Aplikace matematiky

Bohuslava Haňková

Řešení některých integrálních rovnic prvního druhu

Aplikace matematiky, Vol. 11 (1966), No. 5, 385–391,392–393,394–395,396–398

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103044

ŘEŠENÍ NĚKTERÝCH INTEGRÁLNÍCH ROVNIC PRVNÍHO DRUHU

BOHUSLAVA HAŇKOVÁ

(Došlo dne 9. září 1965.)

Integrální rovnice prvního druhu tvaru

$$\int_0^c y(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^l} \, d\xi = \text{konst} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^k}, \tag{1}$$

kde

$$0 < x, \quad \xi < c, \quad l = 1 \quad \text{pro} \quad k = 2, 3, 4,$$
$$l = 3 \quad \text{pro} \quad k = 5,$$

byly sestaveny vesměs pro výpočet průhybu desek se smíšenými okrajovými podmínkami v článcích různých polských autorů, uveřejněných většinou v časopise Archiwum mechaniki stosowanej během posledních čtrnácti let ([4], [5], [6], [8], [9]).

Rovnice vznikly při řešení těchto problémů:

$l = 1, k = 2$: Montážní napětí v desce s počáteční deformací. Zatížení (stejně jako i ve všech následujících případech) je rovnoměrné. Obdélníková deska je prostě podepřená, na části délky c jedné hrany dokonale vetknutá. Neznámou funkcí je moment.

$l = 1, k = 3$: Kroucení přímého prutu. Vzhledem k analogickým diferenciálním rovnicím kroucení přímého prutu s pravoúhlým průřezem a průhybu membrány, podepřené na rovinném obvodě téhož tvaru jako je průřez prutu, je výhodné zaměnit tyto problémy tj. v uvažované integrální rovnici je neznámou funkcí síla reakce membrány, prostě podepřené na obvodě a podél úsečky uvnitř plochy membrány.

$l = 1, k = 4$: Průhyb nekonečného pásu šířky a, prostě podepřeného, s kolmým zářezem délky $a - c$. Neznámou funkcí je moment.

$l = 3, k = 5$: Průhyb polopásové desky šířky a. Dvě protější (nekonečně dlouhé) strany jsou prostě podepřené. Třetí strana je na části délky c prostě podepřená, na zbývající části volná. Neznámou funkcí je podporová reakce.

Rovnice tvaru (1), pokud byly řešeny, byly citovanými autory řešeny přibližně bez ohledu na otázku existence řešení. Zatímco široce propracovaná teorie integrálních rovnic 2. druhu poskytuje možnost zjistit existenci řešení a najít řešení v uzavřeném tvaru rovnic i se značně složitými jádry, je řešení integrálních rovnic 1. druhu s těmito složitými singulárními jádry obtížné. Článek podává nástin důkazu existence řešení těchto rovnic pro $c = a/2$. Metoda důkazu spočívá na ortogonalizování jistých úplných systémů funkcí. Používáme zde některých myšlenek ze Schmeidlerovy knihy [1]. Předností zvolené metody je možnost najít přímo tvar funkce, která je řešením uvažované rovnice, nevýhodou však je, že není vhodná pro důkaz unicity řešení.

Pro přehlednost myšlenky důkazu bude důkaz proveden nejdříve pro jednodušší případ $c = a$ a pro případ, že v rovnici (1) je $k = 4$. Konstantu na pravé straně rovnice (1) označme $-2p$. Funkce na pravé straně i jádro rovnice splňují podmínky ([1], str. 31), při nichž lze integrální rovnici 1. druhu převést na systém lineárních rovnic.

Věta 1. *Rovnice*

$$\int_0^a y(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a}}{\frac{n\pi}{a}} \, d\xi = -2p \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4}, \tag{2}$$

$0 < x$, $\xi < a$, *má jediné řešení tvaru* $y(\xi) = -(\frac{1}{2}p)(a\xi - \xi^2)$.

D ů k a z. Rovnici (2) násobíme postupně funkcemi úplného ortogonálního systému $\varphi_\alpha(x) = \sqrt{2/a} \sin(\alpha\pi x)/a$, $0 \leqq x \leqq a$, $(\alpha = 1, 2, \dots)$ a integrujeme podle x. Na pravé straně vzniknou čísla

$$f_\alpha = \int_0^a (-2p) \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \, dx =$$

$$= -2p \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \, dx .$$

Protože platí

$$\int_0^a \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \, dx = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad \alpha \neq n, \\ \frac{a}{2} & \text{pro} \quad \alpha = n, \end{cases}$$

bude

$$f_\alpha = -ap \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \frac{1}{\alpha^4}, \quad (\alpha = 1, 3, \dots).$$

Podobně dostaneme funkce

$$\beta_\alpha(\xi) = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \int_0^a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a}}{\frac{n\pi}{a}} \sin \frac{\alpha\pi x}{a} \, dx = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \frac{a^2}{2\pi} \frac{1}{\alpha} \sin \frac{\alpha\pi\xi}{a},$$

$$(\alpha = 1, 2, \dots).$$

Funkce $\beta_\alpha(\xi)$, $0 \leqq \xi \leqq a$, jsou v intervalu $(0, a)$ ortogonální, nejsou však normované. Příslušné normované funkce budou

$$\beta_n^*(\xi) = \frac{\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{a}{\pi\alpha} \sin \frac{\alpha\pi\xi}{a}}{\sqrt{\left[\int_0^a \left|\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)} \frac{a}{\pi\alpha} \sin \frac{\alpha\pi\xi}{a}\right|^2 d\xi\right]}} = \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \sin \frac{\alpha\pi\xi}{a}, \quad (\alpha = 1, 2, \dots),$$

Uvažovaná integrální rovnice má řešení ([1], str. 151–153] tvaru $y(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \beta_n^*(\xi)$, jestliže řada $\sum_{\alpha=1}^{\infty} |g_\alpha|^2$ konverguje, při čemž $g_n = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{n\alpha} f_\alpha$, kde $c_{n\alpha}$ jsou koeficienty v rozvoji $\beta_n^*(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{n\alpha} \beta_\alpha(\xi)$. Protože v našem případě je $\beta_\alpha^*(\xi) = (2\alpha\pi/a^2) \beta_\alpha(\xi)$, bude

$$g_\alpha = \frac{2\alpha\pi}{a^2} f_\alpha = -\frac{2\alpha\pi}{a^2} ap \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \left(\frac{a}{\alpha\pi}\right)^4 = -2p \sqrt{\left(\frac{2}{a}\right)} \left(\frac{a}{\alpha\pi}\right)^3, \quad (\alpha = 1, 3, \dots).$$

Protože z těchto čísel vytvořená řada $\sum_{\alpha=1,3,\dots}^{\infty} |g_\alpha|^2$ konverguje, rovnice (2) má řešení tvaru

$$y(\xi) = -2p \frac{2}{a} \left(\frac{a}{\pi}\right)^3 \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\xi}{a}}{n^3}.$$

Protože podle [12] je součet řady

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3} = \frac{\pi}{8} (\pi x - x^2), \quad 0 < x < \pi,$$

bude

$$\sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi\xi}{a}}{n^3} = \frac{\pi^3}{8a} \left(\xi - \frac{\xi^2}{a}\right),$$

a podle toho $y(\xi) = -p/2 \, (a\xi - \xi^2)$. Z úplnosti systému funkcí $\beta_\alpha^*(\xi)$ na intervalu $(0, a)$ plyne, že řešení je jediné.

Získaný výsledek lze obdržet i jinou cestou ([6]).

Tohoto způsobu řešení se dá použít i pro případ obdélníkové desky s rozměry $a \times b$, prostě podepřené podél tří stran a dokonale vetknuté podél strany délky a. V tomto případě jádro

$$K(x, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a}}{\frac{n\pi}{a}}, \quad \text{kde} \quad Q_n = \operatorname{cotgh} \frac{n\pi b}{a} - \frac{\frac{n\pi b}{a}}{\sinh^2 \frac{n\pi b}{a}},$$

funkce na pravé straně

$$f(x) = -2p \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} F_n \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^4}, \quad \text{kde} \quad F_n = \operatorname{tgh} \frac{n\pi b}{a} - \frac{\frac{n\pi b}{2a}}{\cosh^2 \frac{n\pi b}{2a}}.$$

Řešení příslušné integrální rovnice je

$$y(\xi) = -4p \frac{a^2}{\pi^2} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{F_n}{Q_n} \frac{\sin \frac{n\pi\xi}{a}}{n^3},$$

což se opět shoduje s výsledkem získaným jinou cestou ([2]). V limitním případě, pro $b \to \infty$, je $F_n \to 1$, $Q_n \to 1$ a dostáváme předcházející výsledek.

V dalších výpočtech budou potřebné následující součty řad:

$$\text{(3)} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2 - 2^2\alpha^2)} = \frac{1}{(2\alpha)^2} \left[\frac{-1 + (-1)^\alpha}{(2\alpha)^2} \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^3}{2^5} \right],$$

$$\text{(4)} \qquad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 2^2\alpha^2)^2} = \frac{3\pi^2}{2^8\alpha^4},$$

$$\text{(5)} \qquad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)^2} = \frac{1}{(2\alpha)^3} \left[\frac{1}{2\alpha} \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\alpha - 1} \right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{(2\alpha - 1)^2} \right) \right],$$

$$\text{(6)} \qquad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 2^2\alpha^2)(n^2 - 2^2\beta^2)} = \frac{\pi^2}{2^8\alpha^2\beta^2}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$(7)\quad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-2^2\alpha^2)(n^2-2^2\beta^2)} = \frac{1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\beta-1}}{(2\alpha)^2(2\beta)^2} -$$

$$- \frac{\frac{1}{2\beta+1}+\frac{1}{2\beta+3}+\ldots+\frac{1}{2\alpha-1}}{(\alpha 2)^2\left[(2\alpha)^2-(2\beta)^2\right]}, \quad \alpha > \beta,$$

$$(8)\quad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-2^2\alpha^2)} = -\frac{1}{(2\alpha)^2}\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2\alpha-1}\right),$$

$$(9)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2(n^2-2^2\alpha^2)} = \frac{1}{(2a)^2}\left[-G+\frac{(-1)^\alpha}{2\alpha}\sum_{n=1}^{2\alpha-1}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right],$$

kde $G = \sum_{n=1}^{\infty}[\sin(n\pi/2)]/n^2$ je tzv. Catalanova konstanta 0,915 96 ...,

$$(10)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n(n^2-2^2\alpha^2)} = -\frac{1}{(2\alpha)^2}\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{\alpha-1}}{2\alpha-1}\right),$$

$$(11)\quad \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^6(n^2-2^2\alpha^2)^2} = \frac{1}{(2\alpha)^4}\left(\frac{7\pi^2}{2^8\alpha^4}-\frac{\pi^4}{3\,.\,2^6\,\alpha^2}-\frac{\pi^6}{3\,.\,5\,.\,2^6}\right),$$

$$(12)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6(n^2-2^2\alpha^2)(n^2-2^2\beta^2)} = \frac{1}{2^4\alpha^2\beta^2}\left[\frac{\alpha^6-\beta^6}{2^2\alpha^4\beta^4(2^2\alpha^2-2^2\beta^2)}\frac{\pi^2}{8}+\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha^2+\beta^2}{2^2\alpha^2\beta^2}\frac{\pi^4}{3\,.\,2^5}+\frac{\pi^6}{3\,.\,5\,.\,2^6}\right], \quad \alpha \neq \beta,$$

$$(13)\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^2-2^2\alpha^2} = \frac{(-1)^\alpha}{2\alpha}\left(1-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{(-1)^{\alpha+1}}{2\alpha-1}\right).$$

Součty (3)–(5), (7)–(13) dostaneme pomocí rozložení obecného členu řady na částečné zlomky a použitím známých součtů řad ([3]), součet (6) metodou podobnou jako v článku [12].

Věta 2. *Rovnice*

$$(14)\quad \int_0^{\frac{1}{2}a} y(\xi)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\xi}{a}}{\frac{n\pi}{a}}\,d\xi = \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^3}$$

má řešení tvaru

$$y(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \, \beta_n^*(\xi) \,, \tag{15}$$

kde $\beta_n^*(\xi) = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha n} \, \beta_\alpha(\xi)$ *jsou funkce, které vzniknou aplikací Schmidtova ortogonalizačního procesu na funkce*

$$\beta_\alpha(\xi) = \int_0^{\frac{1}{2}a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi x}{a} \sin \dfrac{n\pi \xi}{a}}{\dfrac{n\pi}{a}} \varphi_\alpha(x) \, \mathrm{d}x \,, \quad kde \quad \varphi_\alpha(x) = \sqrt{\left(\frac{4}{a}\right)} \sin \frac{2\alpha\pi x}{a} \,,$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots) \,,$$

přitom

$$g_n = \sum_{\alpha=1}^{n} c_{\alpha n} f_\alpha \,, \quad f_\alpha = \int_0^{\frac{1}{2}a} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi x}{a}}{\left(\dfrac{n\pi}{a}\right)^3} \varphi_\alpha(x) \, \mathrm{d}x \,.$$

Důkaz. Rovnici (14) vynásobíme postupně funkcemi ortogonálního systému $\varphi_\alpha(x) = \sqrt{(4)/a} \sin (2\alpha\pi x)/a$, $(\alpha = 1, 2, \ldots)$, úplného na intervalu $(0, a/2)$ a integrujeme podle x. Na pravé straně dostaneme čísla

$$f_\alpha = 2 \sqrt{\left(\frac{4}{a}\right)} \left(\frac{a}{\pi}\right)^4 \alpha \cos \alpha\pi \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{2}}{n^3(n^2 - 2^2\alpha^2)} \,, \quad (\alpha = 1, 2, \ldots) \,.$$

Funkce

$$\beta_\alpha(\xi) = \sqrt{\left(\frac{4}{a}\right)} \left[2\alpha \left(\frac{a}{\pi}\right)^2 \cos \alpha\pi \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{2} \sin \dfrac{n\pi\xi}{a}}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)} + \frac{a}{4} \frac{\sin \dfrac{2\alpha\pi\xi}{a}}{2\alpha \dfrac{\pi}{a}} \right] , \quad (\alpha = 1, 2, \ldots) \,,$$

podrobíme ortogonalizačnímu procesu:

$$\beta_1^*(\xi) = \frac{\beta_1(\xi)}{\sqrt{\left(\int_0^{\frac{1}{2}a} |\beta_1(\xi)|^2 \, \mathrm{d}\xi\right)}} =$$

$$= \frac{-2\left(\dfrac{a}{\pi}\right)^2 \sqrt{\left(\dfrac{4}{a}\right)} \left(\displaystyle\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{2} \sin \dfrac{n\pi\xi}{a}}{n(n^2 - 2^2)} - \frac{\pi}{16} \sin \frac{2\pi\xi}{a} \right)}{\sqrt{\left[-2 \sqrt{\left[\left(\dfrac{4}{a}\right)\left(\dfrac{a}{\pi}\right)^2\right]^2} \left[\dfrac{a}{4} \displaystyle\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2 - 2^2)^2} + \frac{a}{4} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 2^2)^2} + \frac{a}{4} \frac{\pi^2}{16^2} \right]\right.}} \,.$$

Číslo g_1 dostaneme, nahradíme-li ve výrazu pro funkci $\beta_1^*(\xi)$ funkci $\beta_1(\xi)$ číslem

$$f_1 = K\frac{2a}{\pi}\cos\pi\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-2^2)}\,,\quad \text{kde}\quad K = \sqrt{\left(\frac{4}{a}\right)\left(\frac{a}{\pi}\right)^3}:$$

$$g_1^2 = \left(\frac{\pi K}{a}\right)^2\frac{\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n^3(n^2-2^2)}\right]^2}{\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n^2(n^2-2^2)^2}+\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{1}{n(n^2-2^2)^2}+\frac{\pi^2}{16^2}}\,.$$

Použitím součtů (3), (4) a (5) dostaneme

$$g_1^2 = \text{konst}\,\frac{\left(-\frac{\pi}{2^3}-\frac{\pi^3}{2^5}\right)^2}{\frac{3\pi^2}{2^8}+\frac{1}{2^3}+\frac{\pi^2}{2^3}} < \text{konst}\,\frac{\left(-\frac{\pi}{2^3}-\frac{\pi^3}{2^5}\right)^2}{\frac{3\pi^2}{2^8}} = \tilde{g}_1^2\,.$$

Číslo $\tilde{g}_1^2$ tedy vznikne, omezíme-li se ve dvojčlenu pro funkci $\beta_1(\xi)$ jen na prvního sčítance.

Podobně utvoříme $\beta_2(\xi)$, ortogonalizací dostaneme $\beta_2^*(\xi)$, vypočteme zde se vyskytující integrály a použijeme součtů řad (4), (5), (6), (7), a po úpravě dostaneme číslo

$$g_2^2 = \text{konst}\,\frac{\left\{\frac{1}{2^2}\left(-\frac{\pi^3}{2^5}\right)+\left(\frac{\pi}{2^3}+\frac{\pi^3}{2^5}\right)\frac{\frac{1}{2^2}\left[\frac{\pi^2}{2^8}+3\left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{3^2\,.\,4^3}\right)\right]}{\frac{3\pi^2}{2^8}+\frac{1}{2^3}+\frac{\pi^2}{2^8}}\right\}^2}{\frac{1}{2^4}\left[\frac{3\pi^2}{2^8}+\frac{1+\frac{1}{3}}{2^5}+\frac{1+\frac{1}{3^2}}{2^4}+\frac{\pi^2}{2^8}\right]-\frac{\left\{\frac{1}{2^2}\left[\frac{\pi^2}{2^8}+3\left(\frac{1}{4^3}-\frac{1}{3^2\,.\,4^3}\right)\right]\right\}^2}{\frac{3\pi^2}{2^8}+\frac{1}{2^3}+\frac{\pi^2}{2^8}}}\,.$$

Uvedená konstanta je rovna číslu $4a^3/\pi^4$ a tedy nezávisí na n.

Pro důkaz konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty}|g_n|^2$ je důležité, že zlomek, vyjadřující g_2^2 (g_α^2) můžeme krátit činitelem $1/2^4$ $(1/\alpha^4)$.

Dále zase omezíme-li se ve výrazu pro $\beta_2(\xi)$ jen na prvního sčítance, dostaneme

$$\tilde{g}_2^2 = \text{konst}\,\frac{\left[-\frac{\pi^3}{2^5}+\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2^3}+\frac{\pi^3}{2^5}\right)\right]^2}{\frac{3\pi^2}{2^8}-\frac{\pi^2}{3\,.\,2^8}}\,.$$

Podobně se tvoří další členy.

Pro důkaz konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2$ si všimneme nejdříve, že $\tilde{g}_2^2/\tilde{g}_1^2 < 1$, tedy že

$$(16) \qquad \left[\frac{-\dfrac{\pi^3}{2^5} + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\pi}{2^3} + \dfrac{\pi^3}{2^5}\right)}{-\dfrac{\pi}{2^3} - \dfrac{\pi^3}{2^5}}\right]^2 < \frac{\dfrac{3\pi^2}{2^8} - \dfrac{\pi^2}{3 \, . \, 2^8}}{\dfrac{3\pi^2}{2^8}},$$

neboť nahradíme-li v čitateli levé strany nerovnosti (16) výraz $\pi^3/2^5$ výrazem $\pi/2^3 + \pi^3/2^5$, čitatel se zvětší a celá levá strana nerovnosti (16) se zjednoduší na tvar $(1 - \frac{1}{3})^2$, což je číslo skutečně menší než $1 - (\frac{1}{3})^2$, které je na pravé straně nerovnosti (16).

Obecně platí

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{\tilde{g}_{n+1}}{\tilde{g}_n}\right|^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{(1 - a_n)^2}{1 - a_n^2}, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{1}{n + 2}.$$

Ukázali jsme již, že $a_1 = \frac{1}{3}$. Podobnou úpravou, které jsme podrobili nerovnost (16), dostaneme při výpočtu podílu $|\tilde{g}_3/\tilde{g}_2|^2$ číslo

$$a_2 = \frac{\dfrac{1}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3}}{\dfrac{3}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3}} = \frac{1}{4},$$

pro podíl $|\tilde{g}_4/\tilde{g}_3|^2$ číslo

$$a_3 = \frac{\dfrac{1}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3} - \dfrac{\left[\dfrac{1}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3}\right]^2}{\dfrac{3}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3}}}{\dfrac{3}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3} - \dfrac{\left[\dfrac{1}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3}\right]^2}{\dfrac{3}{2^8} - \left(\dfrac{1}{2^8}\right)^2 \dfrac{2^8}{3}}}$$

a obecně se dá ukázat, že napíšeme-li číslo a_n ve tvaru $a_n = M/N$, bude

$$a_{n+1} = \frac{M - \dfrac{M^2}{N}}{N - \dfrac{M^2}{N}}.$$

Proto předpokládáme-li $a_n = 1/(n+2)$, bude

$$a_{n+1} = \frac{1 - \dfrac{1}{n+2}}{n + 2 - \dfrac{1}{n+2}} = \frac{1}{(n+1)+2}.$$

Teď lze již snadno dokázat pomocí Raabeova kritéria konvergenci řady $\sum_{n=1}^{\infty} |g_n|^2$:

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{\tilde{g}_n}{\tilde{g}_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left[\frac{1 - a_n^2}{(1-a_n)^2} - 1\right] = 2\lim_{n\to\infty} n \frac{a_n - a_n^2}{(1-a_n)^2} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty} n \frac{\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{(n+2)^2}}{\left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right)^2} = 2\,.$$

K případnému použití řady (15) pro výpočet hodnot funkce $y(\xi)$, která je řešením rovnice (14) a nakreslení jejího grafu je ještě třeba sečíst řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{2} \sin \dfrac{n\pi\xi}{a}}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)},$$

jimiž jsou určeny funkce $\beta_\alpha^*(\xi)$.

Věta 3. *Platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \dfrac{n\pi}{2} \sin nx}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)} = C_1 \cos 2\alpha x + C_2 \sin 2\alpha x\,, \qquad x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \tag{17}$$

kde

$$C_1 = \frac{1}{8\alpha^2}\left[-\cos 2\alpha x \operatorname{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2\alpha x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\right],$$

$$C_2 = -\frac{1}{8\alpha^2}\left[\sin 2\alpha x \operatorname{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \int \frac{\sin 2\alpha x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\right] + K_2\,,$$

$$K_2 = \frac{1}{2\alpha}\left\{\frac{(-1)^{\alpha+1}}{4}\left[1 + \sum_{k=1}^{\alpha-1}(-1)^k \frac{(4\alpha^2 - 2^2)(4\alpha^2 - 4^2)\ldots[4\alpha^2 - (2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k+1)}\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^\alpha}{2\alpha}\left(1 - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{(-1)^{\alpha+1}}{2\alpha - 1}\right)\right\}.$$

Důkaz. Řada v rovnosti (17) je Fourierovou řadou některé funkce $v(x)$

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin nx}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)}. \tag{18}$$

Snadno se ověří, že rovnici (18) lze dvakrát derivovat člen po členu. Provedeme-li derivování a utvoříme součet

$$v''(x) + 2^2\alpha^2\, v(x),$$

dostaneme

$$v''(x) + 2^2\alpha^2\, v(x) = g(x), \tag{19}$$

kde

$$g(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin nx}{n}.$$

Funkce $v(x)$ vyhovuje tedy diferenciální rovnici (19). Přitom z rovnice (18) a z rovnice vzniklé jejím derivováním, plynou dosazením $x = 0$ pro $v(x)$ počáteční podmínky

$$v(0) = 0, \quad v'(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 2^2\alpha^2}. \tag{20}$$

Funkci $v(x)$ lze tedy jednoznačně určit jako řešení rovnice (19) s podmínkami (20).

Protože je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin nx}{n} = \frac{1}{2} \operatorname{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right),$$

bude $v''(x) + 2^2\alpha^2\, v(x) = -\frac{1}{2} \operatorname{lgtg}(\pi/4 + x/2)$.

Obecné řešení příslušné rovnice homogenní je $v(x) = C_1 \cos 2\alpha x + C_2 \sin 2\alpha x$. Dále metodou variace konstant dostaneme

$$C_1(x) = \frac{1}{8\alpha^2}\left[-\cos 2\alpha x \operatorname{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \int \frac{\cos 2\alpha x}{\cos x}\, dx\right] + K_1,$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{8\alpha^2}\left[\sin 2\alpha x \operatorname{lgtg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - \int \frac{\sin 2\alpha x}{\cos x}\, dx\right] + K_2.$$

Z počátečních podmínek vyplývá, že $K_1 = 0$. Pro výpočet konstanty K_2 použijeme rovnosti

$$v'(0) = 2\,\alpha\,.\,C_2(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^2 - 2^2\alpha^2}\,.$$

Užitím součtu (13), výpočtem integrálu

$$\int \frac{\sin 2\alpha x}{\cos x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= (-1)^\alpha \left\{ \cos x + \sum_{k=1}^{\alpha-1} (-1)^k \frac{(4\alpha^2 - 2^2)(4\alpha^2 - 4^2)\ldots(4\alpha^2 - (2k)^2]}{(2k+1)!\,(2k+1)} \cos^{2k+1} x \right\}$$

a dosazením dostáváme tvrzení věty.

Všimněme si ještě zvláště pravého krajního bodu intervalu $(0, a/2)$, $\xi = a/2$. Při přibližném řešení rovnice (14) ([8]) hodnota funkce $y(\xi)$ pro $\xi = a/2$ rychle vzrostla a při přesném řešení se očekávala hodnota nekonečně velká. Pro tento bod řada na levé straně rovnice (15) nabývá tvaru

$$\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)} = -\frac{1}{2^2\alpha^2}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2\alpha - 1}\right).$$

Protože víme, že obecný člen $\beta_n^*(\xi)$ se dá vždy krátit číslem $1/n^4$, je vidět, že po tomto zkrácení je hodnota $\beta_n^*(a/2)$ pro $n \to \infty$ určena divergentní řadou.

Pro důkaz existence řešení rovnice (1) s mocnitelem $k = 2, 4$ použijeme analogického postupu jako v důkazu věty 2. Pro exponent $k = 1$ nelze již uvedeného postupu použít. V případě exponentů $l = 3$, $k = 5$ při stejné metodě důkazu existence řešení dostáváme řadu, jejíž majorantou je konvergentní řada z důkazu věty 2.

Literatura

[1] *W. Schmeidler:* Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik. Leipzig 1950.
[2] *K. Girkmann:* Flächentragwerke. Wien 1946.
[3] *I. M. Ryshik, I. S. Gradstein:* Summen-, Produkt-, und Integraltafeln. Berlin 1957.
[4] *W. Nowacki:* Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegowych I. Archiwum mechaniki stosowanej 3—4, 1951.
[5] *W. Nowacki:* Płyty prostokątne o mieszanych warunkach brzegovych II. Arch. mech. stos. 4, 1953.
[6] *S. Kaliski, W. Nowacki:* Some Problems of Structural Analysis of Plates with Mixed Boundary Conditions. Arch. mech. stos. 4, 1956.
[7] *W. Nowacki, Z. Olesiak:* Drgania, wyboczenie i zginanie płyty kołowej na części obwodu utwierdzonej zupełnie, na szęści swobodnie podpartej. Arch. mech. stos. 8, 1956.
[8] *W. Nowacki:* O pewnych przypadkach skręcania prętów. Arch. mech. stos. 9, 1953.

[9] *W. Nowacki:* Naprężenia montażowe w płytach. Arch. mech. stos. 2, 1956.
[10] *W. Nowacki:* Zagadnienia dynamiki i stateczności płyty prostokątnej o nieciągłych warunkach brzegowych. Arch. mech. stos. 2, 1955.
[11] *A. Kacner:* A Closed Solution in the Case of a Semi-infinite Plate with Discontinuous Boundary Conditions I. Arch. mech. stos. 4, 1957.
[12] *A. Kacner:* A Closed Solution in the Case of a Semi-infinite Plate with Discontinuous Boundary Conditions II. Arch. mech. stos. 1, 1958.

Резюме

РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

БОГУСЛАВА ГАНЬКОВА (Bohuslava Haňková)

Интегральные уравнения

$$(1) \qquad \int_0^c y(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi \xi}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^l} \, d\xi = \text{konst} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^k}$$

$$0 < x, \ \xi < c, \quad l = 1 \quad \text{для} \quad k = 2, 3, 4,$$
$$l = 3 \quad \text{для} \quad k = 5,$$

были составлены цитированными авторами для различных проблем из теории упругости, которые можно свести к решению прогиба плиты с разрывными краевыми условиями. В предлагаемой статье содержится доказательство существования решения этих уравнений для $c = a/2$. Метод доказательства заключается в ортогонализации известных полных систем функций.

Для наглядности доказательство проведено прежде всего для более простого случая $c = a$ с предположением, что в уравнении (1) показатель $k = 4$. Далее доказательство проведено для показателей $l = 1$, $k = 3$. Доказательства о существовании решений уравнений с остальными приведенными показателями аналогичны.

При вычислениях оказалось необходимым искать суммы некоторых бесконечных числовых рядов, вообще вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^k (n^2 - 2^2 \alpha^2)^l}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6, \quad l = 1, 2.$$

Суммы были найдены путем разложения общего члена ряда в простые дроби.

Чтобы вычислить значения функции $y(\xi)$, которая является решением уравнения (1), была при помощи дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами найдена сумма функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin n\xi}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)}.$$

Zusammenfassung

LÖSUNG EINIGER INTEGRALGLEICHUNGEN ERSTER ART

Bohuslava Haňková

Die Integralgleichungen

$$(1) \qquad \int_0^c y(\xi) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{n\pi\xi}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^l} \, \mathrm{d}\xi = \text{konst} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi x}{a}}{\left(\frac{n\pi}{a}\right)^k},$$

$$0 < x\,, \ \xi < c\,, \quad l = 1 \ \text{ für } \ k = 2, 3, 4\,,$$
$$l = 3 \ \text{ für } \ k = 5\,,$$

wurden von den zitierten Autoren für verschiedene Probleme aus der Theorie der Elastizität zusammengestellt, welche man auf die Lösung der Durchbiegung der Platte mit gemischten Randbedingungen überführen kann. Die Arbeit führt den Entwurf des Beweises über die Existenz der Lösung dieser Gleichungen für $c = a/2$. Die Methode des Beweises beruht auf dem Orthogonalisierungsverfahren bekannter vollständiger Funktionensysteme.

Wegen der Übersichtlichkeit wird der Beweis zuerst für den einfacheren Fall $c = a$ (der Exponent $k = 4$) durchgeführt. Weiter wird der Beweis für die Gleichung (1) mit den Exponenten $l = 1$, $k = 3$ durchgeführt. Die Existenzbeweise für die Lösung der Gleichungen mit den übrigen vorstehenden Exponenten sind analogisch.

Bei den Berechnungen war es notwendig einige unendliche Zahlenreihen zu summieren. Diese Zahlenreihen sind insgesamt von der Form

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n^k(n^2 - 2^2\alpha^2)^l}, \quad k = 1, 2, \ldots, 6\,, \quad l = 1, 2\,.$$

Die Summen wurden mittels Zerlegung des allgemeinen Gliedes der Reihe in Partialbrüche gefunden.

Für die Berechnung der Werte der Lösungsfunktion $y(\xi)$ der Gleichung (1) wurde unter Benützung der Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten die Funktionenreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin n\xi}{n(n^2 - 2^2\alpha^2)}$$

summiert.

Adresa autorky: C.Sc. *Bohuslava Haňková*, Katedra matematiky a deskr. geom. SF ČVUT, Trojanova 13, Praha 2.