Aplikace matematiky

Zdeněk Pírko

Ke kinematice motoru s kroužívým pístem

Aplikace matematiky, Vol. 12 (1967), No. 3, 192–208

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103089

KE KINEMATICE MOTORŮ S KROUŽIVÝM PÍSTEM

ZDENĚK PÍRKO

(Došlo dne 28. září 1966.)

OBSAH

ÚVOD

Geometricko kinematickým principem jedné skupiny motorů s krouživým pístem je Bellermannovo mechanické vytvoření cykloidál: Klika délky a_1 otáčí se kolem pevného konce stálou úhlovou rychlostí ω_1, a kolem druhého jejího konce otáčí se současně klika délky a_2 stálou úhlovou rychlostí ω_2. Za tohoto pohybu popisuje volný konec mechanismu čáru, jejíž parametrickou rovnici lze vždy uvést na tvar

$$z = a_1 \exp j\omega_1 t + a_2 \exp j\omega_2 t .$$

Poněvadž pořadí sčítanců na pravé straně této rovnice je nepodstatné, jsou jí určeny dva nucené pohyby Σ/S s – obecně řečeno – rozdílnými dvojicemi kinematických parametrů a s rozdílnými dvojicemi (kruhových) polhodií. Tím pro Bellermannův mechanismus s parametry $a_1, a_2, \omega_1/\omega_2$ nalezeny obě dvojice pevné a pohyblivé kružnice, v souhlase se známou větou o dvojím vytvoření cykloidály.

U motorů Wankelova typu je $\omega_1/\omega_2 = 3$, a kotálení geometricky ekvivalentní s pohybem Σ/S je buďto pericykloidální pohyb kružnice s poloměrem $3a_1$ po kružnici s poloměrem $2a_1$, nebo epicykloidální pohyb kružnice s poloměrem $\frac{1}{3}a_2$ po kružnici s poloměrem $\frac{2}{3}a_2$.

V soustavě bodových trajektorií

$$z = a_1 \exp j\omega_1 t + \zeta \exp j(\omega_1/3)\, t$$

tohoto pohybu vyberme trojici s vytvořujícími body

$$\zeta_0 = a_2\,, \quad \zeta_1 = a_2 \exp j(2\pi/3)\,, \quad \zeta_2 = a_2 \exp j(4\pi/3)\,.$$

Jejich parametrické rovnice jsou

$$z = a_1 \exp j\omega_1 \left(t + \begin{cases} 0 \\ 2\pi/\omega_1 \\ 4\pi/\omega_1 \end{cases} \right) + a_2 \exp j(\omega_1/3) \left(t + \begin{cases} 0 \\ 2\pi/\omega_1 \\ 4\pi/\omega_1 \end{cases} \right),$$

a vyjadřují tedy jednu a touž čáru

$$(z\bar{z})^3 - (3a_1^2 + a_2^2)(z\bar{z})^2 + a_1^2(3a_1^2 - a_2^2)\, z\bar{z} - a_1\, a_2^3(z^2 + \bar{z}^2) - \\ - a_1^2(a_1^2 - a_2^2)^2 = 0\,.$$

V (rozšířené) rovině vyjadřuje tato rovnice racionální tricirkulární sextiku. Pokud $a_1 > 0$, $a_2 > 0$, tato sextika se nerozpadá; doplňme ještě, že pro $a_1 = 0$ je její vlastní součástí kružnice, pro $a_2 = 0$ degeneruje v kružnici, a v obou těchto případech degeneruje ovšem i Bellermannův mechanismus.

Kteroukoli polohou na této čáře prochází bod (ζ_1) o dobu $2\pi/\omega_1$ později, než jím prošel bod (ζ_0), a bod (ζ_2) o touž dobu $2\pi/\omega_1$ později, než jím prošel bod (ζ_1). Trojice bodů (ζ_0), (ζ_1), (ζ_2) tvoří vrcholy rovnostranného trojúhelníka (ideální píst motoru) se středem v nulovém bodě soustavy Σ. Za pohybu Σ/S probíhá tento střed stálou úhlovou rychlostí ω_1 kružnici se středem v nulovém bodě soustavy S a s poloměrem a_1, přičemž se trojúhelník $(\zeta_0)(\zeta_1)(\zeta_2)$ vlivem pericykloidálního záběru stačí, ale tak, že všechny jeho rohy popisují touž sextiku (hranici ideální arény motoru), a týmž jejím bodem procházejí v týchž časových intervalech $2\pi/\omega_1$ po sobě.

Od hranice arény požadujeme, aby byla dostatečně hladká a aby sebe neprotínala. Nezajímáme-li se o parametry konstruktivně technické povahy, postačí nám pro rozbor průběhu čáry

$$z = a_1 \exp j\omega_1 t + a_2 \exp j(\omega_1/3)\, t$$

v závislosti na a_1, a_2 provést rozbor její křivosti v mezích $0 \leqq a_1/a_2 \leqq 1$. Pro $a_1/a_2 = 0$ je aréna kruhová, pro $0 < a_1/a_2 < \frac{1}{9}$ je (nikoli kruhová a) konvexní, pro $\frac{1}{9} < a_1/a_2 < \frac{1}{3}$ je nikoli konvexní (a hladká), pro $a_1/a_2 = \frac{1}{3}$ má dva body úvratu, pro $\frac{1}{3} < a_1/a_2 < 1$ má dva dvojnásobné body uzlové (a zůstává hladká), pro $a_1/a_2 = 1$ přistupuje ještě sebedotyk. Arénami tedy mohou teoreticky být všechny cykloidály s $\omega_1/\omega_2 = 3$ a $0 < 3a_1/a_2 < 1$; praxe omezuje se na užší nerovnost $\frac{1}{3} < 3a_1/a_2 < 1$.

Výše nalezené vlastnosti o profilech Wankelova motoru nejsou však výlučnými vlastnostmi těchto dvou speciálních profilů, a teoreticky existují i jiné možnosti motorů, založených na principu krouživého pístu. Otázku zkoumáme v této práci.

1. POHYB $\mathscr{P}$; DEFINICE

Dostatečně obecným východiskem bude nám nucený pohyb Σ/S definovaný takto:

Vytvořující body (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, *pevné v pohyblivé rovině* (Σ), *popisují v pevné rovině* (S) *touž trajektorii* C_0, *kterou v této rovině popisuje vytvořující bod* (ζ_0), *pevný v pohyblivé rovině* (Σ), *a to tak, že touž polohou* (z_0) *bodu koincidujícího v* (S) *s bodem* (ζ_0) *procházejí body koincidující v* (S) *s body* (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$ *v týchž časových intervalech* T *po sobě.*

O bodech (ζ_i), $i = 0, 1, 2, \ldots, l$, $l \geqq 2$ budeme předpokládat $\zeta_i \neq \zeta_{i+1}$, $i = 0, 1, 2, \ldots, l - 1$; dále předpokládáme $T > 0$.

Nazveme pak výše definovaný pohyb pro stručnost *pohyb* $\mathscr{P}$. Lomenou čáru s rohy $(\zeta_0), (\zeta_1), (\zeta_2), \ldots, (\zeta_l)$ (v tomto pořadí) nazveme *vytvořující trasa* v $\mathscr{P}$. T je *časová konstanta* v $\mathscr{P}$.

Existuje zřejmě triviální pohyb $\mathscr{P}$; je to rotace Σ/S.

2. VLASTNOSTI PLYNOUCÍ Z DEFINICE

Předpokládejme, že existuje netriviální pohyb $\mathscr{P}$; buďtež $m(t)$, $n(t)$ jeho kinematické parametry, $\vartheta(t)$ jeho časový režim, $n = \exp j\vartheta$. O funkcích m, n, příp. ϑ běžně předpokládáme, že jsou aspoň 1-regulární na společném definičním intervalu $I(t)$, tj. třídy C^1 na I.

Již z předpokladu existence vyplývají a) konfigurační vlastnosti vytvořující trasy v $\mathscr{P}$, b) přípustný časový režim v $\mathscr{P}$.

a) Za pohybu $\mathscr{P}$ popisuje vytvořující bod (ζ_i) bodovou trajektorii C_i, jejíž parametrická rovnice v (S) je

$$z_i = m + \zeta_i n\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, l\,; \tag{1}$$

přitom podle definice platí

$$z_i(t + T) = z_{i-1}(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, l\,, \tag{2}$$

pro všechna $t \in I$. Z (1), (2) plyne

$$m(t + T) - m(t) = \zeta_{i-1}\, n(t) - \zeta_i\, n(t + T)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, l\,, \tag{3}$$

pro všechna $t \in I$.

Nazveme l-tici identit (2) *základní identita* v $\mathscr{P}$; l-tici identit (3) *základní rovnice* v $\mathscr{P}$.

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathscr{P}$, pak nutně se základní identitou* (2) *platí i základní rovnice* (3).

Z (3) plyne

(4) $$n(t)/n(t+T) = (\zeta_{i+1} - \zeta_i)/(\zeta_i - \zeta_{i-1})\,, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1\,.$$

Z (4) plyne

(5) $$1 = \operatorname{mod}^2(\zeta_{i+1} - \zeta_i)/\operatorname{mod}^2(\zeta_i - \zeta_{i-1})\,, \quad i = 1, 2, \ldots, l-1\,.$$

Poněvadž levé strany v (4), (5) nezávisejí na i, nezávisejí ani jejich pravé strany na výběru i z $(l-1)$-tice $i = 1, 2, \ldots, l-1$; nadto tyto rovnice podržují platnost, když namísto l-tice $i = 1, 2, \ldots, l$ připustíme posloupnost přirozených čísel $i = 1, 2, \ldots$ Hodnota pravých stran v (4), (5) je pak určena kteroukoli trojicí po sobě jdoucích bodů konečné, příp. nekonečné posloupnosti $(\zeta_0), (\zeta_1), (\zeta_2), \ldots$, a tedy pravé strany v (4), (5) vyjadřují jisté konfigurační konstanty, které charakterisují vytvořující trasu v $\mathscr{P}$. Ukazuje se vhodné položit

(6) $$d = \operatorname{mod}(\zeta_{i+1} - \zeta_i)$$

a

(7) $$\exp(-j\delta) = (\zeta_{i+1} - \zeta_i)/(\zeta_i - \zeta_{i-1})\,, \quad 0 \leqq \delta < 2\pi\,;$$

přitom pamatujeme, že d, δ nezávisejí na výběru i z $(l-1)$-tice $i = 1, 2, \ldots, l-1$, příp. z posloupnosti $i = 1, 2, \ldots$

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathscr{P}$, pak nutně v jeho vytvořující trase platí konfigurační vztahy* (6), (7).

Geometrická interpretace rovnic (6), (7) je bezprostřední, a vyjádříme ji takto: Vytvořující trasa v $\mathscr{P}$, existuje-li, je pravidelná, s *délkovou konfigurační konstantou d*, a pravidelně lomená, s *úhlovou konfigurační konstantou δ*; v obecném případě se tato trasa může protínat a nebude uzavřena. Pokud $\delta \neq 0, \pi$, rohy $(\zeta_0), (\zeta_1), (\zeta_2), \ldots$ leží na kružnici se středem (ζ_*), který je určen třemi po sobě jdoucími rohy; poloměr je $d/(2 \sin \delta/2)$. Konstanty d, δ jsou nezávislé, a charakterisují vytvořující trasu v rovině (Σ) až na polohu; úplně je pak vytvořující trasa v (Σ) charakterisována již trojicí $(\zeta_0), (\zeta_1), (\zeta_2)$, tj. trasou nejjednoduššího (netriviálního) pohybu $\mathscr{P}$ s $l = 2$.

b) Z (4), (7) pro časový režim plyne

(8) $$\vartheta(t+T) - \vartheta(t) - \delta = 2k\pi\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\,;$$

konstanty T, δ jsou nezávislé.

Obecné řešení rovnice (8) zní

(9) $$\vartheta_k = \vartheta_T + \beta_k t\,,$$

kde

(9_*) $$\beta_k = (\delta + 2k\pi)/T, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

je *režimová konstanta*, po výběru k určená časovou konstantou a úhlovou konfigurační konstantou jednoznačně, a ϑ_T arbitrární (reálná) T-periodická funkce času t.

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathscr{P}$ s časovou konstantou T a s režimovou konstantou β_k, pak nutně probíhá jen v časových režimech* (9).

Přípustný časový režim po výběru k závisí na konstantách T, δ a nezávisí na konstantě d, obsahuje však arbitrární funkci ϑ_T.

3. DEGENEROVANÁ TRASA A SPECIÁLNÍ TRASA

Je vždy $d > 0$; poněvadž $0 \leqq \delta < 2\pi$, je připustit i $\delta = 0, \pi$. V souvislosti s tím třeba uvážit dva případy trasy, a) degenerovanou vytvořující trasu, b) speciální vytvořující trasu.

a) Jestliže $\delta = \pi$, pak podle (7) je $\zeta_{i+1} = \zeta_{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$ Vytvořující trasa degeneruje v úsečku, v jejíchž krajních bodech splývají jednak rohy $(\zeta_0), (\zeta_2), \ldots$, jednak rohy $(\zeta_1), (\zeta_3), \ldots$ Pohyb s *degenerovanou trasou* splňuje sice předpoklady pohybu $\mathscr{P}$, ale velmi speciálním způsobem, a nebudeme jej dále sledovat.

b) Jestliže

$$\delta = 0\,, \tag{10}$$

pak podle (7) je

$$\zeta_{i+1} - \zeta_i = \zeta_i - \zeta_{i-1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots \tag{11}$$

Vytvořující trasa je specialisovaná; rohy $(\zeta_0), (\zeta_1), (\zeta_2), \ldots$ leží ekvidistantně na polopřímce. Pohyb se *speciální trasou* je zvláštním případem pohybu $\mathscr{P}$; jeho vytvořující trasu charakterisuje v rovině (Σ) až na polohu jediná konstanta d; vytvořující trasa je pak v (Σ) úplně charakterisována již dvojicí $(\zeta_0), (\zeta_1)$.

Z (9), (9_*), (10) plyne

$$\vartheta_k = \vartheta_T + \beta_k^* t\,, \tag{12}$$

kde

$$\beta_k^* = 2k\pi/T\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{12_*}$$

Tudíž: *Existuje-li pohyb $\mathscr{P}$ se speciální trasou s časovou konstantou T, pak nutně probíhá jen v časových režimech* (12).

4. EXISTENCE POHYBU SE SPECIÁLNÍ TRASOU A S OBECNOU TRASOU

Existenci netriviálního pohybu $\mathscr{P}$ a) se speciální trasou, b) s obecnou trasou dokážeme, když sestrojíme jeho kinematické parametry.

a) Z (12) plyne

$$n_k = \alpha \exp j\beta_k^* t \,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{13}$$

kde

$$\alpha = \exp j\vartheta_T \,. \tag{13$_*$}$$

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathcal{P}$ se speciální trasou s časovou konstantou T, pak jeho druhý kinematický parametr je dán rovnicí* (13).

Z (3), (13) plyne

$$m(t + T) - m(t) + (\zeta_i - \zeta_{i-1})\, \alpha \exp j\beta_k^* t = 0 \,.$$

Podle (11) nezávisí $\zeta_i - \zeta_{i-1}$ na výběru i z posloupnosti $i = 1, 2, \dots$ Reprezentující soustavu Σ, kterou disponujeme, můžeme vybrat vždy tak, aby $\operatorname{Im} \zeta_i = 0$, $\operatorname{Re} \zeta_i \geqq 0$, $\zeta_0 = 0$, pro všechna i, a její délkovou jednotku tak, aby $\zeta_1 = 1$. Při tomto výběru Σ, který přijmeme jako *kanonický pro pohyby $\mathcal{P}$ se speciální trasou*, zjednoduší se předcházející rovnice na

$$m(t + T) - m(t) + \alpha \exp j\beta_k^* t = 0 \,,$$

a její obecné řešení zní

$$m_k = m_T - (t/T)\, \alpha \exp j\beta_k^* t \,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{14}$$

kde m_T je arbitrární (komplexní) T-periodická funkce času t.

Za pohybu s kinematickými parametry (13), (14) popisuje obecný vytvořující bod (ζ) bodovou trajektorii s parametrickou rovnicí

$$C_k \dots z_k = m_T + \alpha(\zeta - (t/T)) \exp j\beta_k^* t \,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{15}$$

spec. body (ζ_i), $i = 0, 1, 2, \dots$ popisují (v kanonické Σ) trajektorie

$$C_{i,k} \dots z_{i,k} = m_T - \alpha(i - (t/T)) \exp j\beta_k^* t \,, \quad i = 0, 1, 2, \dots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{16}$$

a tato rovnice vyhovuje základní identitě (2).

Tudíž: *Existuje netriviální pohyb $\mathcal{P}$ se speciální trasou; jeho kinematické parametry jsou dány rovnicemi* (13), (14), *soustava jeho bodových trajektorií je vyjádřena rovnicí* (15).

Všechny tyto pohyby sestrojíme všemi výběry časové konstanty $T > 0$, číselné charakteristiky $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, komplexní T-periodické funkce m_T, a reálné T-periodické funkce ϑ_T, příp. jednotkové komplexní T-periodické funkce α; pokud jde o funkce m_T, ϑ_T, příp. α, běžně předpokládáme, že jsou v potřebné míře regulární na společném definičním intervalu I.

b) Z (9) plyne

$$n_k = \alpha \exp j\beta_k t \,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{17}$$

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathscr{P}$ s časovou konstantou T a s režimovou konstantou β_k, pak jeho druhý kinematický parametr je dán rovnicí* (17).

Z (3), (17) plyne

$$m(t + T) - m(t) + \alpha(\zeta_i \exp j\beta_k T - \zeta_{i-1}) \exp j\beta_k t = 0\,,$$

a obecné řešení této rovnice zní

$$m_k = m_T - \alpha((\zeta_i \exp j\beta_k T - \zeta_{i-1})/(\exp j\beta_k T - 1)) \exp j\beta_k t\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

kde m_T je arbitrární (komplexní) T-periodická funkce času t. Reprezentující soustavu Σ, kterou disponujeme, můžeme vybrat vždy tak, aby bylo $\zeta_i \exp j\beta_k T - \zeta_{i-1} = 0$ pro všechna i; k tomu stačí zvolit její nulový bod v bodě (ζ_*). Směr první osy soustavy Σ a její délkovou jednotkou lze pak vždy vybrat tak, aby bylo $\zeta_0 = 1$. Při tomto výběru Σ, který přijmeme jako *kanonický pro pohyby* $\mathscr{P}$, zjednoduší se předcházející rovnice na

$$m = m_T\,. \tag{18}$$

Za pohybu s kinematickými parametry (17), (18) popisuje obecný vytvořující bod (ζ) bodovou trajektorii s parametrickou rovnicí

$$C_k \ldots z_k = m_T + \alpha\zeta \exp j\beta_k t\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{19}$$

spec. body (ζ_i), $i = 0, 1, 2, \ldots$ popisují (v kanonické Σ) trajektorie

$$C_{i,k} \ldots z_{i,k} = m_T + \alpha \exp ji\beta_k T \exp j\beta_k t\,, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{20}$$

a tato rovnice vyhovuje základní identitě (2).

Tudíž: *Existuje netriviální pohyb $\mathscr{P}$; jeho kinematické parametry jsou dány rovnicemi* (17), (18), *soustava jeho bodových trajektorií je vyjádřena rovnicí* (19).

Všechny tyto pohyby sestrojíme všemi výběry časové konstanty $T > 0$, režimové konstanty $\beta_k > 0$, komplexní T-periodické funkce m_T a reálné T-periodické funkce ϑ_T, příp. jednotkové komplexní T-periodické funkce α; pokud jde o funkce m_T, ϑ_T, příp. α, běžně předpokládáme, že jsou v potřebné míře regulární na společném definičním intervalu I.

5. EKVIVALENTNÍ KOTÁLENÍ

Ekvivalentní kotálení budeme zkoumat odděleně pro pohyb $\mathscr{P}$ a) se speciální trasou, b) s obecnou trasou. Pokud bude použito rovnic (9), (9_*), (12), (12_*), závislých na indexu k, budeme předpokládat, že jsme výběr k provedli; pokud budeme provádět úvahy, které na indexu k nezávisejí, tento index bude vynechán.

a) Z (13), (14) a z rovnic

$$^1\zeta = -\dot{m}/\dot{n}\,, \quad {}^1z = m + {}^1\zeta n$$

pro regulární fáze $\omega_k \neq 0$ pohybu plyne

$$(21)\qquad \begin{aligned} {}^1\zeta &= (t/T) + j\omega_*^{-1}(\dot{m}_T \exp(-j\vartheta) - (1/T))\,, \\ {}^1z &= m_T + j\omega_*^{-1}(\dot{m}_T - (1/T)\exp j\vartheta)\,, \end{aligned}$$

kde

$$\omega_* = \dot{\vartheta}_T + \beta_*\,.$$

Případ $\omega_* = 0$ na I vede k přímočaré translaci Σ/S; vyloučíme jej.

Tudíž: *Pohyb* $\mathscr{P}$ *se speciální trasou, jehož kinematické parametry jsou vyjádřeny rovnicemi* (13), (14), *je ekvivalentní s kotálením polhodie, dané první rovnicí* (21), *po polhodii, dané druhou rovnicí* (21).

Z (21) plyne

$${}^1\zeta(t + T) = {}^1\zeta(t) + 1\,, \quad {}^1z(t + T) = {}^1z(t)$$

pro všechna $t \in I$.

Tudíž: *Pevná polhodie se (aspoň jedenkrát) uzavře po uplynutí doby rovné časové konstantě; pohyblivou polhodii tvoří oblouky až na posunutí o délkovou konfigurační konstantu podél trasy kongruentní.*

b) Obdobně z (17), (18) a pro $\omega \neq 0$ (případ $\omega = 0$ na I nemá smyslu) plyne

$$(22)\qquad {}^1\zeta = j\omega^{-1}\dot{m}_T \exp(-j\vartheta)\,, \quad {}^1z = m_T + j\omega^{-1}\dot{m}_T\,,$$

kde

$$\omega = \dot{\vartheta}_T + \beta\,.$$

Tudíž: *Pohyb* $\mathscr{P}$, *jehož kinematické parametry jsou vyjádřeny rovnicemi* (17), (18), *je ekvivalentní s kotálením polhodie, dané první rovnicí* (22), *po polhodii dané druhou rovnicí* (22).

Z (22) plyne

$${}^1\zeta(t + T) = {}^1\zeta(t)\exp(-j\vartheta)\,, \quad {}^1z(t + T) = {}^1z(t)$$

pro všechna $t \in I$.

Tudíž: *Pevná polhodie se (aspoň jedenkrát) uzavře po uplynutí doby rovné časové konstantě; pohyblivou polhodii tvoří oblouky až na otočení o úhlovou konfigurační konstantu kolem středu trasy kongruentní.*

6. UZAVŘENÝ POHYB

Pohyb nazveme uzavřený, je-li uzavřená soustava jeho bodových trajektorií. Tím rozumíme toto: Existují pevné $\Theta > 0$, a proměnné $t \in I$, $t + \Theta \in I$ taková, že pro každou trajektorii $z = z(t)$ platí

$$z(t + \Theta) = z(t)\,,$$

pokud obě strany této rovnice mají smysl. Vyšetříme tuto možnost pro pohyb $\mathscr{P}$ a) se speciální trasou, b) s obecnou trasou.

a) Má-li tato okolnost nastat v soustavě (15) po době $\Theta > 0$, pak nutně (index k vynecháváme)

$$
\begin{aligned}
&z(t + \Theta) - z(t) = \\
&= m_T(t + \Theta) - m_T(t) - (((t + \Theta)/T)\, n(t + \Theta) - (t/T)\, n(t)) + \\
&+ \zeta(n(t + \Theta) - n(t)) = 0
\end{aligned} \tag{23}
$$

pro všechna $t \in I$ a všechna $\zeta \in (\Sigma)$.

Odtud nejprve

$$n(t + \Theta) - n(t) = 0$$

pro všechna $t \in I$, takže z (23) plyne

$$m_T(t + \Theta) - m_T(t) - (\Theta/T)\, n(t) = 0 \,.$$

Obecné řešení této rovnice zní

$$m_T = m_\Theta + (t/T)\, n \,,$$

kde m_Θ je arbitrární (komplexní) Θ-periodická funkce času t. Poněvadž m_T je T-periodická a priori, a jako taková je nutně ohraničená na I, a poněvadž $n \neq 0$ na I, vyjadřuje předcházející rovnice spor.

Tudíž: *Pohyb $\mathscr{P}$ se speciální trasou nemůže být uzavřený.*

b) Má-li tato okolnost nastat v soustavě (19) po době $\Theta > 0$, pak nutně

$$
\begin{aligned}
&z(t + \Theta) - z(t) = m_T(t + \Theta) - m_T(t) + \\
&+ \zeta(\alpha(t + \Theta) \exp j\beta_k\Theta - \alpha(t)) \exp j\beta_k t = 0
\end{aligned} \tag{24}
$$

pro všechna $t \in I$ a všechna $\zeta \in (\Sigma)$.

Odtud nejprve

$$\vartheta_T(t + \Theta) - \vartheta_T(t) + \beta_k\Theta = 2l\pi \,, \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

pro všechna $t \in I$. Obecné řešení této rovnice zní

$$\vartheta_T = \vartheta_\Theta + ((2l\pi/\Theta) - \beta_k)\, t \,, \quad k, l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \,,$$

kde ϑ_Θ je arbitrární (reálná) Θ-periodické funkce času t. Poněvadž ϑ_T je T-periodická a priori, a jako taková je nutně ohraničená na I, nutně také

$$(2l\pi/\Theta) - \beta_k = 0 \Rightarrow \Theta = 2l\pi T/(\delta + 2k\pi)$$

s takovými l, k, aby $\Theta > 0$. Pak

$$\vartheta_T = \vartheta_\Theta \tag{24$_*$}$$

a z (24) plyne

$$(24_*) \qquad m_T(t + 2l\pi T/(\delta + 2k\pi)) - m_T(t) = 0\,.$$

Pokud jde o první rovnici (24_*), rozeznávejme dva případy. α) ϑ_T je triviálně periodická. Je tedy $\vartheta_T = \vartheta_\Theta = \vartheta_0$ a podle (9) $\vartheta_k = \vartheta_0 + \beta_k t$; v druhé rovnici (24_*) je buďto $m_T = m_0$, nebo $T = qT_0$, $\Theta = pT_0$, kde T_0 je primitivní perioda funkce m_T a p, q jsou přirozená čísla. První možnost vede k triviálnímu výsledku, totiž k rotacím Σ/S s lineárním režimem; pro druhou je již nutně

$$\Theta/T = p/q = 2l\pi/(\delta + 2k\pi) \Rightarrow \delta = 2(ql - pk)\,\pi/p$$

čili

$$(25) \qquad \delta = 2\kappa\pi/\lambda\,,$$

kde κ, λ jsou přirozená nesoudělná čísla. Poněvadž $0 < \delta < 2\pi$, je $0 < \kappa < \lambda$, a po vyloučení pohybů s degenerovanou trasou $\kappa/\lambda \neq \frac{1}{2}$.

β) ϑ_T není triviálně periodická. Touž úvahou jako výše dospějeme zase k podmínce (25) s týmiž omezeními na κ, λ jako výše.

Podmínka (25) také již stačí. Pak totiž

$$\Theta = \lambda l T/(\lambda k + \kappa)\,;$$

položíme-li $l = \lambda k + \kappa$, bude $\Theta = \lambda T$, rovnice (24_*) dostanou tvar

$$\vartheta_T = \vartheta_{\lambda T}\,, \quad m_T(t + \lambda T) - m_T(t) = 0\,,$$

a rovnice (24) je splněna.

Rovnici (25) nazveme *podmínka uzavřenosti v* $\mathscr{P}$; ona vyjadřuje komensurabilitu úhlové konfigurační konstanty δ s 2π.

Tudíž: *Existuje netriviální uzavřený pohyb* $\mathscr{P}$; *jeho úhlová konfigurační konstanta* (*součin časové a režimové konstanty*) *splňuje podmínku uzavřenosti* (25).

7. DVA TYPY NETRIVIÁLNÍHO UZAVŘENÉHO POHYBU

Podmínka uzavřenosti (25), vyjadřující přípustnou hodnotu úhlové konfigurační konstanty, která je táž podél vytvořující trasy a je určena již trojicí (ζ_0), (ζ_1), (ζ_2) jejích rohů, je nezávislá na počtu l vytvořujících bodů (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots$ Geometrická interpretace charakteristik κ, λ je bezprostřední:

a) Zvolme nejprve $\kappa = 1$; pak λ může nabývat hodnoty 3, 4, … Vezměme $\lambda = 3$; dvěma libovolně vybranými body $(\zeta_0) \neq (\zeta_1)$ je určeno d (rovnicí (6)), a dvojicí $\kappa = 1$, $\lambda = 3$ je určeno δ (rovnicí (25)); vytvořující trasu tvoří opakovaně probíhaný rovnostranný trojúhelník s rohy (ζ_0), (ζ_1), (ζ_2), kde podle odst. 4b) je $\zeta_2 \exp j\delta - \zeta_1 = 0$, $\delta = 2\pi/3$. Vezměme $\lambda = 4$; vytvořující trasu tvoří opakovaně probíhaný čtverec s rohy (ξ_0), (ζ_1), (ζ_2), (ζ_3), kde

$$\zeta_2 \exp j\delta - \zeta_1 = \zeta_3 \exp j\delta - \zeta_2 = 0\,, \quad \delta = \pi/2\,.$$

Pokračujíce takto s $\lambda \geqq 5$, s přihlédnutím k známým planimetrickým větám poznáváme: Dvojicí charakteristik $\kappa = 1$, $\lambda \geqq 3$ je určen pravidelný konvexní λ-úhelník, který je vytvořující trasou příslušného uzavřeného pohybu $\mathscr{P}$; trasa je určena co do velikosti i polohy dvojicí rohů $(\zeta_0) \neq (\zeta_1)$.

Tudíž: *Uzavřený pohyb $\mathscr{P}$ s charakteristikami $\kappa = 1$, $\lambda \geqq 3$ je pohybem s pravidelnou, uzavřenou a konvexní λ-polygonální trasou.*

Nazveme tento pohyb stručně *pohyb* $\mathscr{P}^{(1,\lambda)}$ nebo *pohyb* $\mathscr{R}^{(\lambda)}$.

b) Zvolme $\kappa = 2$; pak λ může nabývat hodnoty 3, 5, ... Vezměme $\lambda = 3$ (a zase užijme známých vět); vytvořující trasa je zrcadlová k trase s $\kappa = 1$, $\lambda = 3$. Vezměme $\lambda = 5$; vytvořující trasu tvoří pravidelný hvězdicovitý pětiúhelník. Vezměme $\lambda = 7$; vytvořující trasu tvoří pravidelný hvězdicovitý sedmiúhelník prvního druhu. Atd. Zvolme $\kappa = 3$; výběr $\lambda = 4$ vede k čtverci zrcadlovému k trase s $\kappa = 1$, $\lambda = 4$; výběr $\lambda = 5$ vede k hvězdicovitému pětiúhelníku zrcadlovému k trase s $\kappa = 2$, $\lambda = 5$; výběr $\lambda = 7$ vede k trase, kterou tvoří pravidelný hvězdicovitý sedmiúhelník druhého druhu. Atd. Pokračujíce takto pro $\kappa \geqq 4$, pokaždé s přípustnými výběry λ, nalezneme jako vytvořující trasy příslušného uzavřeného pohybu $\mathscr{P}$ buďto trasu pohybu $\mathscr{R}^{(\lambda)}$ nebo pravidelné hvězdicovité λ-úhelníky.

Tudíž: *Uzavřený pohyb $\mathscr{P}$ s charakteristikou $\kappa \geqq 2$ je buďto pohyb $\mathscr{R}^{(\lambda)}$, nebo pohyb s pravidelnou, uzavřenou a hvězdicovitou λ-polygonální trasou.*

Nazveme tento pohyb stručně *pohyb* $\mathscr{P}^{(\kappa,\lambda)}$. Počet všech kinematicky různých tras pohybů $\mathscr{P}^{(\kappa,\lambda)}$, které nejsou pohybem $\mathscr{R}^{(\lambda)}$, je pro dané λ rovný $(\varphi(\lambda)/2) - 1$ (nezávisle na κ), kde φ značí Eulerovu číselnou funkci.

8. POHYB $\mathscr{P}_t$

V odst. 1 až 7 byla to cesta postupných zjednodušování, jimiž jsme dospěli od obecného případu pohybu $\mathscr{P}$ až k pohybu $\mathscr{R}^{(\lambda)}$. S druhé strany se tu však ihned nabízí jedno zobecnění. Význačnou vlastnost pohybu $\mathscr{P}$, totiž jeho periodičnost, charakterisovanou až dosud časovou konstantou, zobecníme touto změnou jeho definice:

Vytvořující body (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, pevné v pohyblivé rovině (Σ), popisují v pevné rovině (S) touž trajektorii C_0, kterou v této rovině popisuje vytvořující bod (ζ_0), pevný v pohyblivé rovině (Σ), a to tak, že touž polohou (z_0) bodu koincidujícího v (S) s bodem (ζ_0) procházejí body koincidující v (S) s body (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$ v intervalech $T = T(t)$, které se mění s časem t.

Předpoklady, které jsme učinili o bodech (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, $l \geqq 2$ v případě pohybu $\mathscr{P}$, tu trvají.

Nazveme výše definovaný pohyb pro stručnost *pohyb* $\mathscr{P}_t$. V něm podržuje smysl pojem vytvořující trasy; namísto časové konstanty máme však *časovou funkci* $T(t)$.

Předpokládajíce, že pohyb $\mathscr{P}_t$ existuje, a) odvodíme vztah mezi časovou funkcí a časovým režimem; existenci tohoto pohybu dokážeme, když b) sestrojíme jeho kinematické parametry; konečně c) ukážeme, že pohyb $\mathscr{P}_t$ má všechny typické vlastnosti pohybu $\mathscr{P}$, příp. uzavřeného pohybu $\mathscr{P}^{(\kappa,\lambda)}$.

a) Předpokládejme, že existuje nikoli konstantní časová funkce; tím v podstatě činíme i předpoklad o existenci pohybu $\mathscr{P}_t$, který není pohybem $\mathscr{P}$. Uvažujíce jako v odst. 2 nalezneme pro základní identitu v $\mathscr{P}_t$ rovnice tvaru (2), tj.

$$z_i(t + T(t)) = z_{i-1}(t)\,, \quad i = 1, 2, \ldots, l \tag{26}$$

pro všechna $t \in I$, a pro konfigurační vztahy v $\mathscr{P}_t$ obě rovnice (6), (7).

Pro časový režim nalezneme rovnici tvaru (8), tj.

$$\vartheta(t + T(t)) - \vartheta(t) - \delta = 2k\pi\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{27}$$

Nechť existuje řešení

$$\vartheta = \varphi(t) \tag{28}$$

této rovnice; o funkci φ jen předpokládejme, že na definičním intervalu je ryze monotonní, takže lze psát

$$t = \psi(\vartheta)\,. \tag{28_*}$$

Jestliže jsme však takovou funkci φ udali, je časová funkce T již určena: Z (27), (28), (28_*) plyne

$$\varphi(t + T(t)) = \varphi(t) + \delta + 2k\pi \Leftrightarrow t + T(t) = \psi(\varphi(t) + \delta + 2k\pi)\,,$$

a tedy

$$T = \psi(\varphi(t) + \delta + 2k\pi) - t\,, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{29}$$

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathscr{P}_t$, pak jeho časový režim může být jakýkoliv; výběrem funkce* (28), *číselné charakteristiky k a úhlové konfigurační konstanty δ je však časová funkce tohoto pohybu již určena rovnicí* (29).

b) Uvažujíce jako v odst. 4, nalezneme pro první kinematický parametr pohybu $\mathscr{P}_t$ rovnici

$$m(t + T(t) - m(t) + (\zeta_i\, n(t + T(t)) - \zeta_{i-1}\, n(t)) = 0\,.$$

Vzhledem k rovnici (4), vyloučíme-li pohyby se speciální trasou, zjednoduší se tato rovnice (v kanonické Σ) na

$$m(t + T(t)) - m(t) = 0\,.$$

Podle (28), (28_*), (29) je však

$$m(t) = m(\psi(\vartheta)) = {}'m(\vartheta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow m(t + T(t)) = m(\psi(\varphi + \delta + 2k\pi)) = {}'m(\varphi + \delta + 2k\pi) =$$
$$= {}'m(\vartheta + \delta + 2k\pi)\,,$$

takže také

$$`m(\vartheta + \delta + 2k\pi) - `m(\vartheta) = 0 .$$

Obecné řešení této rovnice zní $`m = `m_{\delta+2k\pi}(\vartheta)$ čili

$$m = m_{\delta+2k\pi}(\varphi(t)) , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots , \tag{30}$$

kde $m_{\delta+2k\pi}$ je arbitrární (komplexní) $(\delta + 2k\pi)$-periodická funkce argumentu $\vartheta = \varphi(t)$.

Tudíž: *Existuje-li netriviální pohyb $\mathscr{P}_t$ s časovým režimem* (28) *a s úhlovou konfigurační konstantou δ, tj. s časovou funkcí* (29), *pak jeho první kinematický parametr je dán rovnicí* (30).

Za pohybu s kinematickými parametry (28), (30) popisuje obecný vytvořující bod (ζ) bodovou trajektorii s parametrickou rovnicí

$$C_k \ldots z_k = m_{\delta+2k\pi}(\varphi) + \zeta \exp j\varphi , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ; \tag{31}$$

spec. body (ζ_i), $i = 0, 1, 2, \ldots$ popisují (v kanonické Σ) trajektorie

$$C_{i,k} \ldots z_{i,k} = m_{\delta+2k\pi}(\varphi) + \exp(-ji\delta) \exp j\varphi ,$$

$$i = 0, 1, 2, \ldots, k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots ,$$

a tato rovnice vyhovuje základní identitě (26).

Tudíž: *Existuje netriviální pohyb $\mathscr{P}_t$; jeho kinematické parametry jsou dány rovnicemi* (28), (30), *soustava jeho bodových trajektorií je vyjádřena rovnicí* (31).

Všechny tyto pohyby sestrojíme všemi výběry časového režimu $\varphi(t)$, číselné charakteristiky k, úhlové konfigurační konstanty δ a komplexní $(\delta + 2k\pi)$-periodické funkce $m_{\delta+2k\pi}(\varphi)$; přitom výběrem φ, k, δ je již určena časová funkce $T = \psi(\varphi + \delta + 2k\pi) - t$, kde φ, ψ je dvojice navzájem inversních funkcí. O funkcích φ, $m_{\delta+2k\pi}$ běžně předpokládáme, že jsou v potřebné míře regulární na společném definičním intervalu I.

c) Z (28), (30) pro regulární fáze $\dot{\varphi} \neq 0$ pohybu plyne

$$^1\zeta = (\mathrm{d}m_{\delta+2k\pi}/\mathrm{d}\varphi) \exp(-j\varphi) , \quad ^1z = m_{\delta+2k\pi} + j(\mathrm{d}m_{\delta+2k\pi}/\mathrm{d}\varphi) ; \tag{32}$$

případ $\dot{\varphi} = 0$ na I je předpokladem o monotonii funkce φ vyloučen. Z (32) plyne

$$^1\zeta(t + T(t)) = {}^1\zeta(t) \exp(-j\delta) , \quad ^1z(t + T(t)) = {}^1z(t)$$

pro všechna $t \in I$.

Tudíž: *Pohyb $\mathscr{P}_t$ s kinematickými parametry* (28), (30) *je ekvivalentní s kotálením polhodií* (32). *Polhodie pohybu $\mathscr{P}_t$ mají vlastnosti polhodií pohybu $\mathscr{P}$; namísto T je ovšem $T(t)$.*

Pro uzavřenost pohybu $\mathscr{P}_t$ po době $\Theta > 0$ z (31) plyne nutně (index k vynecháváme)

$$z(t + \Theta) - z(t) = m_{\delta + 2k\pi}(\varphi(t + \Theta) - m_{\delta + 2k\pi}(\varphi(t))) + \\ + \zeta(\exp j\varphi(t + \Theta) - \exp j\varphi(t)) = 0 \tag{33}$$

pro všechna $t \in I$ a všechna $\zeta \in (\Sigma)$.

Odtud nejprve

$$\varphi(t + \Theta) - \varphi(t) = 2h\pi\,, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

pro všechna $t \in I$; obecné řešení této rovnice zní

$$\varphi = \varphi_\Theta + (2h\pi/\Theta)\, t\,, \quad h = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{34}$$

kde φ_Θ je arbitrární (reálná) Θ-periodická funkce času t.

Z (33), (34) plyne

$$m_{\delta + 2k\pi}(\varphi(t) + 2h\pi) - m_{\delta + 2k\pi}(\varphi(t)) = 0$$

pro všechna $t \in I$. Vyloučíme-li případ konstantního $m_{\delta + 2k\pi}$ na I jako triviální, pak $2h\pi = pT_0$, $\delta + 2k\pi = qT_0$, kde T_0 je primitivní perioda funkce $m_{\delta + 2k\pi}$ a p, q jsou přirozená čísla. Odtud

$$2h\pi/(\delta + 2k\pi) = p/q \Rightarrow \delta = 2((hq/p) - k)\,\pi$$

čili

$$\delta = 2\kappa\pi/\lambda\,, \tag{35}$$

kde κ, λ jsou přirozená nesoudělná čísla, a $0 < \kappa < \lambda$, $\kappa/\lambda \neq \frac{1}{2}$.

Podmínky (34), (35) také již stačí. Pak totiž

$$\lambda(\delta + 2k\pi) = 2(\lambda k + \kappa)\,\pi\,;$$

položíme-li

$$l = (\lambda k + \kappa)\, h\,, \quad \Lambda = |\lambda k + \kappa|\, \Theta\,, \quad \varepsilon = \operatorname{sgn}(\lambda k + \kappa)\,,$$

můžeme psát $\varphi_\Theta(t) = \varphi_\Lambda(t)$, takže (34) nabude tvar

$$\varphi = \varphi_\Lambda + \varepsilon(2l\pi/\Lambda)\, t\,.$$

Protože $\lambda(\delta + 2k\pi)\, h = 2l\pi$, je (index $\delta + 2k\pi$ vynecháváme)

$$m(\varphi(t + \Lambda)) - m(\varphi(t)) = m(\varphi(t) + \varepsilon\,.\,2l\pi) - m(\varphi(t)) = \\ = m(\varphi(t) + \varepsilon\,\lambda(\delta + 2k\pi)\,h) - m(\varphi(t)) = 0\,,$$

a rovnice (33) je splněna.

Tudíž: *Uzavřenost pohybu $\mathscr{P}_t$ se za předpokladu (34) vyjadřuje touž podmínkou, jako uzavřenost pohybu $\mathscr{P}$.*

Ve zvláštním případě buď $T(t)$ konstantní funkce. Pak se rovnice (27) redukuje na rovnici (8), a časový režim (28) na časový režim (9). S tímto režimem však přejde výše sub b) uvedená rovnice pro první kinematický parametr na rovnici v odst. 4b), a tedy její obecné řešení (30) se redukuje na řešení (18). Nepožadujeme-li obecnost vytvořující trasy a priori, dojdeme s předpokladem konstantní časové funkce k časovému režimu (12) a k obecnému řešení (14).

Tudíž: *Pohyb $\mathscr{P}$ (ať se speciální, nebo s obecnou trasou) je triviálním případem pohybu $\mathscr{P}_t$; zejména pak, pokud jde o ekvivalentní kotálení a o vlastnosti uzavřenosti, je pohyb $\mathscr{P}$ kinematicky rovnocenný model pohybu $\mathscr{P}_t$.*

9. NĚKTERÉ SOUVISLOSTI

K úvodu. Mechanické vytvoření cykloidál lze doložit ještě před. G. BELLERMANNEM (1867); viz EBNER, 171 násl. K větě o dvojím vytvoření cykloidály viz FOURET.

Spalovací motory s kroužívým pístem lze doložit ještě před F. Wankelem (1954); viz SCHMIDT; WANKEL a FROEDE. Ke kinematice Wankelova motoru viz BAIER; HOHENBERG, 267 násl.

Teoretickou otázkou wankelovské arény se zabýval již J. Fischer (1936); viz FISCHER.

K odst. 1. Pohyb $\mathscr{P}$ náleží, všeobecně řečeno, k tzv. pohybům s opakovaně probíhanými trajektoriemi; viz MÜLLER [1], 96 násl. H. R. Müller (1963) definoval tři typy takových pohybů; viz MÜLLER [2]. Námi zavedený pohyb $\mathscr{P}$ náleží druhému Müllerovu typu; vlastností, které nalezl již H. R. Müller, dotýkáme se v odst. 4b).

Vlastnostmi pohybu $\mathscr{P}$ se také zabývá J. Somer; na VII. věd. konferenci FEL ČVUT (1965) referoval k řešení diferenčních rovnic, které se v této souvislosti vyskytují. Viz SOMER [1].

K odst. 2 až 4. Nucený pohyb Σ/S nazývá se pohyb s charakteristikami T, N (pohyb $\mathscr{P}(T, N)$), příp. s charakteristikami T, 0 (pohyb $\mathscr{P}(T, 0)$), jsou-li splněny podmínky podle BLASCHKE a MÜLLER, 113 násl. Srovnáním pohybu $\mathscr{P}$ s pohyby $\mathscr{P}(T, N)$, příp. $\mathscr{P}(T, 0)$ zjišťujeme: Neexistuje úplná a netriviální kinematická ekvivalence pohybu $\mathscr{P}$ s pohybem $\mathscr{P}(T, N)$, příp. $\mathscr{P}(T, 0)$. Jinak řečeno: Pohyb $\mathscr{P}$ je vždy pohybem se zobecněnou cirkulací.

K odst. 5. Charakterističnost vlastností polhodií vyšetřil J. SOMER (1966); viz SOMER [2].

K odst. 7. Trajektorie pohybu $\mathscr{R}^{(\lambda)}$ byly častěji předmětem pozornosti; viz SCHAAL [1], [2] (a bibliografické soupisy v obou těchto pracích).

K počtu pravidelných mnohoúhelníků viz JAGLOM a JAGLOM, 24 násl. a 201 násl.; BOLTJANSKIJ a JAGLOM, 440 násl.

K odst. 8. Na VII. věd. konferenci FEL-ČVUT (1965) ukázal L. Beran existenci a konstrukci řešení (28), (28_*) rovnice (27), a tím korektnost závěrů odst. 8a), b). Viz BELLMAN a COOKE, 84 a BERAN.

Literatura

Baier O.: VDI Ber. Nr. 45 (1960), 31—37.

Bellman R., Cooke K. L.: Differential-Difference Equations. New York, London 1963.

Beran L.: Referát na VII. věd. konferenci FEL ČVUT (1965); Acta Polytechn. (ČVUT) (IV) 2, (1966), 5—10.

Blaschke W., Müller H. R.: Ebene Kinematik. München 1956.

Болтянский В. Г., Яглом И. М.: Энциклопедйя элементарной математики. IV. Москва 1963.

Ebner F.: Leitfaden der technisch wichtigen Kurven. Leipzig 1906.

Fischer J.: Deutsche Math. 1 (1936), 485—498.

Fouret G.: Nouv. Ann. Math. (2) 8 (1869), 162—168.

Hohenberg F.: Konstruktive Geometrie in der Technik. Wien 1961.

Яглом А. М., Яглом И. М.: Неэлементарные задачи в элементарном изложении. Москва 1954.

Müller H. R.: [1] Kinematik. Berlin 1963. — [2] Monatsh. Math. 67 (1963), 326—334.

Schaal H.: [1] Math. naturwiss. Unterr. 15 (1962/63), 195—200, 247—254. — [2] Zs. angew. Math. Mech. 43 (1963), 459—476.

Schmidt E.: VDI Ber. Nr. 45 (1960), 7—11.

Somer J.: [1] Referát na VII. věd. konf. FEL ČVUT (1965). Acta Polytechn. (ČVUT) (IV) 2, (1966), 73—81. — [2] Vlastnosti pohybů se zobecněnou cirkulací. Dis. FEL ČVUT 1967.

Wankel F., Froede W.: Motortechn. Zs. 21 (1960), 33—45.

Резюме

О КИНЕМАТИКЕ ДВИГАТЕЛЕЙ С ВРАЩАЮЩИМСЯ ПОРШНЕМ

ЗДЕНЕК ПИРКО (ZDENĚK PÍRKO)

В статье вводится понятие движения $\mathscr{P}$ — обобщение кинематической характеристики двигателя типа Ванкела — следующим определением:

Образующие точки (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, неподвижные в подвижной плоскости (Σ) описывают в неподвижной плоскости (S) ту же самую траекторию C_0, которую в этой плоскости описывает образующая точка (ζ_0), неподвижная в подвижной плоскости (Σ) и так, что точкой (z_0) совпадающей в плоскости (S) с точкой (ζ_0) проходят постепенно в одинаковых промежутках времени T точки, которые совпадают в плоскости (S) с точками (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$.

Изучение непосредственных следствий этого определения и аналитическое описание движения $\mathscr{P}$, т. е. выявление его кинематических параметров и семейства его точечных траекторий, дает возможность классификации и определе-

ния основных кинематическо-геометрических свойств двух отличительных типов этого движения. В первую очередь изучается вопрос о замкнутости движения $\mathscr{P}$. Это приводит к важнейшему типу изучаемых движений – к движению $\mathscr{R}^{(\lambda)}$. Кинематика двигателей типа Ванкела является частным случаем кинематики движения $\mathscr{R}^{(\lambda)}$.

Движение $\mathscr{P}$ поддается обобщению; в качестве примера такого обобщения определяется движение $\mathscr{P}_t$ так, что временная постоянная T заменяется временной функцией $T(t)$. Движение $\mathscr{P}_t$ изучается параллельно изучению движения $\mathscr{P}$; оказывается, что движение $\mathscr{P}$ является кинематически равноценной моделью движения $\mathscr{P}_t$.

Zusammenfassung

ZUR KINEMATIK DER MOTOREN MIT ZIRKELNDEM BLEUEL

ZDENĚK PÍRKO

Eine Verallgemeinerung der kinematischen Charakteristik der Motore vom Wankelschen Typus bildet die durch die folgende Definition erklärte Bewegung $\mathscr{P}$:

Die in einer beweglichen Ebene (Σ) fest liegenden Erzeugungspunkte (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$, beschreiben in der festgehaltenen Ebene S dieselbe Bahnkurve C_0, die in dieser Ebene durch den in der beweglichen Ebene (Σ) fest liegenden Punkt (ζ_0) beschrieben wird, und zwar in der Weise, dass dieselbe Lage (z_0) des in (S) mit (ζ_0) koinzidierenden Punktes Punkte, die in (S) mit den Punkten (ζ_i), $i = 1, 2, \ldots, l$ koinzidieren, in gleichen, nacheinander folgenden Zeitintervallen von der Dauer T durchlaufen.

Eine Untersuchung der aus dieser Definition direkt folgenden Beziehungen und die analytische Konstruktion der Bewegung $\mathscr{P}$ (Ermittlung der kinematischen Parameter dieser Bewegung und Aufstellen des Systems der Punktbahnkurven) ergibt die Möglichkeit zwei wichtige Type dieser Bewegung zu klassifizieren und deren kinematisch-geometrische Grundeigenschaften zu ermitteln.

In erster Reihe handelt es sich hier um die Abgeschlossenheit der Bewegung $\mathscr{P}$. Praktisch führt diese Frage auf die wichtigste dieser Bewegungen, nämlich auf die Bewegung $\mathscr{R}^{(\lambda)}$. Die Kinematik des Wankelschen Motors ergibt sich als ein Sonderfall dieser Bewegung.

Die Bewegung $\mathscr{P}$ ist möglich weitherhin noch zu verallgemeinern. Als Beispiel wird eine Bewegung $\mathscr{P}_t$, die sich aus $\mathscr{P}$ durch die Annahme T einer Funktion der Zeit t (in $\mathscr{P}$ ist T eine Zeitkonstante) ergibt, definiert. Beide Bewegungen – $\mathscr{P}$ und $\mathscr{P}_t$ – werden parallel untersucht; es ergibt sich, dass $\mathscr{P}$ ein kinematisch gleichwertiges Modell der Bewegung $\mathscr{P}_t$ ist.

Adresa autora: Prof. dr. *Zdeněk Pírko* Dr. Sc., Katedra matematiky elektrotechnické fakulty ČVUT, Technická 1902, Praha 6.