Aplikace matematiky

Diskuse

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 4, 323–327

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103035

DISKUSE

V našem časopise byla uveřejněna práce VLADIMÍRA FIŘTA „*Kmitání konstrukcí s pruty proměnného průřezu I*" (Apl. mat. 10 (1965), 15—30). V souvislosti s touto prací vznikla rozsáhlá diskuse, kterou uzavíráme jejím uveřejněním.

Dopis V. Kolouška

1. Literatura v oboru kmitání prutu proměnného průřezu je bohatší, než jak to uvádí autor shora uvedené práce, podle něhož bylo prozatím nalezeno exaktní řešení jen v ojedinělých případech pro zvláštní průběh tuhostí a hmoty po délce prutu, např. pro výpočet vlastních kmitočtů krakorce nebo tyče proměnného průřezu s volnými konci.

V některých již před lety uveřejněných pojednáních byly přímou integrací vyřešeny případy aspoň stejně obecné jako v článku V. FIŘTA.

Např. v práci B. G. KORENĚVA „Ob izgibnych kolebanijach steržnej peremennogo sečenija", Isledovanija po dinamike sooruženij, Sbornik statej, Moskva Gostrojizdat 1957, str. 83—92, je řešena na základě starších prací Kirchhoffových a Mononobe úloha kmitání prutu, jehož hmota a moment setrvačnosti jsou po nosníku rozděleny podle zákona

$$\mu(x) = \pi\varrho(r_0 + mx)^2\,,$$
$$J(x) = \tfrac{1}{4}\pi(r_0 + mx)^4\,.$$

Nosník může být libovolně uložen a kromě své vlastní váhy obtížen soustředěnými hmotami. Z rovnice

$$E\,\frac{d^2}{dx^2}\left[J(x)\,\frac{d^2v(x)}{dx^2}\right] - \mu(x)\,\omega^2\,v(x) = 0$$

se po substituci

$$\beta = \sqrt{[8\omega/m^2\,\sqrt{(\varrho/E)}\,(r_0 + mx)]}\,,$$
$$\gamma = v(x)\,\beta^2$$

získají dvě rovnice Besselovy

$$\frac{d^2\gamma}{d\beta^2} + \frac{1}{\beta}\cdot\frac{d\gamma}{d\beta} \pm \gamma - \frac{4}{\beta^2}\,\gamma = 0$$

s integrálem

$$\gamma = A_2\,J_2(\beta) + B_2\,I_2(\beta) + C_2\,Y_2(\beta) + D_2\,K_2(\beta)\,,$$

kde J_2, Y_2, I_2, K_2 jsou Besselovy funkce druhého řádu, prvního a druhého druhu s reálnými a imaginárními argumenty. Uvedené řešení je v práci dále zobecněno na pruty s tuhostí a hmotou

$$\text{(K)}\qquad J(x) = J_0(a_1 + b_1x)^{n-2}\,,$$
$$\mu(x) = \mu_0(a_1 + b_1x)^n\,.$$

Toto řešení je obsaženo též ve spise B. G. KORENĚVA „Nekotoryje zadači teorii uprugosti i teploprovodnosti rešajemyje v Besselových funkcijach", Moskva Fizmatgiz, 1960, str. 208—215.

Podobně je řešeno kmitání prutů proměnného průřezu v práci V. I. SYSOJEVA „K voprosu o poperečnych kolebanijach stěržněj peremennogo sečenija", Isledovanija po dinamike sooruženij, Sbornik statej, Moskva, Gostrojizdat 1961, str. 87—95. Sysojev řeší pruty s tuhostí a hmotou

$$\text{(S)} \qquad J(x) = J_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{n+2}, \quad \mu(x) = \mu_0 \left(\frac{x}{L}\right)^{n},$$

při čemž počátek souřadnic je posunut mimo začátek prutu o konstantní délku l'. Ve vzorcích (K) a (S) volba 4 konstant umožňuje vystihnout 4 dimenzionální veličiny prutu, např. momenty setrvačnosti a poměrnou hmotu na jeho obou koncích

$$J_i, J_j, \mu_i, \mu_j .$$

Podobné řešení je uvedeno s příslušnou literaturou (GRINDBERG, ŠČEGLOV) v knize J. GONDY „Kmitanie pružných telies", VSAV Bratislava 1961, str. 262—264.

2. V. FIŘT řeší nejprve nosník s tuhostí a hmotou

$$\text{F(1.3)} \qquad J(x) = J_i \left(a + \frac{b}{L} x\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_i \left(a + b\frac{x}{L}\right)^{n-4}.$$

Úsečky x se měří od počátku, který autor posunuje mimo počátek nosníku. *Toto posunutí počátku však nemá smysl*, protože jak se snadno můžeme přesvědčit, je průběh funkcí F (1.3) od volby počátku neodvislý. Použijeme-li označení podle obr. 1 práce V. Fiřta a označíme-li dále úsečku měřenou od levého konce nosníku symbolem $\bar{x}$, při čemž $\bar{x} = x - x_0$, dostaneme s použitím rovnic (1.4) ze str. 16 práce Fiřtovy

$$\left(a + b\frac{x}{L}\right) = \frac{L - x_0 \sqrt[n]{(J_j \mid J_i)} + x \sqrt[n]{(J_j \mid J_i)} - x}{L - x_0} =$$

$$= \frac{l + \bar{x} \sqrt[n]{(J_j \mid J_i)} - \bar{x}}{l} = \left[1 + \frac{\bar{x}}{l}\left(\sqrt[n]{(J_j \mid J_i)} - 1\right)\right],$$

tedy výraz zcela neodvislý od x_0. Podobně jako u Koreněva obsahují tedy výrazy F (1.3) pouze 4 neodvislé konstanty, které jsou *plně určeny* tuhostmi a poměrnými hmotami na krajích nosníku. Neodpovídá tedy skutečnosti tvrzení, že bychom mohli „vhodnou volbou počátku os souřadných a konstant u funkcí dosáhnout dokonalého vystižení značně obecných monotonních změn ohybových tuhostí prutů".

3. Porovnáme-li řešení Koreněvovo s Fiřtovým vidíme, že rozdíl mezi výrazy (K) a F (1.3) je v tom, že u Koreněva je rozdíl exponentů u J a μ roven 2, kdežto u Fiřta je roven 4. Přitom předpoklad Koreněvův vyhovuje např. pro plný prut nebo troubu tvaru komolého kužele, dále pro prut konstantní šířky s lineárně rostoucí výškou nebo pro prut tvaru I s přírubami konstantní šířky a tloušťky a se stojinou zanedbatelné tloušťky s lineárně rostoucí výškou. To jsou typy nosníků, které se v praxi vyskytují. Nosníky typu předpokládaného V. Fiřtem jsou v praxi jistě vzácnější. Druhý předpoklad autorův (1.11) na str. 18 vede k výsledku

$$\frac{J(x)}{J_i} = \frac{\mu(x)}{\mu_i},$$

což by odpovídalo konstrukcím ve stavební praxi neobvyklým.

4. Autor označuje metodu použitou v pojednání V. Kolouška „Dynamics of Continuous Structures with Repeated Elements", Sixth Congress of the IABSE, Final Report, Stockholm 1960 za metodu jen přibližnou. Jedinou přibližnost této metody bychom mohli spatřovat v použití numerické integrace a v postupných aproximacích. Přesnost obojího je však libovolně regulovatelná, konvergence postupných aproximací je dokázána. Naopak použijeme-li pro řešení daného příkladu metod Koreněva nebo Fiřta, bude řešení vždy jen zhruba přibližné. Základní prvek uvažovaný v citované práci má hodnoty na koncích $J_i = 0{,}010425$, $J_j = 0{,}1050$, $\mu_i = 0{,}128$, $\mu_j = 0{,}276$ (v Mp, m, s) a uprostřed $J(l/2) = 0{,}0223$, $\mu(l/2) = 0{,}165$. Kdybychom použili průběhu podle Fiřtova vzorce (1.3) vyšlo by $n = 6$, $J(l/2) = 0{,}0367$, $\mu(l/2) = 0{,}195$ a rozdíly proti skutečným hodnotám u $J(l/2)$ 65% a u $\mu(l/2)$ 18%. Kdybychom chtěli průběh tuhosti a rozdělení hmoty po délce nosníku vystihnout přesněji, bylo by nutno prut rozdělit na značný počet dílů a není jisté, zda dosažené výsledky by byly lepší než při dělení na prizmatické části.

Odpověď V. Fiřta

Ad 1. Ve svém článku, jak je zřejmé z textu jeho úvodu, neuvádím veškerou literaturu pojednávající o kmitání prutů proměnného průřezu pro její obsáhlost. V literatuře, kterou jsem citoval lze však nalézt další prameny týkající se této problematiky.

Některé výsledky řešení rovnice (1.2) pomocí Besselových funkcí jsou obsaženy v citované knize Timoshenko S.: „Vibration Problems in Engineering", New York 1955, v níž je na str. 389—393 uvedena další literatura, kde bylo použito Besselových funkcí. Prof. V. Koloušek tuto literaturu ve svých připomínkách doplňuje.

V dostupné literatuře byly rovnice (1.2) a (1.1) řešeny přímou integrací jen v některých případech, které považuji za ojedinělé, v nichž není obsaženo řešení uvedené v prvním odstavci mého článku. Rovněž výsledky v ostatních odstavcích článku nebyly nikde uveřejněny.

Ad 2. V článku se nezmiňuji o volbě počtu konstant u funkcí (1.3) k vyjádření daného průběhu $J(x)$ a $\mu(x)$. Ve větě „vhodnou volbou ...", která je v úvodu článku, jsou uvažovány všechny výrazy pro $J(x)$, které jsou v článku uvedeny, tj. první rovnice (1.3) a (1.11) a výraz

$$J(x) = a_1 \left(\frac{x}{L}\right)^n, \tag{I}$$

který je uveden na str. 17 a u něhož na poloze počátku os souřadných O záleží.

Je věcí uživatele, zda při použití rovnic (1.3) ztotožní počátek O s počátkem prutu či nikoliv. Odvozené výrazy pro průhyb prutu jsou platné pro obecnou polohu počátku O a dovolují řešit nosník rozdělený na několik dílů s různým průběhem ohybové tuhosti aniž je nutné volit pro každý díl jinou polohu počátku O. Řešení s uvažováním obecné polohy počátku O není o nic složitější než řešení odvozené za předpokladu, že počátek O je totožný s počátkem prutu.

Ad 3. V pracích Koreněva, citovaných prof. V. Kolouškem, jsou místo výrazů (K) uvedeny jen tři zvláštní případy, kdy $n = 2$, $n = 1$, $n = 0$. V práci Sysojeva je uvedeno řešení za předpokladu platnosti rovnic (S), v nichž n je celé reálné číslo.

Funkce (1.3) stejně jako funkce (K) mohou jen v některých případech vyjádřit změnu tuhosti $EJ(x)$ a hmoty $\mu(x)$ po délce daného prutu, neboť čtyřmi zvolenými konstantami nemůžeme současně dobře vystihnout jak $J(x)$ tak $\mu(x)$, uvážíme-li, že nosník bývá často zatížen nejen svou vlastní vahou, ale i jiným stálým zatížením.

Výsledky s obecnější platností však dostaneme, když budeme uvažovat průběh $J(x)$ podle (1.3) a obecný průběh $\mu(x)$, neboť v takovém případě můžeme v prvním výraze (1.3) volit 3 konstanty tak, aby tento výraz vyjadřoval co nejlépe daný průběh $J(x)$ v daném intervalu. Tak např. lze volit J_i, b, n nebo J_i, J_j, n nebo lze všechny konstanty určit tak, aby ve zvolených třech průřezech dával první výraz (1.3) hodnoty momentu setrvačnosti, které jsou u daného prutu apod. Z těchto důvodů jsou výrazy (1.4) pro a, b odvozeny tak, aby neobsahovaly μ_i, μ_j a z těchže důvodů je v úvodu článku uvedena věta, citovaná prof. V. Kolouškem v **2**, v níž není žádná zmínka o hmotě $\mu(x)$.

Obecný průběh $\mu(x)$, jak jsem v úvodu článku I. uvedl, bude uvažován v II. části, kde bude také ukázáno, jak lze použít pro tento případ výsledků obsažených v článku I. včetně výsledků získaných za předpokladu (1.11).

Ad 4. Do přibližných metod jsem zahrnul metodu prof. V. Kolouška proto, že je tato metoda spojena s numerickou metodou postupných aproximací. V literatuře bývají často všechny iterační metody považovány za přibližné, i když některé z nich dávají výsledky s předepsanou přesností.

Tak např. v úvodu k ruskému překladu knihy L. Collatze: „Čislennyje metody rešenija uravněnij", Izd. inostr. liter., Moskva 1953, jsou všechny numerické metody včetně metod postupných aproximací, o nichž kniha pojednává, označeny jako metody přibližné. Metoda prof. V. Kolouška splňuje požadavky na značnou přesnost výsledků.

K uvedenému příkladu poznamenávám, že daným hodnotám $J_i = 0{,}010425$, $J_j = 0{,}1050$, $J(l/2) = 0{,}0223$ vyhovuje tento výraz tvaru (1.3)

$$J(x) = 0{,}010425\left(1 - 0{,}7737\frac{x}{l}\right)^{-1{,}55444}, \tag{II}$$

kde l je délka prutu a x je úsečka měřená od počátku nosníku. O vyjádření hmoty $\mu(x)$ jsem se již zmínil.

Spolehlivější posouzení přesnosti jednotlivých metod mohou poskytnout (nebudou-li nalezena jiná kritéria) srovnávací výpočty u celé řady konkrétních příkladů.

Odpověď V. Kolouška

Ad 1. V. Fiřt znovu označuje řešení rovnice kmitání prutů proměnného průřezu přímou integrací, jež byla dosud v literatuře uveřejněna za ojedinělá a to i přes to, že jsem ve svých připomínkách uvedl velký počet prací, které se touto otázkou podrobně zabývají. Z mých připomínek je však zřejmé, že rozdíl Fiřtova řešení proti řešením předchozím je jenom v tom, že změna tuhosti a hmoty je předpokládána (při použití stejného označení)

$$J(x) = J_i\left(a + b\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_i\left(a + b\frac{x}{L}\right)^{n-4}$$

místo

$$J(x) = J_i\left(a + b\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_i\left(a + b\frac{x}{L}\right)^{n-2}.$$

Počet volitelných konstant je v obou případech stejný. Řešení cylindrickými funkcemi umožňuje navíc řešit některé běžné případy prutů proměnného průřezu např. klínový nebo konický tvar.

Ad 2. Ve své odpovědi tvrdí V. Fiřt, že věta „Vhodnou volbou počátku ..." se vztahuje na výraz uvedený na str. 17 v poznámce a ne k výrazům (1.3). Toto tvrzení neodpovídá pravdě, jak je patrno jednak z poznámky 2) pod čarou, kde je přímo uvedeno „... poměr x_0/L zvolíme tak, aby výrazy (1.3) vyjadřovaly co nejlépe skutečnou změnu průřezu prutu", jednak z obou cizojazyčných résumé, v nichž je výslovně uvedeno „By a suitable choice of origin of coordinates and of constants in (1.4) and (1.12) it is possible to treat rather general monotone variations in beam cross-section".

Ad 3. a **ad 4.** Koreněv uvádí $n = 2$, $n = 1$, $n = 0$ jen jako příklad. Z odvození je zřejmé, že řešení platí obecně pro jakékoli reálné n. To je patrno též ze str. 10 citovaného spisu. Ze 4 konstant mohou být použity 3 pro vystižení průběhu tuhosti stejně při řešení cylindrickými funkcemi jako při řešení Fiřtovu. Jakým způsobem chce vystihnout V. Fiřt obecný průběh $\mu(x)$ a hlavně zda i potom zůstanou výsledky přímým a přesným řešením diferenciální rovnice (1.1) nemohu posoudit, protože další práce V. Fiřta zatím nebyla uveřejněna.

Odpověď V. Fiřta

Ad 1. V dostupné literatuře je řešen Besselovými funkcemi případ

$$J(x) = J_i \left(a + b\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_i \left(a + b\frac{x}{L}\right)^{n-2} \tag{1}$$

nebo případ

$$J(x) = J_j \left(\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_j \left(\frac{x}{L}\right)^m, \tag{2}$$

kde $m = n - 2$ nebo $m = -n$ (Dinik A. N.: Izbrannyje trudy, Izd. AN SSSR, Kijev 1955, str. 160–170).

Ve svém článku jsem uvedl řešení pro další případy bez použití cylindrických funkcí. Je věci názoru, zda tyto případy jsou ojedinělé nebo četné.

Ad 2. Výrazy

$$J(x) = a_1 \left(\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = a_2 \left(\frac{x}{L}\right)^{n-4} \tag{3}$$

jsem v článku na str. 17 označil jako zvláštní případ (co do tvaru) výrazů

$$J(x) = J_i \left(a + b\frac{x}{L}\right)^n, \quad \mu(x) = \mu_i \left(a + b\frac{x}{L}\right)^{n-4}, \tag{4}$$

neboť, položíme-li v (4) $a = 0$ ($a_1 = J_j = J_i b^n$, $a_2 = \mu_j = \mu_i b^{n-4}$), dostaneme výrazy (3). Proto v poznámce 2) pod čarou a v textu cizojazyčných résumé jsou zahrnuty výrazy (3), které v článku nejsou zvlášť označeny.

Ad 3, ad 4 a **ad 1.** Naznačené odvození v citované práci Koreněva je uvedeno pro $n = 2$, což nedokazuje platnost přesného řešení pro obecné n. Netvrdím, že takové řešení neexistuje. Ve svém článku uvádím řešení i při působení osové síly, která v řešení Besselovými funkcemi není uvažována.

V práci — V. Fiřt: A Contribution to the Exact Solution of a Vibrating Beam of Variable Cross Section (Stav. čas. XIV (1966), č. 4) — je dokázána věta, podle níž lze řešení odvozená v článku I. užít k vyjádření exaktního řešení rovnice (1.1) pro hmotu $\mu(x)$ definovanou výrazem, který vyhovuje danému obecnému průběhu hmoty $\bar{\mu}(x)$ ve zvoleném počtu bodů na ose nosníku.

Adresy autorů: Prof. Ing. Dr. *Vladimír Koloušek* Dr.Sc., člen korespondent ČSAV, Katedra stavební mechaniky ČVUT, Karlovo nám. 17, Praha 2. — Ing. *Vladimír Fiřt* C.Sc., Ústav teoretické a aplikované mechaniky ČSAV, Vyšehradská 49, Praha 2.