THEIR APPLICATION TO FATIGUE IN METALS

JAN SEDLÁČEK

The paper deals with the theoretical foundations of the statistical interpretation of fracture phenomena in metals using stochastic process theory. The main interest is concentrated on the nature of fracture phenomena, e.g. on the process of damage accumulation, the stochastic interpretation of which enables the real nature of the fracture mechanism to be expressed. At the same time an attempt is made to relate the stochastic development of successive damage of the metallic structure to the external loading processes. This approach makes possible the solution of more general problems dealing with the fatigue of structural components in operation e.g. while in service.

The basic eguation of the Feller-Kolmogorov type is derived expressing the stochastic process of damage accumulation; this egation makes possible a description of the gradual growth of a fatigue crack and also of the development of a fracture due to a sudden violent change. Thus not only fatigue fractures may be interpreted but also other types of fractures encountered in the field of mechanical engineering.

As far as the final purpose of the description of fracture properties of materials is concerned, from the basic equation relating to the stochastic process of damage accumulation there are derived the probability density functions relating to the distribution of times to absorption; these times correspond to the lives of components. These functions, determined by the solution of the above Feller-Kolmogorov equation, contain all the parameters which describe the loading process during service time and are related to the basic strength characteristics of the metals. In this way it becomes possible to solve the problem of service fatigue of mechanical structures which is the main purpose of application of the described theory.

Adresa autora: Jan Sedláček, Státní výzkumný ústav tepelné techniky, Husova 8, Praha 1.