Iva Karasová; Arnošt Kessler

Stationäre eindimensionale Wärmeströmung in n-Körpersystemen mit innerer Wärmeentwicklung. I

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 3, 211–223

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103018

STATIONÄRE EINDIMENSIONALE WÄRMESTRÖMUNG IN n-KÖRPERSYSTEMEN MIT INNERER WÄRMEENTWICKLUNG. I.

I. KARASOVÁ, A. KESSLER

(Eingegangen am 12. Juni 1964.)

EINLEITUNG

Unter den bislang veröffentlichten gelössten Wärmeleitungs-Aufgaben finden wir nur ganz vereinzelt Probleme der Wärmleitung in Mehrkörpersystemen. Ob nun der Grund hiefür in der Kompliziertheit solcher Aufgaben oder im Mangel an praktischen Impulsen zu suchen ist: Unter den Aufgaben, die die moderne Technik mit sich gebracht hat gibt es eine Reihe solcher Probleme. Als Beispiel seien z.B. das Wärmeproblem der elektrischen Maschine und die Wärmeabgabe bei verschiedenen Kernreaktoren genannt.

In der folgenden Arbeit wollen wir zeigen, dass im Falle dass die Wärmeleitung in einem n-Körpersystem mittels eindimensionaller Wärmeleitungsgleichungen beschrieben werden kann, leicht eine allgemeine Lösung gefunden und numerisch ausgewertet werden kann, unter gewissen Einschränkungen zwar, die in der Praxis jedoch, wie es scheint, keine Rolle spielen werden.

Wir wollen dabei versuchen eine möglichst allgemeine Formulation zu finden, die den häufigst vorkommenden Aufgaben Rechnung trägt.

ÜBERSICHT DER BENUTZTEN SYMBOLE

h, h^*	Wärmeübergangszahl der Staboberfläche, am Stabende
p, p_μ	Parameter, Eigenwerte
S	Stabquerschnitt
$T, T(x)$	Temperatur, Temperatur an der Stelle x
T_0, T_{01}	Temperatur der Umgebung
x	Längskoordinate
$\alpha_i, \beta_i, \alpha$	Konstanten, Temparaturkoefficient
$\mu, \varkappa, i, k$	Indizes
λ	Wärmeleitzahl
$\sum_{k=1}^{n}{}' a_{ik}$	Summation über alle k mit Ausnahme von $k = i$

l Stabhänge
O Stabumfang
z Spezifische Wärmeentwicklung

FORMULATION DES PROBLEMS

Wenn wir von einer eindimensionalen Wärmeleitungsaufgabe sprechen, heisst dies soviel, als dass wir lediglich den Temperaturverlauf in einer Richtung in Betracht ziehen. Eine solche Aufgabe kann dann bildlich als Wärmeleitung in einem Stab oder einer Platte dargestellt werden. Als allgemeinsten Fall eindimensionaler Wärmeleitung können wir darum die Wärmeleitung in einem Stab betrachten, in dem sich Wärme entwickelt und der an der Oberfläche und an den Endflächen gekühlt (oder erwärmt) wird. Da wir die Wärmeleitzahl und Wärmeantwicklung in dieser Arbeit als von der Temperatur unabhängig ansehen, wird die Wärmeleitung, im Falle dass der Querschnitt des Stabes veränderlich ist, durch folgende Differentialgleichung beschrieben

$$\lambda S \frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} + \lambda \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} \frac{\mathrm{d}T(x)}{\mathrm{d}x} - Oh[T(x) - T_0] = -Sz\,, \tag{1}$$

die sich im Falle eines konstanten Stabquerschnittes zu

$$\frac{\mathrm{d}^2 T(x)}{\mathrm{d}x^2} - H[T(x) - T_0] = -w \tag{2}$$

mit $H = hO/\lambda S$ und $w = z/\lambda$ vereinfacht. Der Ausdruck $H[T(x) - T_0]$ berücksichtigt dabei die Wärmeabgabe von der Staboberfläche an die Umgebung. Lassen wir (1) einstweilen ausser Betracht und versuchen wir die Wärmeleitung in zwei parallelen Stäben zu beschreiben, die an den Berührungsflächen Wärme austauschen (Abb. 1a). Setzen wir sinngemäss in (2) für h die Wärmeübergangszahl, die den Wärmeaustausch zwischen beiden Stäben charakterisiert, ein, für O die Breite der Kontaktfläche beider Stäbe und für T_0 die Temperatur des zweiten Stabes, so wird (2) die Wärmeleitung im ersten der beiden Stäbe beschreiben. Für λ, S und z sind natürlich die für den ersten Stab geltenden Werte einzusetzen. Desgleichen gilt für den zweiten Stab. Im Falle mehrerer paralleler Stäbe (Abb. 1b), die alle mit einem von ihnen auf die beschriebene Art Wärme austauschen, also thermisch gekoppelt sind, würden für diesen Stab zusätzlich weitere Glieder der Form $H_i(T - T_i)$ in (2) auftreten, die den bezüglichen Wärmeaustausch mit den einzelnen Stäben berücksichtigen usw. Der Index bezeichnet die einzelnen Stäbe. In jeder der Wärmeleitungsgleichungen treten also ausser der unbekannten Temperatur des betreffenden Stabes auch noch die unbekannten Temperaturen derjenigen Stäbe auf, mit denen der Stab thermisch „parallel" gekoppelt ist.

Haben wir es hingegen mit zwei Stäben zu tun, die mit ihren Endquerschnitten zusammengefügt sind, wobei jeder der beiden Stäbe an der Oberfläche beliebig gekühlt sein kann (verschiedene Temperatur der Umgebung oder verschiedene Wärmeübergangszahlen usw.), so gilt für jeden eine Differentialgleichung der Form (2), in der als Unbekannte lediglich die Temperatur des betreffenden Stabes vorkommt. Für beide Gleichungen werden aber zwei gemeinsame Randbedingungen vorgeschrieben sein.

Aus diesen Erwägungen folgt schliesslich, dass die Wärmeleitung in einem beliebigen System von n Stäben und Platten, die teils parallel, teils hintereinander

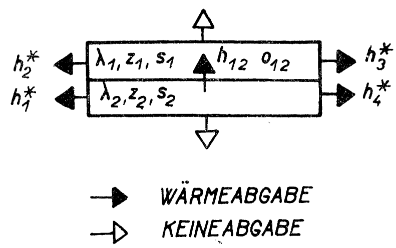

Abb. 1a.

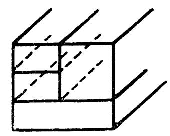

Abb. 1b.

angeordnet sind, mittels eines Systems von eindimensionalen Wärmeleitungsgleichungen beschrieben werden wird. Dabei werden die einzelnen Gleichungen des Systems, die teilweise simultan (für die „parallel" angeordneten Stäbe) und teilweise von einander unabhängig (für die hintereinander angeordneten Stäbe) seien je nach Umständen

$$(3) \qquad \frac{d^2T_i}{dx^2} - \sum_{k=1}^{n} H_{ik}T_i + \sum_{k=1}^{n}{}' H_{ik}T_k = -w_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

mit $H_{ik} = h_{ik}O_{ik}/\lambda_i S_i$ und $w_i = z_i/\lambda_i + H_{ii}T_0$. Es sei dabei vermerkt, dass $h_{ik}O_{ik} = h_{ki}O_{ki}$ ist, jedoch $H_{ik} \neq H_{ki}$. Der Doppelindex ii bezeichnet den Wärmeübergang in das den i-ten Stab umgebende Medium. Der Ausdruck $H_{ii}T_0$ wurde auf die rechte Seite überführt, damit die linke Seite ausschliesslich nur die unbekannten Temperaturen T_i und T_k enthalte[1]). Im konkreten Falle wird der Koeffizient mit dem Index ik in Gl. (3) dann aufscheinen, wenn es zwischen dem „parallelen" i-ten und k-ten Stab zum Wärmeaustausch kommt, d.h. wenn diese thermisch gekoppelt sind. Sind die Stäbe i und k dagegen ohne thermischen Kontakt, ist der Wert von H_{ik} Null.

[1]) Es sei noch bemerkt, dass in dem vom praktischen Gesichtspunkt aus recht wichtigen Falle, wo die Wärmeentwicklung linear von der Temperatur abhängt, $z_i = z_{0i}(1 + \alpha T_i)$, Gl. (3) gleichfalls zutrifft mit $(\sum_{k=1}^{n} H_{ik} - z_{0i}\alpha/\lambda_i)\, T_i$ auf der linken Seite.

Vom mathematischen Gesichtspunkt aus können wir die Randbedingungen im Falle der eindimensionalen Wärmeleitung ganz allgemein wie folgt ausdrücken

$$\left\{H^*(T - T_0) + \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\right\}_{x=0,l} = 0\,, \quad H^* = \frac{h^*}{\lambda}\,. \tag{4}$$ [2])

Multiplizieren wir (4) mit λ, sind in dieser Formulation alle praktisch in Betracht kommenden Randbedingungen eingeschlossen, wobei im Einzelfalle diese oder jene Grösse besondere Werte, unter anderem Null annehmen kann. T_0 bedeutet wiederum die Temperatur der Umgebung, die allerdings nicht unbedingt den gleichen Wert wie in (3) haben muss. Es ist der thermische Kontakt zwischen zwei Stabenden, also zwischen zwei Stäben, die hintereinander geordnet sind, mit einem Kontaktwiderstand verbunden, so erhalten wir zwei Gleichungen der Form (4), wo für T_0 jeweils die Temperatur des anderen Stabes im Endquerschnitt einzusetzen ist,

$$\left\{H^*_{ik}(T_i - T_k) + \frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}x}\right\}_{\text{Kontaktfläche}} = 0\,, \quad H^*_{ik} = \frac{h^*_{ik}}{\lambda_i}\,.$$

Da gleichzeitig ohne Rücksicht auf H^*_{ik}

$$\left\{\lambda_i \frac{\mathrm{d}T_i}{\mathrm{d}x} = \lambda_k \frac{\mathrm{d}T_k}{\mathrm{d}x}\right\}_{\text{Kontaktfläche}} \tag{4a}$$

gelten muss und im Falle eines „idealen" Kontaktes der Stabenden $\{T_i = T_k\}_{\text{Kontaktfläche}}$ gilt, liefern die letzteren beiden Beziehungen die Randbegingungen für den Fall „idealen" Kontaktes.

Im Falle dass wir es ausschliesslich mit parallel aneinander gereihten Stäben und Platten zu tun haben, wo das Gleichungssystem (3) ein ausschliesslich simultanes sein wird, können auch bloss die Temperaturen der Stabenden vorgeschrieben sein. In diesem Falle lauten die Randbedingungen

$$\{\boldsymbol{T}(x)\}_{x=0,l} = \boldsymbol{T}_{01,02}\,. \tag{4b}$$

Fassen wir das Gesagte zusammen, so können wir unter Benutzung der Matrizenschreibweise die Wärmeleitung im ganzen n-Körpersystem mit der Matrizengleichung

$$\mathbf{E}\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{T}(x)}{\mathrm{d}x^2} - \mathbf{H}\,\boldsymbol{T}(x) = -\boldsymbol{W}\,, \tag{5}$$

wo

$$\boldsymbol{T}(x) = \begin{pmatrix} T_1(x) \\ T_2(x) \\ \vdots \\ T_n(x) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} H_{1k} & -H_{12} & -H_{13}, \ldots \\ -H_{21} & \sum\limits_{k=1}^{n} H_{2k} & -H_{2k}, \ldots \\ & \vdots & \end{pmatrix}, \quad i, k = 1, 2, \ldots, n$$

[2]) Es ist zu beachten, dass h^*, λ und l hier, sowie in (4b) und (6) im Allgemeinen für jede einzelne Gleichung einen anderen Wert besitzen wird.

und

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} w_1 + H_{11} T_0 \\ \vdots \\ w_n + H_{nn} T_0 \end{pmatrix}$$

ist, beschreiben. Die Randbedingungen können dann in der Form

$$\left\{ \mathbf{E} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{T}(x)}{\mathrm{d}x} + \mathbf{H}^* \boldsymbol{T}(x) \right\}_{x=0,l} \equiv konst \tag{6}$$

ausgedrückt werden, wobei $\mathbf{H}^*$ wiederum eine Matrix der Koeffizienten H^*_{ik}, $i, k = 1, 2, \ldots, n$ bezeichnet.

ALLGEMEINE LÖSUNG DES EINDIMENSIONALEN WÄRMELEITUNGS-GLEICHUNGSSYSTEMS

Wir wollen uns nun der Lösung des Gleichungssystems (5) unter den Randbedingungen (6) zuwenden. Setzen wir voraus, dass die Lösungsfunktionen $\boldsymbol{T}(x)$ für alle positiven Werte von x die notwendigen Bedingungen für die Durchführbarkeit der Laplaceschen Transformationen erfüllen werden und führen wir die Laplacesche Transformation der Gleichung (5) durch. Wie man sich leicht überzeugen kann, indem man die Transformation Zeile für Zeile durchführt, erhalten wir

$$(p^2 \mathbf{E} - \mathbf{H}) \, \boldsymbol{T}(p) = p\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} - \frac{\mathbf{W}}{p}, \tag{7}$$

wo

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

die bezüglichen Grenzwerte der Lösung und ihrer ersten Ableitung im Koordinatenanfang von rechts sind. Gl. (7) stellt ein System algebraischer Gleichungen dar, in dem die Bildfunktionen der gesuchten Lösungsfunktionen $T_i(p)$ als Unbekannte auftreten. Bezeichnen wir den Determinanten der Koeffizienten-Matrix dieses Gleichungssystems $(p^2 \mathbf{E} - \mathbf{H})$, welcher ein Polynom in p ist, mit $D(p)$, dann muss für die Bildfunktionen der Lösungsfunktionen ganz allgemein

$$T_i(p) = \frac{D_i(p)}{p\, D(p)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

gelten, wo unter $D_i(p)$ der Determinant $D(p)$, bei welchem die mit p multiplizierte Spalte durch die rechte Seite von (7) ersetzt wurde, zu verstehen ist.

Die allgemeine Lösung von (5) kann daher an Hand der komplexen Unkehrformel der Laplaceschen Transformation als komplexes Integral dargestellt werden

$$(9) \qquad T_i(x) = L^{-1}\left\{\frac{D_i(p)}{p\,D(p)}\right\} = \frac{1}{2\pi i}\int_{r-it}^{r+it}\frac{D_i(\zeta)}{\zeta\,D(\zeta)}\,e^{\zeta x}\,\mathrm{d}\zeta\,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, n \quad \text{und} \quad \zeta = r + it\,,$$

wo die Integration entlang der Geraden r = konst. durchzuführen ist. Die Lage dieser Geraden ist so zu wählen, dass alle Pole von $D_i(\zeta)/\zeta\,D(\zeta)$ links von der Geraden zu liegen kommen usw. In (9) wurde die Veränderliche unter dem Intergalzeichen mit ζ anstatt mit p bezeichnet, um zu betonen, dass wir p als komplexe Veränderliche betrachten.

Der Determinant $p\,D(p)$ ist $2n + 1$ Grades in p, $D_i(p)$ aber nur $2n$-ten Grades. (8) kann daher unmittelbar zwecks Berechnung von (9) in Patialbrüche zerlegt werden. Zu diesem Zwecke drücken wir $p\,D(p)$, d.h. den charakteristischen Determinanten des Systems, multipliziert durch p als Polynom der bezüglichen Eigenwerte aus,

$$(10) \qquad p\,D(p) = p(p^2 - p_1^2)(p^2 - p_2^2)\ldots(p^2 - p_n^2)\,.$$

Es soll an diesen Stelle betont werden, dass wir uns lediglich auf die Behandlung des Falles realer Eigenwerte beschränken wollen. Diese kommen in der Praxis am häufigsten vor und wir sind bei Aufgaben, wie sie hier behandelt werden, praktisch noch niemals auf komplexe Wurzeln gestossen.

Der Beziehung (10) entsprechen dann sowohl positive als auch negative Werte p_i (die sich aus der Lösung der Gleichung $p\,D(p) = 0$ ergeben). Bezeichnen wir die positiven Eigenwerte p_μ, die negativen $p_{-\mu}$ und den Eigenwert Null als p_0. In praktischen Fällen hat die Gleichung $p\,D(p) = 0$ nur einfache Wurzeln. Dann kann die Zerlegung in Partialbrüche wie folgt angeschrieben werden

$$T_i(p) = \sum_{\mu=-n}^{n}\frac{D_i(p_\mu)}{[p\,D(p)]^{(1)}_{p=p_\mu}}\cdot\frac{1}{(p - p_\mu)}\,,$$

wo $[p\,D(p)]^{(1)}$ die erste Ableitung nach p bezeichnet. Setzen wir diesen Ausdruck für $T_i(p)$ in (9) ein, können wir ohne Weiteres den Wert des Integrals, d.h. die $2\pi i$ fache Summe der Residua in den Polen p_μ und damit die gesuchte allgemeine Lösung, angeben

$$(11) \qquad T_i(x) = L^{-1}\left\{\frac{D_i(p)}{p\,D(p)}\right\} = \sum_{\mu=-n}^{n}\frac{D_i(p_\mu)}{[p\,D(p)]^{(1)}_{p=p_\mu}}\,e^{p_\mu x}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Die Gültigkeit von (11) ist durch den Auschluss mehrfacher Wurzeln und dadurch, dass $D_i(p)$ ein Polynom niederen Grades als $p\,D(p)$ ist, sichergestellt (siehe z.B. Churchill [1] Absch. 20). Auch im Falle mehrfacher Wurzeln können wir die Lösung auf die beschriebene Weise berechnen. Wir müssen nur den bezüglichen Ausdruck für die Partialbruchzerlegung benutzen.

Die rechte Seite von (11) kann (durch aufteilen von $D_i(p)$) in drei Determinanten zerlegt werden: Einen mit der i-ten Spalte $p^2\boldsymbol{\alpha}$, einen zweiten mit der i-ten Spalte $p\boldsymbol{\beta}$ und schliesslich einen dritten mit der i-ten Spalte $-\mathbf{W}$. Wir bezeichnen diese Determinanten sinngemäss $D_i(p;\, p^2\boldsymbol{\alpha})$, $D_i(p;\, p\boldsymbol{\beta})$ und $D_i(p;\, -\mathbf{W})$. Bedenken wir, dass $D_i(p;\, p^2\boldsymbol{\alpha})$, $D_i(p;\, -\mathbf{W})$ und $[p\, D(p)]$ gerade Funktionen von p sind, wohingegen $D_i(p;\, p\boldsymbol{\beta})$ eine ungerade Funktion von p ist und dass

$$[p\, D(p)]^{(1)}_{p=po} = D(o) = (-1)^n \prod_{\mu=1}^{n} p_\mu^2$$

und

$$[p\, D(p)]^{(1)}_{p=\pm p_\mu} = 2p_\mu^2 \left\{\frac{D(p)}{p^2 - p_\mu^2}\right\} = 2p_\mu^2 \prod_{\kappa=1}^{\mu-1} (p^2 - p_\kappa^2) \prod_{\kappa=\mu+1}^{n} (p^2 - p_\kappa^2)$$

ist, so können wir (11) wie folgt umformen

(12)

$$T_i(x) = \sum_{\mu=-n}^{+n} \frac{D_i(p_\mu;\, p_\mu^2\boldsymbol{\alpha}) + D_i(p_\mu;\, -\mathbf{W}) + D_i(p_\mu;\, p_\mu\boldsymbol{\beta})}{[p\, D(p)]^{(1)}_{p=p_\mu}}\, e^{p_\mu x} =$$

$$= \frac{D_i(O;\, -\mathbf{W})}{(-1)^n \prod\limits_{\mu=1}^{n} p_\mu^2} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{D_i(p_\mu;\, p_\mu^2\boldsymbol{\alpha}) + D_i(p_\mu;\, -\mathbf{W})}{p_\mu^2 \prod\limits_{\kappa=1}^{\mu-1} (p_\mu^2 - p_\kappa^2) \prod\limits_{\kappa=\mu+1}^{n} (p_\mu^2 - p_\kappa^2)} \frac{e^{p_\mu x} + e^{-p_\mu x}}{2} +$$

$$+ \frac{D_i(p_\mu;\, p_\mu\boldsymbol{\beta})}{p_\mu^2 \prod\limits_{\kappa=1}^{\mu-1} (p_\mu^2 - p_\kappa^2) \prod\limits_{\kappa=\mu+1}^{n} (p_\mu^2 - p_\kappa^2)} \frac{e^{p_\mu x} - e^{-p_\mu x}}{2} =$$

$$= \frac{D_i(O;\, -\mathbf{W})}{(-1)^n \prod\limits_{\mu=1}^{n} p_\mu^2} + \sum_{\mu=1}^{n} \frac{D_i(p_\mu;\, p_\mu^2\boldsymbol{\alpha}) + D_i(p_\mu;\, -\mathbf{W})}{p_\mu^2 \prod\limits_{\kappa=1}^{\mu-1} (p_\mu^2 - p_\kappa^2) \prod\limits_{\kappa=\mu+1}^{n} (p_\mu^2 - p_\kappa^2)} \cosh p_\mu x +$$

$$+ \sum_{\mu=1}^{n} \frac{D_i(p_\mu;\, p_\mu\boldsymbol{\beta})}{p_\mu^2 \prod\limits_{\kappa-1}^{\mu-1} (p_\mu^2 - p_\kappa^2) \prod\limits_{\kappa=\mu+1}^{n} (p_\mu^2 - p_\kappa^2)} \sinh p_\mu x\,.$$

In (12) haben wir, wie man sich leicht überzeugen kann, eine allgemeine Lösung unseres Problems gefunden, wobei $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ vorderhand nicht näher bestimmte Konstanten sind. Ehe wir an ihre Bestimmung aus den Randbedingungen herantreten, wollen wir die gefundene Lösung noch etwas näher untersuchen. Setzen wir zunächst voraus, dass wir es mit einem System von Stäben tu zun haben, die ausschliesslich hintereinander gereiht werden, so dass alle H_{ik} mit Ausnahme von H_{ik}, $i = k$, indentisch Null sind. Dies bedeutet, dass in dem Gleichungssystem (3) kein einziges Paar von Gleichungen untereinander simultan ist. Der Determinant $D(p)$

besitzt dann einzig und allein in der Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente und die Lösung wird mit Rücksicht auf

$$D_i(p; -\mathbf{W} + p\boldsymbol{\beta} + p^2\boldsymbol{\alpha}) =$$
$$= (-w_i + p\beta_i + p^2\alpha_i)\prod_{\kappa=1}^{i-1}(p^2 - p_\kappa^2)\prod_{\kappa=i+1}^{n}(p^2 - p_\kappa^2)$$

für jede einzelne Gleichung aus (3) unabhängig von den anderen

$$T_i(x) = \frac{w_i}{p_i^2} + \left(\alpha_i - \frac{w_i}{p_i^2}\right)\cosh p_i x + \frac{\beta_i}{p_i}\sinh p_i x \tag{13}$$

lauten, mit $p_i = \sqrt{H_{ii}}$. Setzen wir im Gegensatz dazu voraus, dass alle Stäbe ausschliesslich parallel angeordnet sind und dass alle Gleichungen mit allen restlichen simultan sind; dann werden natürlich alle $2n$ Koeffizienten in (12) von Null verschieden sein.

Zwischen diesen Extremen liegen dann alle die Fälle, wo das Gleichungssystem in ein oder mehrere simultane Teilsysteme zerfällt, die untereinander unabhängig sind (wenn wir von den Randbedingungen absehen, natürlich) und in eine Gruppe von einzelnen von einander unabhängige Gleichungen, wie symbolisch in Abb. 2 angedeutet ist. Alle Gleichungen des Systems werden dabei weiterhin durch die Randbedingungen untereinander verknüpft sein. Unter diesen Umständen wird die Lösung für die einzelnen Teilsysteme durch die Gleichungen (10) und (12) festgelegt sein und für die einzelnen nichtsimultanen Gleichungen durch (13).

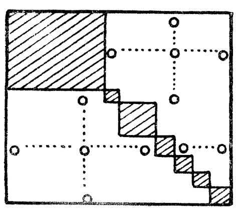

Abb. 2.

Die so gefundene allgemeine Lösung ist als Ganzes in (6) einzusetzen, damit die Konstanten $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$ bestimmt werden können, wobei wir voraussetzen wollen, dass die Elemente von $\boldsymbol{\beta}$ überhaupt so bestimmt werden können, dass die vorgeschriebenen Randbedingungen Gl. (6) für die $x = l$ erfüllt sein werden. Dabei ist darauf zu achten, dass jede Lösungsfunktion $T_i(x)$ in Gl. (6) zweimal aufscheinen muss: Für die Anfangswerte der Argummente $x \equiv 0$ und für die den Stabenen entsprechenden Werte $x = l$ usw. Am einfachsten gestaltet sich das Gleichungssystem zur Bestimmung von $\boldsymbol{\alpha}$ und $\boldsymbol{\beta}$, wenn die Randbedingungen in Form von (4b) vorgeschrieben sind. In diesem Falle ist einfach $T_i(x)$ für die bezüglichen Werte der Argumente in die link e Seite von (4b) einzusetzen.

PRAKTISCHE AUSWERTUNG DER ALLGEMEINEN LÖSUNG

Die Bestimmung der Lösung wird im konkreten Fall in einer Reihe von Schritten durchgeführt: Bestimmung der Eigenwerte der Koeffizientenmatrizen der einzelnen Teilsysteme, Bestimmung der Werte der Determinanten $D_i(p_\mu)$ der einzelnen Teilsysteme und der dazugehörigen Werte von $[p\,D(p)]^{(1)}_{p=p_\mu}$, Zusammenstellung der allgemeinen Gesamtlösung und zuletzt, deren Einsetzung in die Randbedingungen und Bestimmung der Zahlenwerte von α und β durch Lösung der bezüglichen Gl. (6) resp. (4b).

Es ist nicht unsere Absicht hier die Eignung einzelner numerischer Methoden, die zur Durchführung der nötigen Schritte zu Gebote stehen, zu diskutieren. Es soll nur ganz allgemein festgestellt werden, dass eine numerische Auswertung der Lösung im Prinzip ohne weiteres an Hand der laufend zur Verfügung stehenden Hilfsprogramme (Bestimmung der Eigenwerte von Matrizen, Berechnung des Wertes von Determinanten und Lösung von Systemen algebraischer Gleichungen) mittels Rechenautomaten durchgeführt werden kann, was im Falle mehrerer Gleichungen von wesentlicher Bedeutung ist.

Die Möglichkeit der praktischen numerischen Auswertung der allgemeinen Lösung unterliegt aber einer Einschränkung. Die Lösung kann (in einem gewissen numerischen Sinn) recht unstabil werden. Ein Bild davon, was wir in dieser Beziehung erwarten können, können wir schon aus den berechneten Zahlenwerten der Eigenwerte gewinnen. In dem Gleichungssystem (6) and Hand dessen wir α und β zu bestimmen haben, treten als Koeffizienten hyperbolische Funktionen auf. Je grösser der wertmässige Unterschied zwischen dem grössten und kleinsten Eigenwert sein wird und je grösser das Intervall der unabhängig Veränderlichen wird, desto grössere ordnungsmässige Unterschiede werden zwischen diesen Koeffizienten vorkommen. Dabei ergeben die Summen der einzelnen Zeilen verhältnismässig kleine Werte – die vorgegebenen Temperaturen oder Wärmeströme. Erst eine eingehende Analyse der Werte der Koeffizienten kann uns da z.B. zeigen, mit wie vielen gültigen Ziffern wir arbeiten müssen usw.

NUMERISCHES BEISPIEL

Die Wärmeleitung in den beiden in Abb. 3 symbolisch dargestellten Stäben wird durch folgende Differentialgleichungen beschrieben

$$\mathrm{d}^2 T_1/\mathrm{d}x^2 - 1{,}5789 \,.\, 10^{-3} T_1 + 2{,}1053 \,.\, 10^{-3} T_2 = -\ 1{,}3158 \,.\, 10^{-1}\,,$$
$$\mathrm{d}^2 T_2/\mathrm{d}x^2 - 3{,}7333 \,.\, 10^{-1} T_2 + 1{,}6600 \,.\, 10^{-1} T_1 = -12{,}133\,,$$

mit den Randbedingungen

$$\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = 1{,}579 \,.\, 10^{-3}[T_1(0) - 20]\,, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}x}\right)_{x=5} = -2{,}632 \,.\, 10^{-3} T_1(5)\,,$$
$$\left(\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = 0{,}2[T_2(0) - 15]\,, \qquad \left(\frac{\mathrm{d}T_2}{\mathrm{d}x}\right)_{x=5} = -0{,}5[T_2(5) - 5]\,,$$

so dass wir nach Durchführung der Laplaceschen Transformation für $D(p)$

$$D(p) = (p^2 - 1{,}5789 \,.\, 10^{-3})(p^2 - 3{,}7333 \,.\, 10^{-1}) - 2{,}1053 \,.\, 10^{-3} \,.\, 1{,}6600 \,.\, 10^{-1} =$$
$$= p^4 - 3{,}7491 \,.\, 10^{-1} p^2 + 2{,}5260 \,.\, 10^{-4}$$

mit Wurzeln

$$p_1^2 = (\pm 6{,}11748 \, . \, 10^{-1})^2 \, ; \quad p_2^2 = (\pm 2{,}5990 p^{-2})^2$$

erhalten. Für die Determinaten D_i ergibt sich

$$D_1(p; -\mathrm{W} + p\boldsymbol{\beta} + p^2\boldsymbol{\alpha}) = \begin{vmatrix} -1{,}3158 \, . \, 10^{-1} + p\beta_1 + p^2\alpha_1, & 2{,}1053 \, . \, 10^{-3} \\ -12{,}133 + p\beta_2 + p^2\alpha_2, & p^2 - 3{,}7333 \, . \, 10^{-1} \end{vmatrix} =$$

$$= D_1(p; -\mathrm{W}) + D_1(p; p\boldsymbol{\beta}) + D_1(p; p^2\boldsymbol{\alpha}) =$$

$$= 7{,}4667 \, . \, 10^{-2} + \{p^4\alpha_1 - p^2(1{,}3158 \, . \, 10^{-1} +$$

$$+ 3{,}7333 \, . \, 10^{-1}\alpha_1 + 2{,}1053 \, . \, 10^{-3}\alpha_2 + p^3\beta_1 - 3{,}7333 \, . \, 10^{-1}\beta_1 +$$

$$+ 2{,}1053 \, . \, 10^{-3}\beta_2)\} \, .$$

Auf analoge Art bestimmen wir $D_2(p)$. Wir setzen noch für

$$[p \; D(p)]^{(1)}_{p=0} = p_1^2 \cdot p_2^2 = 2{,}5260 \, . \, 10^{-4} \text{ usw.}$$

ein und können die allgemeine Lösung zusammenstellen:

$$T_1(x) = 295{,}58 + (1{,}9000 \, . \, 10^{-1} + 2{,}4249 \, . \, 10^{-3}\alpha_1 - 5{,}6358 \, . \, 10^{-3}\alpha_2) \, .$$

$$. \cosh 6{,}1174 \, . \, 10^{-1}x + (3{,}9599 \, . \, 10^{-1}\beta_1 - 9{,}2124 \, . \, 10^{-3}\beta_2) \, .$$

$$. \sinh 6{,}1174 \, . \, 10^{-1}x +$$

$$+ (-295{,}77 + 9{,}9758 \, . \, 10^{-1}\alpha_1 + 5{,}6359 \, . \, 10^{-3}\alpha_2) \cosh 2{,}5990 \, . \, 10^{-2}x +$$

$$+ (38{,}410\beta_1 + 2{,}1700 \, . \, 10^{-1}\beta_2) \sinh 2{,}5990 \, . \, 10^{-2}x \, ,$$

$$T_2(x) = 159{,}18 + (-32{,}190 - 4{,}2831 \, . \, 10^{-1}\alpha_1 + 9{,}9758 \, . \, 10^{-1}\alpha^2) \, .$$

$$. \cosh 6{,}1174 \, . \, 10^{-1}x + \ldots$$

Wir führen die Ableitung von $T_1(x)$ und $T_2(x)$ durch und setzen $x_1 = 0$ und $x = 5$ sowohl in die Lösungsfunktionen, als auch in ihre Ableitungen ein und stellen die Gl. (6) zusammen, die nach Umordnung

$$\begin{pmatrix} -4{,}85267, & 11{,}8098, & -6{,}78510, & 19{,}3203 \\ 2{,}18566 \, . \, 10^{-2}, & -3{,}6761 \, . \, 10^{-2}, & 1{,}04586, & -5{,}46475 \, . \, 10^{-2} \\ 1{,}57890 \, . \, 10^{-3}, & 0, & -1{,}0000, & 0 \\ 0, & 0{,}20000, & 0, & -1{,}00000 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 369{,}418 \\ -1{,}66745 \, . \, 10^{-1} \\ 3{,}15780 \, . \, 10^{-2} \\ 3{,}00000 \end{pmatrix}$$

lautet und die Werte $\alpha_1 = 114{,}687$, $\alpha_2 = 62{,}7745$, $\beta_1 = 1{,}49510 \, . \, 10^{-1}$ und $\beta_2 = 9{,}55530$ als Lösung ergibt, sodass wir

$$T_1(x) = 295{,}59 + 0{,}10433 \, . \cosh 0{,}61174x - 0{,}087435 \sinh 0{,}61174x -$$

$$- 181{,}00 \, . \cosh 0{,}02599x + 7{,}8163 \sinh 0{,}02599x \, ,$$

$$T_2(x) = 159{,}18 - 18{,}690 \cosh 0{,}61174x + 15{,}477 \sinh 0{,}61174x -$$

$$- 77{,}715 \cosh 0{,}02599x + 3{,}3561 \sinh 0{,}02599x$$

als Lösung erhalten.

Benutzen wir als Ausgangswerte abgerundete Werte, für die numerische Auswertung der Lösung

$$\frac{d^2T_1}{dx^2} - 1{,}600 \,.\, 10^{-3}T_1 + 2{,}100 \,.\, 10^{-3}T_2 = -1{,}316 \,.\, 10^{-1} \,,$$

$$\frac{d^2T_2}{dx^2} - 3{,}733 \,.\, 10^{-1}T_1 + 1{,}600 \,.\, 10^{-1}T_2 = -12{,}133 \,,$$

sodass die Werte der Koeffizienten der Differentialgleichung nun um

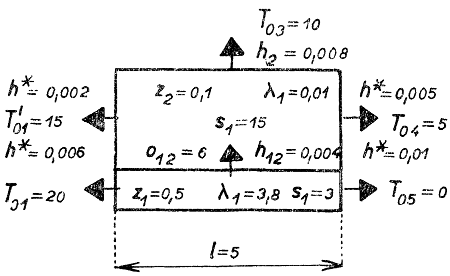

Abb. 3.

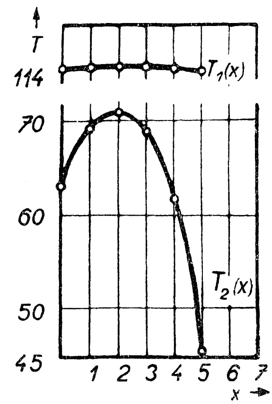

Abb. 4.

1,3%	0,25%	0,013%
0,008%	0,0%	0,0%

von den ursprünglichen abweichen, erhalten wir als Eigenwerte

$$p_1^2 = (\pm 0{,}6117)^2 \,, \quad p_2^2 = (\pm 0{,}0283)^2$$

und für die Koeffizienten α_i und β_i

$$\alpha_1 = 126{,}39 \,, \quad \alpha_2 = 66{,}825 \,, \quad \beta_1 = 0{,}1666 \,, \quad \beta_2 = 10{,}371 \,,$$

sodass sich

$$T_1(x) = 248{,}67 + 0{,}0789 \cosh p_1x - 0{,}0957 \sinh p_1x - \\ - 121{,}94 \cosh p_2x + 9{,}2877 \sinh p_2x \,,$$

$$T_2(x) = 135{,}00 - 19{,}711 \cosh p_1x + 16{,}796 \sinh p_1x - \\ - 60{,}540 \cosh p_2x + 2{,}499 \sinh p_2x$$

als Lösung ergibt. Wir sehen, dass die Werte beider Lösungen beträchtliche Differenzen aufweisen. Das heisst soviel, dass ein vom technischen Standpunkt aus recht geringfügiger Abrundungsfehler einen Bedeutenden Fehler in der berechneten Lösung ergibt.

Dem in Abb. 4 festgehaltenen Lösungsverlauf ist zu entnehmen, dass mittels der gleichen hyperbolischen Funktionen und Eigenwerte einmal ein recht steiler, einmal ein recht flacher Lösungs-Verlauf dargestellt wird. Dies führt zu der, in dem Beispiel demonstrierten „Instabilität".

Um die Güte der Lösung eines gegebenen Wärmeleitungsproblems beurteilen zu können, erscheint es zweckmässig an Hand der gefundenen Lösung eine Wärmebilanz durchzuführen, d.h. die sich aus dem Lösungsverlauf ergebende Wärmeentwicklung und Wärmeabgeba usw. zu vergleichen.

DISKUSSION DER LÖSUNG

Unsere Untersuchung ergibt folgendes Bild. Jedes beliebige System eindimensionaler Wärmeleitungsgleichungen kann im völlig allgemeinen Fall in Teilsysteme (ev. mehrere) simultaner Gleichungssysteme und dein System von gegenseitig unabhängiger Gleichungen aufgeteilt werden. Unter besonderen Bedingungen kann das System allerdings ausschliesslich aus simultanen oder von einander unabhängigen Gleichungen bestehen. Die simultanen Gleichungssysteme beschreiben, bildlich gesprochen, „parallele Stäbe und Platten", die untereinander Wärme austauschen, die unabhängigen Gleichungen „hintereinander angeordnete Stäbe und Platten". Die Lösungen der simultanen Teilsysteme bestehen, unter der Voraussetzung, dass die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix real sind, aus der gleichen Anzahl von Lösungsfunktionen der Form $a_\mu \cosh p_\mu x + b_\mu \sinh p_\mu x$, wie die Anzahl der Gleichungen im System ist (n'), also $\mu = 1, 2, 3, \ldots, n'$, wobei p_μ die Eigenwerte der Koeffizientenmatrix des betreffenden Teilsystems sind, also von den anderen Differentialgleichungen unabhängig, ebenso von den Randbedingungen und der Wärmeentwicklung. Die Lösung jeder einzelnen der unabhängigen Differentialgleichungen besteht aus einem einzigen solchen Ausdruck. Bei allen Systemen von Gleichungen tritt im Falle dass sich wenigstens in einem Stabe oder Platte Wärme entwickelt, d.h. wenn die rechte Seite von (5) wenigstens für eine der Gleichungen von Null verschieden sein wird, ein konstantes Glied auf. Die Konstanten der hyperbolischen Funktionen wiederum sind von allen Differentialgleichungen des Gesamtsystems und von den Randbedingungen abhängig.

Im speziellen Fall völlig symetrischer Randbedingungen kann, wie bekannt, die Wärmeleitungsaufgabe so formuliert werden, dass eine Randbedingung als adiabatische Bedingung formuliert wird. Es zeigt sich, dass auch im Falle eines ganzen, symetrischen Systems von Stäben und Platten die Lösung sich dann vereinfacht: Die Koeffizienten β werden identisch Null.

Literatur

[1] *Churchill R. V.:* Operational Mathamatics, McGraw Hill Comp. 1958.

Výtah

USTÁLENÉ JEDNOROZMĚRNÉ PROUDĚNÍ TEPLA V SOUSTAVĚ *n* TĚLES S VNITŘNÍM VÝVINEM TEPLA I.

I. KARASOVÁ, A. KESSLER

V určitém případě se problém vedení tepla v soustavě *n* těles převádí na problém jednorozměrného vedení tepla, například v případě tepelně vázaných desek a tyčí. Tato práce je věnována nejobecnější formulaci a řešení zmíněného problému.

Резюме

УСТАНОВИВШЕЕСЯ ОДНОМЕРНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТЕПЛА В СИСТЕМЕ *n* ТЕЛ С ВНУТРЕННИМ ВОЗНИКНОВЕНИЕМ ТЕПЛА. I.

И. КАРАСОВА, А. КЕССЛЕР (I. KARASOVÁ, A. KESSLER)

В определеном случае проблема теплопроводности в системе *n* тел сводится к проблеме одномерного распространения тепла, например, в случае термически связанных пластинок и стержней. Самой общей формулировке и решению этой задачи посвещена настоящая работа.

Adressen der Authoren: Ing. *I. Karasová*, Fyzikálny ústav SAV, Dúbravská cesta, Bratislava. — Dr. *A. Kessler* CSc., dtto. —