A. V. Buledza

# О методе расщепления в проблеме собственных функций и собственных значений разностных операторов

*Aplikace matematiky*, Vol. 13 (1968), No. 2, 133–136

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103143

# О МЕТОДЕ РАСЩЕПЛЕНИЯ В ПРОБЛЕМЕ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. В. БУЛЕДЗА

Пусть $LW(x, y)$ – линейный дифференциальный оператор, рассматриваемый в прямоугольнике $\Omega\ \{0 \leqq x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq b\}$, и

$$RW(m, n) = \sum_{i,j} C_{ij} W(m + i, n + j) \tag{1}$$

$$(i = -p, -p + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, p;\quad j = -q, -q + 1, \ldots, 0, 1, \ldots, q)$$

– его разностный аналог, где $C_{ij}$ – некоторые постоянные, а $W(m, n) = W(mh, nh)$ – любая функция, определенная на некотором дискретном множестве $\Omega_h \subset \Omega$.

Примечание. Множество $\Omega_h$ может содержать и точки, не принадлежащие $\Omega$ (внеконтурные точки), которые используются для аппроксимации краевых условий. Дискретное множество, содержащее внеконтурные точки, обозначим символом $\bar{\Omega}_h$.

Таким образом, мы будем рассматривать конечномерное $B$-пространство $(W(m, n) \in B)$ с действующими в нем операторами вида (1).

**Определение 1.** Пусть $R_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ – линейные операторы в пространстве $B$. Суммой операторов $R_\nu$ будем называть такой оператор $R$, что для любого элемента $W \in B$ выполняется равенство

$$RW = \Big(\sum_{\nu=1}^{r} R_\nu\Big) W = \sum_{\nu=1}^{r} R_\nu W\,. \tag{2}$$

**Определение 2.** Введем в рассмотрение операторы:

$$R_1 W(m, n) = \tfrac{1}{2} C_{00} W(m, n) + \sum_{\substack{i=-p \\ i \neq 0}}^{p} C_{i0} W(m + i, n)\,, \tag{3}$$

$$R_2 W(m, n) = \tfrac{1}{2} C_{00} W(m, n) + \sum_{\substack{j=-q \\ j \neq 0}}^{q} C_{0j} W(m, n + j)\,, \tag{4}$$

$$(5) \qquad R_\nu W(m, n) = \sum_{\substack{i=-p_\nu, p_\nu \\ j=-q_\nu, q_\nu}} C_{ij} W(m + i, n + j),$$

$$p_\nu \leqq p - 1, \quad q_\nu \leqq q - 1, \quad \nu = 3, 4, \ldots, r.$$

Операторы $R_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, r)$ будем называть элементарными операторами. Среди элементарных операторов выделим операторы $R_1$ и $R_2$, определенные соотношениями (3), (4), и назовем их главными элементарными операторами.

**Определение 3.** Если для данного разностного оператора $R$ (1) и элементарных операторов $R_\nu$ выполнено условие (2) определения 1, то будем говорить, что оператор $R$ расщеплен на сумму элементарных операторов.

**Определение 4.** Пусть $X(m)$, $Y(n)$ – функции, определенные на множестве точек $m = 0, 1, \ldots, M$; $n = 0, 1, \ldots, N$. Для каждого значения аргументов $m$ и $n$ вычислим соответствующие значения функций $X(m)$, $Y(n)$ и по этим значениям построим кусочно-линейные функции $\overline{X}(x)$, $x \in [0, M]$ и $\overline{Y}(y)$, $y \in [0, N]$, так чтобы выполнялись условия

$$\overline{X}(m) = X(m) \ (m = 0, 1, \ldots, M), \quad \overline{Y}(n) = Y(n) \ (n = 0, 1, \ldots, N).$$

Очевидно функции $\overline{X}(x)$, $\overline{Y}(y)$ в промежутках $[0, M]$, $[0, N]$ (соответственно) непрерывны.

**Лемма 1.** *Пусть оператор* (1) *обладает свойством осевой симметрии, т.е. для любых фиксированных $i, j$ выполнены условия*

$$(6) \qquad C_{ij} = C_{-i,j}, \quad C_{ij} = C_{i,-j}.$$

*Тогда для произвольной функции $W(m, n)$, определенной на множестве $\Omega_h$ и представимой в виде*

$$(7) \qquad W(m, n) = X(m)\, Y(n),$$

*выполняются равенства*

$$(8) \qquad R_1 W(m, n) = (R_1 X(m))\, Y(n),$$

$$(9) \qquad R_2 W(m, n) = (R_2 Y(n))\, X(m),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(10) \qquad R_\nu W(m, n) = C_{p_\nu q_\nu}(X(m - p_\nu) + X(m + p_\nu)) \times \times (Y(n - q_\nu) + Y(n + q_\nu)),$$

$$\nu = 3, 4, \ldots, r.$$

**Лемма 2.** *Пусть $X_K(m)$, $Y_S(n)$ — решения спектральных задач*

$$R_1\, X_K(m) - \lambda_K^{(1)}\, X_K(m) = 0\,, \tag{11}$$

$$l_{hi}\, X_K(m)|_{\Gamma_{hi}} = 0\,, \tag{12}$$

$$R_2\, Y_S(n) - \lambda_S^{(2)}\, Y_S(n) = 0\,, \tag{13}$$

$$\tilde{l}_{hi}\, Y_S(n)|_{\tilde{\Gamma}_{hi}} = 0\,, \tag{14}$$

*где $l_{hi}$, $\tilde{l}_{hi}$ — операторы краевых условий. Тогда функции $W_{KS}^0(m, n) = X_K(m)\, Y_S(n)$ являются собственными функциями суммы операторов $(R_1 + R_2)$, и собственные значения $\lambda_{KS}$, соответствующие этим собственным функциям, определяются из соотношения*

$$\lambda_{KS} = \lambda_K^{(1)} + \lambda_S^{(2)}\,.$$

Перейдем теперь к рассмотрению задачи:

$$R\, W_{KS}(m, n) - \tilde{\lambda}_{KS}\, W_{KS}(m, n) = 0\,, \tag{15}$$

$$Z_i\, W_{KS}(m, n)|_{\Gamma_{hi}} = 0\,, \tag{16}$$

где $R$ — разностный оператор (1), $Z_i$ — операторы краевых условий.

**Теорема.** *Если оператор* (1) *обладает свойством осевой симметрии и краевые условия* (12), (14) *в совокупности совпадают с краевыми условиями* (16), *то существует такое расщепление оператора* (1) *на сумму элементарных операторов $R_\nu$, что при достаточно малом шаге сетки $h$ будем иметь*:

$$\text{а)}\quad W_{KS}(m, n) \approx W_{KS}^0(m, n)\,, \tag{17}$$

*где $W_{KS}(m, n)$ — собственные функции оператора* (1), *$W_{KS}^0(m, n)$ — собственные функции суммы главных элементарных операторов* (3), (4);

$$\text{б)}\quad \tilde{\lambda}_{KS} \approx \lambda_K^{(1)} + \lambda_S^{(2)} + \sum_{\nu=3}^{r} \lambda_{KS}^{(\nu)}\,, \tag{18}$$

*где $\tilde{\lambda}_{KS}$ — собственные значения оператора* (1), *$\lambda_K^{(1)}$, $\lambda_S^{(2)}$, $\lambda_{KS}^{(\nu)}$ — собственные значения операторов $R_1$, $R_2$, $R_\nu$ ($\nu = 3, 4, \ldots, r$).*

**Следствие 1.** *При измельчении шага сетки $h$ погрешность приближенных соотношений* (17), (18), *убывает вместе с $h$, т.е. метод расщепления приводит к сходяшемуся по $h$ процессу.*

**Следствие 2.** *Если окажается, что собственные функции элементарных операторов $R_\nu$ ($\nu = 3, 4, \ldots, r$) совпадают с собственными функциями суммы главных элементарных операторов $R_1$ и $R_2$, то приближенные соотношения* (17), (18) *превращаются в точные равенства.*

В заключение заметим, что метод расщепления дает возможность построить легко реализуемые на электронных машинах алгорифмы решения задач о колебаниях, устойчивости и изгибе пластин и оболочек при сколь угодно большом числе узлов сетки. В частности, в применении к задачам о колебаниях пластин метод расщепления свободен от накопления вычислительных погрешностей и позволяет вычислить с достаточной точностью любое число частот и соответствующих форм колебаний независимо от условий на контуре. Это достигается тем, что алгорифм не связан с построением характеристического полинома матрицы разностного оператора и решением характеристического уравнения.

*А. В. Буледза,* Проспект 40-летия Октября 21, кв. 5, Ужгород, СССР.