Václav Vodička

O jednom vzorci z operátorového počtu

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 2, 123–129

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103078

O JEDNOM VZORCI Z OPERÁTOROVÉHO POČTU

VÁCLAV VODIČKA

(Došlo dne 1. srpna 1966.)

Článek jedná o jisté formuli z teorie Laplaceovy integrální transformace. Jde tu o vzorec, který přes jeho poměrně elementární ráz i jednoduché odvození buď vůbec nenajdeme v současných sbírkách originálů a obrazů, nebo jsou tu často uvedeny výsledky, jež nebudí důvěru. Představu o fyzikálních případech, kdy je možno použít našeho operátorového vzorce, získá čtenář z příkladu o ohřevu poloprostoru.

1. ZÁKLADNÍ FORMULE

Při Laplaceově operaci

$$L[h(t)] = \bar{h}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\, h(t)\, \mathrm{d}t\,, \quad h(t) = L^{-1}[\bar{h}(p)] \tag{1.1}$$

hledáme originál

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{(p+b^2)}}}{p\sqrt{(p+b^2)}}\right], \quad a \geqq 0\,, \quad b > 0\,. \tag{1.2}$$

Píšeme-li ve známém vztahu

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{p}}}{\sqrt{p}(\sqrt{p}+b)}\right] = e^{ab+b^2t}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right), \quad \Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi$$

$p + b^2$ místo p, dostaneme

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{q(q+b)}\right] = e^{ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right), \quad q^2 = p + b^2\,.$$

S pomocí tohoto vzorce pak vychází pro hledaný originál (1.2)

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{q(q^2-b^2)}\right] = \frac{1}{2b}\,L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{q}\left(\frac{1}{q-b} - \frac{1}{q+b}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2b}\left[e^{-ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} - b\sqrt{t}\right) - e^{ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right)\right],$$

tedy celkem

$$(1.3)\quad L^{-1}\left[\frac{e^{-a\sqrt{(p+b^2)}}}{p\sqrt{(p+b^2)}}\right]=\frac{1}{2b}\left[e^{-ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}-b\sqrt{t}\right)-e^{ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}+b\sqrt{t}\right)\right],$$

$$a\geqq 0\,,\quad b>0\,,\quad \Psi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-\xi^2}\,\mathrm{d}\xi\,;$$

tato formule zřejmě platí také pro všechna záporná b.

Přes elementární ráz i jednoduché odvození se vzorec (1.3) příliš často neuvádí v literatuře a když ano, tedy se mnohdy podávají výsledky, které vyžadují přezkoumání, [1], [2].

2. OHŘÍVÁNÍ POLOPROSTORU

2.1. Obecná formulace problému. Homogenní a isotropní prostředí $x \geqq 0$ s tepelnou vodivostí λ, specifickým teplem c a s hustotou γ má nulovou počáteční teplotu. Od okamžiku $t = 0$ je počne povrchovou rovinou $x = 0$ zahřívat tepelný proud $q(y, z, t)$. Teplotní pole $u = u(x, y, z, t)$ v poloprostoru je za těchto poměrů řešením diferenciálního problému

$$(2.1.1)\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),\quad x>0\,,\quad |y|<+\infty\,,\quad |z|<+\infty\,,$$
$$t>0\,,\quad \varkappa=\frac{\lambda}{c\gamma}\,,$$

$$(2.1.2)\quad -\lambda\frac{\partial u}{\partial x}=q(y,z,t)\,,\quad x=0\,,\quad |y|<+\infty\,,\quad |z|<+\infty\,,\quad t>0\,,$$

$$(2.1.3)\quad u(x,y,z,t)\to 0\quad \text{pro}\quad x\to+\infty,\ |y|<+\infty,\ |z|<+\infty,\ t>0\,,$$

$$(2.1.4)\quad u(x,y,z,0)=0,\ x>0,\ |y|<+\infty,\ |z|<+\infty\,.$$

Omezíme-li se zprvu mlčky jen na takové funkce $q(y, z, t)$, že zaručují pro $y^2 + z^2 \to +\infty$ při všech $x > 0$, $t > 0$ platnost limitního vztahu $u(x, y, z, t) \to 0$, převádí Fourierova transformace

$$(2.1.5)\quad \bar{h}(\eta,\zeta)=F[h(y,z)]=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}h(y,z)\,e^{i(\eta y+\zeta z)}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,,$$

$$h(y,z)=F^{-1}[\bar{h}(\eta,\zeta)]=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}\bar{h}(\eta,\zeta)\,e^{-i(\eta y+\zeta z)}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\zeta$$

náš problém (2.1.1)–(2.1.4) v novou úlohu

$$(2.1.6)\quad \frac{\partial\bar{u}}{\partial t}=\varkappa\left(\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial x^2}-\varrho^2\bar{u}\right),\quad x>0\,,\quad t>0\,,\quad \varrho^2=\eta^2+\zeta^2\,,$$

$$-\lambda \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} = \bar{q}(\eta, \zeta, t)\,, \quad x = 0\,, \quad t > 0\,, \tag{2.1.7}$$

$$\bar{u}(x, \eta, \zeta, t) \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to +\infty,\ t > 0\,, \tag{2.1.8}$$

$$\bar{u}(x, \eta, \zeta, 0) = 0\,, \quad x > 0 \tag{2.1.9}$$

k určení Fourierova obrazu $\bar{u}(x, \eta, \zeta, t)$ hledaného řešení $u(x, y, z, t)$.

Laplaceovo zobrazování (1.1) pak změní problém (2.1.6)–(2.1.9) v úlohu

$$\frac{\mathrm{d}^2\bar{\bar{u}}}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{\varkappa}(p + \varkappa\varrho^2)\,\bar{\bar{u}} = 0\,, \quad x > 0\,, \tag{2.1.10}$$

$$\lambda \frac{\mathrm{d}\bar{\bar{u}}}{\mathrm{d}x} + \bar{\bar{q}}(\eta, \zeta, p) = 0 \quad \text{pro} \quad x = 0\,, \tag{2.1.11}$$

$$\bar{\bar{u}}(x, \eta, \zeta, p) \to 0 \quad \text{pro} \quad x \to +\infty \tag{2.1.12}$$

k výpočtu Laplaceova obrazu $\bar{\bar{u}}(x, \eta, \zeta, p)$ funkce $\bar{u}(x, \eta, \zeta, t)$; přitom ovšem znamená $\bar{\bar{q}}(\eta, \zeta, p)$ Laplaceův obraz funkce $\bar{q}(\eta, \zeta, t)$.

2.2 Topný proud nezávisí na čase. Řešením problému (2.1.10)–(2.1.12) je výraz

$$\bar{\bar{u}}(x, \eta, \zeta, p) = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\lambda}\,\frac{e^{-xs/\sqrt{\varkappa}}}{s}\,\bar{\bar{q}}(\eta, \zeta, p)\,, \quad s^2 = p + \varkappa\varrho^2\,, \tag{2.2.1}$$

který ve zvláštním případě, kdy nezávisí tepelný proud $q(y, z)$ na čase t, nabude vzhledem k okolnosti $\bar{\bar{q}}(\eta, \zeta, p) = (1/p)\,\bar{q}(\eta, \zeta)$ tvaru

$$\bar{\bar{u}}(x, \eta, \zeta, p) = \frac{\sqrt{\varkappa}}{\lambda}\,\frac{e^{-xs/\sqrt{\varkappa}}}{ps}\,\bar{q}(\eta, \zeta)\,, \quad s^2 = p + \varkappa\varrho^2\,, \tag{2.2.2}$$

tj. právě tvaru uvedeného na levé straně formule (1.3).

Čtenář vidí, že jsme tu dospěli k celé skupině problémů, při nichž má náš základní vzorec (1.3) podstatnou roli. Řadu zvláštních úloh patřících k právě vymezenému cyklu otázek řeší ve svých nedávných pracích specialisté Oosterkamp, Jaeger, Trigger, Chao, Loewen a mnozí jiní.

I když jsme už splnili vlastní úkol tohoto článku, jímž bylo pouze odvodit operátorovou formuli (1.3) a ukázat, v jakých fyzikálních úlohách přichází k platnosti, všimneme si přece ještě i zpětného přechodu od Laplaceova obrazu (2.2.2) k hledanému řešení $u(x, y, z, t)$ problému (2.1.1)–(2.1.4).

Zavedeme-li označení

$$U(a, b, t) = e^{-ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} - b\sqrt{t}\right) - e^{ab}\,\Psi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}} + b\sqrt{t}\right), \tag{2.2.3}$$

dává výraz (2.2.2) podle (1.3) ihned Fourierův obraz

$$\bar{u}(x, \eta, \zeta, t) = \frac{\bar{q}(\eta, \zeta)}{2\lambda\varrho} U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right), \quad \varrho^2 = \eta^2 + \zeta^2$$

žádaného řešení $u(x, y, z, t)$. Podle druhého ze vzorců (2.1.5) pak vychází pro hledané teplotní pole v našem poloprostoru výraz

$$(2.2.4) \qquad u(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{q}(\eta, \zeta)}{\varrho} U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right) e^{-i(\eta y + \zeta z)} \, d\eta \, d\zeta\,,$$
$$\varrho^2 = \eta^2 + \zeta^2\,;$$

zkratka $\varkappa$ je určena předpisem (2.1.1), výraz U vzorcem (2.2.3).

S pomocí známé skutečnosti

$$F^{-1}\left[\frac{1}{\varrho} U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right)\right] = \int_0^{\infty} J_0(r\varrho)\, U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right) d\varrho\,, \quad r^2 = y^2 + z^2$$

z teorie Fourierovy transformace (2.1.5) a s použitím konvolučního teorému této transformace vychází řešení (2.2.4) v dalších tvarech

$$(2.2.5) \qquad u(x, y, z, t) =$$
$$= \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} q(\sigma, \omega)\, d\sigma\, d\omega \int_0^{\infty} U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right) J_0\{\varrho\sqrt{[(y - \sigma)^2 + (z - \omega)^2]}\}\, d\varrho\,,$$

$$(2.2.6) \qquad u(x, y, z, t) =$$
$$= \frac{1}{4\pi\lambda} \iint_{-\infty}^{\infty} q(y - \sigma, z - \omega)\, d\sigma\, d\omega \int_0^{\infty} U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right) J_0[\varrho\sqrt{(\sigma^2 + \omega^2)}]\, d\varrho\,;$$

jsou zřejmě výhodné zejména v těch případech, kdy vykazuje výraz $q(y, z)$ pro tepelný proud rotační symetrii. Ukážeme to aspoň na dvou příkladech.

2.3. Ustálený rotačně souměrný tepelný proud. V Oosterkampově úloze [3] je při daných konstantách Q, R

$$(2.3.1) \qquad \begin{aligned} q(y, z) &= Q \quad \text{pro} \quad 0 \leqq y^2 + z^2 < R^2\,, \\ q(y, z) &= 0 \quad \text{pro} \quad y^2 + z^2 > R^2 \end{aligned}$$

a naše formule (2.2.5) dává s pomocí Gegenbauerova vztahu

$$\int_0^{2\pi} J_0[\varrho\sqrt{(r^2 + s^2 - 2rs\cos\psi)}]\, d\psi = 2\pi\, J_0(\varrho r)\, J_0(\varrho s)$$

po krátkém počítání obvyklý výsledek

$$(2.3.2) \quad u(x, y, z, t) = \frac{QR}{2\lambda} \int_0^{\infty} J_0(\varrho r)\, J_1(\varrho R)\, U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right) \frac{d\varrho}{\varrho}\,, \quad r^2 = y^2 + z^2\,.$$

Jako druhý příklad uvádíme poměry při značně umělé situaci (pro svůj spíše teoretický význam se sotva najde v literatuře), kdy se poloprostor vytápí tepelným proudem intensity

$$q(y, z) = Q\, J_0(\alpha r)\,, \quad r^2 = y^2 + z^2\,; \tag{2.3.3}$$

$\alpha > 0$, $Q > 0$ jsou dané konstanty. Protože nemá čtenář možnost nalézt výsledky v literatuře, naznačíme tu podrobněji postup výpočtu, který tentokráte provedeme s pomocí vzorce (2.2.6).

Používajíce polárních souřadnic

$$y = r\cos\vartheta\,, \quad z = r\sin\vartheta\,, \quad \sigma = s\cos\varphi\,, \quad \omega = s\sin\varphi\,, \quad s \geqq 0\,, \quad 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$$

a výše zmíněného Gegenbauerova integrálního vztahu, dostáváme z formule (2.2.6) snadno

$$u(x, y, z, t) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\lambda}\int_0^\infty s\,\mathrm{d}s \int_0^{2\pi} J_0[\alpha\sqrt{(r^2 + s^2 - 2rs\cos\psi)}]\,\mathrm{d}\psi \int_0^\infty U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right) J_0(\varrho s)\,\mathrm{d}\varrho =$$

$$= \frac{Q}{2\lambda} J_0(\alpha r)\int_0^\infty U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \varrho\sqrt{\varkappa}, t\right)\mathrm{d}\varrho \int_0^\infty s J_0(\alpha s)\, J_0(\varrho s)\,\mathrm{d}s\,.$$

Integrál podle s má hodnotu $(1/\alpha)\,\delta(\varrho - \alpha)$ a hledané temperaturní pole $u(x, y, z, t)$ nabývá se zřetelem ke známým vlastnostem Diracovy funkce δ tvaru

$$u(x, y, z, t) = \frac{Q}{2\alpha\lambda} J_0(\alpha r)\, U\left(\frac{x}{\sqrt{\varkappa}}, \alpha\sqrt{\varkappa}, t\right), \quad r^2 = y^2 + z^2\,; \tag{2.3.4}$$

difuzivita $\varkappa$ je určena předpisem (2.1.1), výraz U se počítá podle vzorce (2.2.3), v němž znamená Ψ komplementární funkci chyb, definovanou předpisem (1.3).

Vzorec (2.3.4) byl odvozen s použitím divergentního integrálu $\int_0^\infty sJ_0(\alpha s)\, J_0(\varrho s)\,\mathrm{d}s$ a čtenář by se snad chtěl přesvědčit přímým výpočtem, že je výraz $u(x, y, z, t)$, tím vzorcem daný, v případě (2.3.3) vskutku řešením základního problému (2.1.1) až (2.1.4). Derivováním lze získat pro funkci $U = U(x/\sqrt{\varkappa}, \alpha\sqrt{\varkappa}, t)$ figurující ve formuli (2.3.4) vztahy

$$\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{x=0} = -2\alpha\,, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \alpha^2 U + \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial U}{\partial t}\,,$$

které spolu se známými vlastnostmi Besselových funkcí čtenáři usnadní přímý důkaz, že vyhovuje řešení $u(x, y, z, t)$ ze vzorce (2.3.4) jak diferenciální rovnici (2.1.1), tak i podmínce (2.1.2). Ověření ostatních dvou požadavků (2.1.3), (2.1.4) je už zcela snadné.

3. DALŠÍ POUŽITÍ POSTUPU Z ODST. 1

Cesta, jíž byl získán základní operátorový vzorec (1.3), je použitelná i v jiných případech. Zpravidla nám uspoří neustálé pracné kontroly, jichž vyžaduje odvozování příslušných operátorových formulí jinými způsoby. Uvedeme tu příklad, který se opírá o vzorec

$$(3.1)\quad L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{q(q-b)}\right] = H(t-a)\,e^{-ab}\int_a^t e^{b\tau} J_0[b\sqrt{(t^2-\tau^2)}]\,\mathrm{d}\tau\,, \quad q^2 = p^2 + b^2\,,$$

jejž jsme odvodili v dřívější práci [4]; H znamená Heavisideovu jednotkovou funkci.

Týmž postupem, jakého jsme v odst. 1 použili při odvozování vzorce (1.3), dostáváme v našem nynějším případě s pomocí (3.1)

$$L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{p^2 q}\right] = L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{q(q^2-b^2)}\right] = \frac{1}{2b}\,L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{q}\left(\frac{1}{q-b} - \frac{1}{q+b}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2b}\,H(t-a)\left\{e^{-ab}\int_a^t e^{b\tau} J_0[b\sqrt{(t^2-\tau^2)}]\,\mathrm{d}\tau - e^{ab}\int_a^t e^{-b\tau} J_0[b\sqrt{(t^2-\tau^2)}]\,\mathrm{d}\tau\right\}.$$

Celkem tedy nacházíme málo známou operátorovou formuli

$$(3.2)\qquad L^{-1}\left[\frac{e^{-aq}}{p^2 q}\right] = \frac{1}{b}\,H(t-a)\int_a^t \operatorname{sh} b(\tau-a)\,J_0[b\sqrt{(t^2-\tau^2)}]\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$a > 0\,, \quad b \neq 0\,, \quad q^2 = p^2 + b^2\,;$$

H znamená, jak už pověděno, jednotkovou funkci. Vzorce tohoto druhu mají svůj význam např. v teorii kmitání a přece se velmi nesnadno hledají v odborné literatuře, jak se může čtenář sám lehko přesvědčit.

4. ZÁVĚREČNÉ POZNÁMKY

Fyzika a technika budou asi nejvíce zajímat úvahy z odst. 2. Ač byly provedeny za omezujících předpokladů obvyklých v teorii Fourierovy a Laplaceovy transformace – viz třeba omezení uvedené těsně před vzorci (2.1.5) –, přece platí výsledky i v mnoha případech obecnějších. Tak je možno jich použít např. i tenkráte, když je tepelný proud $q(y, z)$ roven nenulové konstantě v celé rovině $x = 0$.

Příležitostně se zmíníme o některých situacích, kdy je možno dospěti k zajímavým a málo známým výsledkům i při tepelných proudech závislých na čase. Zvláštní význam tu mají proudy měnící se periodicky.

V dalších pracích uvedeme také některé problémy z teorie mechanických kmitů, jež lze řešit s použitím výsledků z odst. 3.

Literatura

[1] *Диткин В. А., Кузнецов П. И.:* Справочник по операционному исчислению. ГИТТЛ, Москва—Ленинград 1951, стр. 159.

[2] *Теумин И. И.:* Справочник по переходным электрическим процессам. Связиздат, Москва 1951, стр. 369.

[3] *Carslaw H. S., Jaeger J. C.:* Conduction of Heat in Solids. Oxford 1959, str. 264.

[4] *Vodička V.:* O podélném kmitání polonekonečných tyčí. Čs. Čas. Fys. 13 (1963), 81.

Резюме

ОБ ОДНОЙ ФОРМУЛЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ВАЦЛАВ ВОДИЧКА (VÁCLAV VODIČKA)

В статье выводится одна формула, которую нелегко найти в литературе, и которая служит для вычисления оригинальной функции преобразования Лапласа

$$\frac{e^{-a\sqrt{(p+b^2)}}}{p\sqrt{(p+b^2)}}, \quad a \geqq 0, \quad b \neq 0 ;$$

затем на особой группе проблем из теории теплопроводности показано, каким образом можно использовать полученный результат в математической физике.

Примененный метод можно использовать и в других важных случаях в физике или в технике. В качестве примера построен в заключение работы пример оригинальной функции для

$$\frac{e^{-a\sqrt{(p^2+b^2)}}}{p^2\sqrt{(p^2+b^2)}}, \quad a > 0, \quad b \neq 0 .$$

Zusammenfassung

ÜBER EINE FORMEL DER OPERATORENRECHNUNG

VÁCLAV VODIČKA

Der Aufsatz befasst sich mit der Herleitung der im Schrifttum nicht leicht zu findenden Formel für die Berechnung der Originalfunktion zu der Laplace-Transformierten

$$\frac{e^{-a\sqrt{(p+b^2)}}}{p\sqrt{(p+b^2)}}, \quad a \geqq 0, \quad b \neq 0$$

und zeigt an einer ausgedehnten Gruppe von Wärmeleitungsproblemen, wie das Ergebnis in der mathematischen Physik zum Gebrauch kommt.

Die angewandte Herleitungsmethode ist auch in anderen physikalisch und technisch wichtigen Fällen anwendbar. Als Beispiel dazu konstruiert man am Ende der Arbeit die Originalfunktion zu

$$\frac{e^{-a\sqrt{(p^2+b^2)}}}{p^2\sqrt{(p^2+b^2)}}, \quad a > 0, \quad b \neq 0 .$$

Adresa autora: Dr. *Václav Vodička*, Harantova 16, Plzeň.