Aplikace matematiky

Lothar Collatz

# Zur numerischen Behandlung der rationalen Tschebyscheff-Approximation bei mehreren unabhängigen Veränderlichen

*Aplikace matematiky*, Vol. 13 (1968), No. 2, 137–146

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103144

# ZUR NUMERISCHEN BEHANDLUNG DER RATIONALEN TSCHEBYSCHEFF-APPROXIMATION BEI MEHREREN UNABHÄNGIGEN VERÄNDERLICHEN

L. COLLATZ

## 1. EINFÜHRUNG, NORMALFALL UND AUSNAHMEFALL IN DER NUMERISCHEN MATHEMATIK

Als kleiner Beitrag zu dem Thema dieser Tagung möge eine ganz spezielle Fragestellung der numerischen Mathematik herausgegriffen werden, bei der noch keine vollbefriedigende Lösung vorzuliegen scheint. Es soll die rationale Tschebyscheff-Approximation bei Funktionen $f(x)$ von mehreren unabhängigen Veränderlichen $x = (x_{(1)}, \ldots, x_{(q)})$ betrachtet werden.

In vielen Gebieten der numerischen Mathematik liegt folgende Situation vor: Es gibt Methoden für den „Normalfall", welche im allgemeinen ganz gut verwendbar sind, die aber im „Nicht-Normalfall", in Ausnahmefällen oder sonst bei schwierigen Verhältnissen versagen; es gibt dann aber andere Methoden, die in allen Fällen – auch in den Ausnahmefällen – durchführbar sind, welche jedoch auch in den „gutartigen" oder normalen Fällen einen ungewöhnlich großen Rechenaufwand erfordern. So ist es z. B. bei der numerischen Bestimmung der Wurzeln algebraischer Gleichungen $g(z) = 0$; wenn das Polynom $g(z)$ die Wurzeln $z_1, \ldots, z_m$ hat, von denen keine zwei „nahe" beeinander liegen [das sei der „Normalfall"], gibt es Verfahren, welche mit nicht zu großem Rechenaufwand die Wurzeln zu berechnen gestatten. Für den anderen Fall sind auch Verfahren entwickelt worden, die stets anwendbar sind, aber für den Normalfall wegen sehr großen Arbeitsaufwandes nicht mit anderen spezielleren Methoden konkurrenzfähig sind. Die Schwierigkeit besteht aber darin, daß man von vornherein i. a. nicht weiß, ob nun der Normalfall vorliegt oder nicht. Ähnliche Verhältnisse liegen bei der Eigenwertaufgabe für Matrizen, wo die nichtnormalisierbaren Matrizen den Ausnahmefall darstellen, bei der Inversion von Matrizen und der Auflösung linearer Gleichungssysteme und bei vielen anderen numerischen Aufgaben vor, wobei für die numerische Durchfürhung nicht nur die Ausnahmefälle selbst, sondern auch die den Ausnahmefällen „benachbarten" Aufgaben oft sehr große Schwierigkeiten bereiten.

Dieselbe Situation liegt nun bei der rationalen Tschebyscheff-Approximation vor, wobei bei Funktionen $f(x)$ aber noch ein großer Unterschied zwischen Funktionen von nur einer unabhängigen ($q = 1$) und von mehreren ($q > 1$) unabhängigen Veränderlichen besteht. Es soll $f(x)$ durch Ausdrücke der Form $u/v$ angenähert werden, wobei im einfachsten Fall $u$ und $v$ der „Klasse $[r, s]$" angehören, d. h. Polynome in $x$ vom Grad $r$, bzw. $s$ sein sollen. Im Falle $q = 1$ liegen eingehende theoretische Untersuchungen vor; man weiß, daß im „Normalfall" die beste Tschebyscheff-Approximierende $\varphi(x)$ der Klasse $[r, s]$ und nicht auch schon der Klasse $[r - 1, s - 1]$ angehört und dass dann der durch die Tschebyscheff-Approximation definierte Projektionsoperator an der Stelle $f$ stetig ist, was für die Stabilität der numerischen Verfahren von Bedeutung ist; man weiß, daß es aber auch Fälle gibt, bei denen bei der besten Annäherung $\varphi(x)$ Zähler und Nenner einen gemeinsamen Linearfaktor haben, der dann „gekürzt" werden kann, so daß $\varphi(x)$ auf eine Form $u/v$ gebracht werden kann, die zur Klasse $[r - 1, s - 1]$ gehört; bei mehreren unabhängigen Veränderlichen aber scheinen die entsprechenden Verhältnisse theoretisch noch nicht geklärt zu sein, wodurch auch für die numerische Behandlung die Situation sehr erschwert wird.

## 2. FORMULIERUNG

Es sind viele Verfahren zur numerischen Berechnung der Tschebyscheff-Approximation $\varphi(x)$ vorgeschlagen worden und es soll kurz über Versuche mit einigen dieser Verfahren berichtet werden, wobei der Eindruck entsteht, daß es auch hier Methoden gibt, welche im „Normalfall" gut und bequem durchführbar sind, die aber in „schwierigen" Fällen versagen, während es andere Methoden gibt, die allgemein anwendbar erscheinen, die aber einen großen Rechenaufwand erfordern und im „Normalfall" den erstgenannten Methoden unterlegen sind; hierbei tritt der schon erwähnte erschwerende Umstand hinzu, daß man von vornherein nicht weiß, wann der „Normalfall" vorliegt und daß man noch nicht einmal weiß, was man als „Normalfall" zu bezeichnen hat.

Gegeben sei ein abgeschlossener beschränkter Bereich $B$ des $q$-dimensionalen Punktraumes $R^q$. Es sei $C\langle B\rangle$ der Raum der auf $B$ stetigen Funktionen $f(x)$; es seien $f, u_j, v_k$ ($j = 1, \ldots, r$, $k = 1, \ldots, s$) gegebene Elemente von $C\langle B\rangle$ und die $u_j$ und die $v_k$ jeweils voneinander linear unabhängig. Seien $U$ und $V$ die von den $u_j$, bzw. $v_k$ aufgespannten linearen Teilräume von $C\langle B\rangle$ mit reellen Koeffizienten $a_j$, bzw. $b_k$, und $V^+$ sei die Menge derjenigen Funktionen $v$ aus $V$, welche in ganz $B$ positiv sind. Sei $Q$ die Klasse der Quotienten $u/v$, wobei $u \in U$ und $v \in V^+$ entnommen ist.

Mit der Norm

$$\|\varphi\| = \operatorname*{Max}_{x \in B} |\varphi(x)| \tag{1}$$

lautet dann das Problem der rationalen Tschebyscheff-Approximation, die sogenannte Minimalabweichung $\varrho$

$$\varrho(f) = \inf_{u/v \in Q} \left\| \frac{u}{v} - f \right\| \tag{2}$$

und Funktionen $\hat{u}, \hat{v}$ mit $\varrho(f) = \|\hat{u}/\hat{v} - f\|$ zu ermitteln oder wenigstens $\varrho(f)$ in Schranken einzuschließen und Funktionen $\tilde{u}, \tilde{v}$ zu berechnen, für welche bei vorgegebenem $\delta$

$$\left|\varrho(f) - \left\|\frac{\tilde{u}}{\tilde{v}} - f\right\|\right| \leqq \delta \tag{3}$$

ausfällt.

Im folgenden wird der Begriff der Menge $E$ der Extremalpunkte einer Näherung $u/v$ als Menge der Punkte in $B$, an denen der Fehler $\varepsilon = (u/v) - f$ seinen maximalen Betrag annimmt, benötigt:

$$E = E(u/v) = \left\{x \in B;\ \left|\frac{u(x)}{v(x)} - f(x)\right| = \left\|\frac{u}{v} - f\right\|\right\}. \tag{4}$$

Die ganze Aufgabe wird nun diskretisiert, indem man $m$ Punkte $x_1, x_2, \ldots, x_m$ aus $B$ auswählt, welche eine Menge $M$ bilden. Man kann die obigen Formeln dann entsprechend mit $M$ anstatt mit $B$ bilden, was im folgenden durch einen Index $M$ angedeutet wird. Es sollen nun aus der Vielzahl der zur Verfügung stehenden Methoden zur Behandlung der diskreten Tschebyscheff-Approximation einige spezielle herausgegriffen werden.

### 3. KONSISTENZ-TESTVERFAHREN (GOLDSTEIN [63] [65])

Für die Punkte $x_i$ verlangt man bei noch zu wählender Konstanten $K$:

$$|u(x_i) - f(x_i)\, v(x_i)| \leqq K v(x_i)\ ; \quad v(x_i) \geqq \delta > 0 \quad (i = 1, \ldots, m) \tag{5}$$

$$|a_j| \leqq 1\,, \quad |b_k| \leqq 1 \quad (j = 1, \ldots, r,\ k = 1, \ldots, s)\,. \tag{6}$$

Mit $r + s = n$ sind das bei Auflösung der Betragsstriche $3m + 2n + 1$ lineare Ungleichungen für die $n + 1$ Grössen $a_j$, $b_k$, $\delta$. Man bestimmt bei diesem Verfahren je eine Folge von unteren, bzw. oberen Schranken $k_p$ und $K_p$ $(p = 0, 1, \ldots)$ für die Norm $\varrho_M(f)$ der Fehlerfunktion

$$\varepsilon = \frac{u_M}{v_M} - f$$

auf $M$. Man geht aus von 2 groben Schranken, wobei man $k_p = 0$ annehmen kann. Bei $p$-tem Schritt bildet man

$$K = \tfrac{1}{2}(k_{p-1} + K_{p-1}) \tag{7}$$

und testet das obige Ungleichungssystem. Ist es lösbar, so erhält man einen Koeffizientenvektor und der getestete Wert $K$ kann als neue obere Schranke $K_p$ verwendet werden, während die untere Schranke $k_p = k_{p-1}$ beibehalten wird. Ist das Ungleichungssystem nicht lösbar, so dient der getestete Wert $K$ als neue untere Schranke $k_p$, während die obere Schranke beibehalten wird: $K_p = K_{p-1}$; so wird bei jedem Schritt die Differenz der Schranken halbiert.

Erfahrungen. Es ist ein einfaches Verfahren, welches sich bequem programmieren läßt und sich als recht zuverlässig, auch in Fällen in der Nähe von Ausartungen, gezeigt hat. Das Verfahren liefert bei jedem Schritt eine untere und obere Schranke, was einen großen Vorteil vor manchen anderen Methoden bedeutet. Die Genauigkeit ist unmittelbar abschätzbar, nach $p$ Schritten beträgt sie $2^{-p}(K_0 - k_0)$. Ein großer Nachteil besteht aber in dem notwendigen Rechenaufwand, da bei jedem Schritt ein System von $3m + 2n + 1$ Ungleichungen auf Lösbarkeit geprüft werden muß, wobei bei wachsendem $m$ bei der Durchführung der Rechnung auf Rechenanlagen der Platzbedarf und die Rechenzeit stark anwachsen.

## 4. NENNERITERATION

Man bestimmt 2 Folgen $u_p, v_p$, indem man von einer Nennerfunktion $v_0 \in V^+$ ausgeht und beim $p$-ten Schritt die Norm von

$$\frac{u_p - f v_p}{v_{p-1}} \tag{8}$$

zu minimieren sucht, wobei also der Nenner $v_{p-1}$ festgehalten wird und im Zähler die Koefizienten von $u_p$ und $v_p$ variieren; man löst also beim $p$-ten Schritt eine lineare Tschebyscheff-Approximation mit $v_{p-1}$ als Gewichtsfunktion. Man nimmt dann noch $v_p(x_i) > 0$ hinzu oder für die numerische Durchführung besser:

$$v_p(x_i) \geqq \delta > 0 \tag{9}$$

mit genügend kleinem Wert von $\delta$.

Wenn nichts weiter über die Lösung bekannt ist, kann man mit $v_0 = 1$ starten. Die Durchführung des $p$-ten Schrittes kann mit den üblichen Methoden der Optimierung für lineare Tschebyscheff-Approximation oder mit einem von W. Krabs [66] vorgeschlagenen Verfahren für diskrete lineare Tschebyscheff-Approximation erfolgen.

Erfahrungen. Es empfiehlt sich, die beiden letztgenannten Möglichkeiten zu kombinieren, also

I) Einige Schritte mit Hilfe der üblichen linearen Tschebyscheff-Approximation (System von $3m$ Ungleichungen bei jedem Schritt) durchzuführen und dann, wenn die Rechnung $v_p \leqq 0$ nicht mehr erwarten läßt,
II) Einige Schritte nach dem Verfahren von Krabs anzuschließen.

In vielen Fällen arbeitet das Verfahren sehr rasch und viel schneller als die Methoden von Nr. 5 und 6, in ungünstigen Fällen dagegen kann es eintreten, daß das Verfahren konvergiert, aber nicht gegen die richtigen Werte, vgl. Nr. 7. Startet man mit $v_0 = 1$, so ergibt sich in nicht zu ungünstigen Fällen nach einem Schritt erfahrungsgemäß eine Abweichung $\varepsilon = \|f - u_1/v_1\| < 1{,}5\ \varrho(f)$, sodass es empfehlenswert erscheint, bei anderen Verfahren einen Schritt dieser Methode vorzuschalten.

## 5. GRADIENTENVERFAHREN

Dieses Verfahren ist nicht auf rationale Tschebyscheff-Approximation beschränkt; die folgende Art der Bestimmung der in der Rechnung benötigten Grösse $\varrho$ nach ZUHOVICKIĬ [64] ist aber auf den rationalen Fall zugeschnitten. Faßt man die Koeffizienten $a_j$, $b_k$ zu einem Vektor $p$ zusammen und ist $p^0$ ein gewählter Ausgangsvektor für $p$, für welchen der zugehörige Nenner $v$ nicht in $B$ verschwindet, so sucht man einen Korrekturvektor $c$ und einen Faktor $\varrho$ so zu bestimmen, daß

$$\|f - R(p^0 + \varrho c)\| < \|f - R(p^0)\| \tag{10}$$

ist, wobei $R(p)$ die mit den Koeffizienten $p$ gebildete rationale Funktion $u/v$ bedeutet.

Die Richtung von $b$ wird durch eine lineare Optimierung auf einer Teilmenge von $M$ bestimmt und $\varrho$ nach Zuhovickiĭ durch Lösen quadratischer Gleichungen ermittelt.

Erfahrungen. Das Verfahren scheint bei verschiedenen Beispielen zunächst gut zu arbeiten, dann aber langsam zu konvergieren, und scheint daher geeignet, für die rationale Approximation Ausgangsnäherungen für andere Verfahren zu liefern.

## 6. VERWENDUNG DER CHARAKTERISIERUNG VON MINIMALLÖSUNGEN

Sei $\tilde{u}/\tilde{v}$ ein Element aus der Klasse $Q$ der betrachteten Quotienten mit $\tilde{E}$ als Menge der zugehörigen Extremalpunkte. Dann gilt nach Kolmogoroff die folgende Kennzeichnung von Minimallösungen: Es ist $\tilde{u}/\tilde{v}$ genau dann Minimallösung, wenn die Bedingung

$$\operatorname*{Min}_{x\in\tilde{E}} \left(f(x) - \frac{\tilde{u}(x)}{\tilde{v}(x)}\right)\left(\frac{u(x)}{v(x)} - \frac{\tilde{u}(x)}{\tilde{v}(x)}\right) \leqq 0 \tag{11}$$

für alle Quotienten $(u/v) \in Q$ gilt.

Die Frage nach der Erfüllung dieser Bedingung führt (Krabs [67]) auf die Bestimmung einer Zahl $\tau$ und eines Vektor $c = (c_1, \ldots, c_{r+s})$ mit

$$\mathbf{Ac} = \tau \mathbf{B}|\mathbf{c}|\,, \quad \text{wobei} \quad r + s = n = m \quad \text{sei und} \tag{12}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} u_1(x_1), & \ldots, u_1(x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_r(x_1), & \ldots, u_r(x_n) \\ v_1(x_1) f(x_1), & \ldots, v_1(x_n) f(x_n) \\ \cdot & \cdot \\ v_s(x_1) f(x_1), & \ldots, v_s(x_n) f(x_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0, & \ldots, 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0, & \ldots, 0 \\ v_1(x_1), & \ldots, v_1(x_n) \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ v_s(x_1), & \ldots, v_s(x_n) \end{pmatrix}; \quad |\mathbf{c}| = \begin{pmatrix} |c_1| \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |c_n| \end{pmatrix} \tag{13}$$

gesetzt ist.

Es sei die Matrix $\mathbf{A}$ nicht singulär; mit $\mathbf{D} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ ist (12) äquivalent mit der vom gewöhnlichen Typ abweichenden Eigenwertaufgabe:

$$|\mathbf{Dy}| = \tau \mathbf{y}\,, \quad \mathbf{y} \geqq 0 \tag{14}$$

wobei die Schreibweise $|\mathbf{Dy}|$ genauso wie bei (13) erklärt ist. Diese Eigenwertaufgabe kann iterativ gelöst werden; aus der Lösbarkeit von (12) folgt die des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{j=1}^{r} u_j(x_i)\, a_j + \sum_{k=1}^{s} [\lambda \operatorname{sign} c_i - f(x_i)]\, v_k(x_i)\, b_k = \begin{cases} f(x_i) - \lambda \operatorname{sign} c_i & \text{für} \quad i = 1 \\ 0 \quad \text{für} \quad i = 2, \ldots, n \end{cases} \tag{15}$$

Erfahrungen. Das Verfahren ist nicht immer anwendbar. In den Fällen, in denen es benutzbar ist, arbeitet es sehr rasch, da jeder Schritt wenig Rechenarbeit und insbesondere nicht das Lösen von Optimierungsaufgaben erfordert. Wegen des jeweiligen Zurückgreifens auf die Ausgangsdaten ist das Verfahren gegen Rundungsfehler wenig anfällig, der Bedarf an Speicherplätzen ist gering.

## 7. NUMERISCHE BEISPIELE

Für die Durchführung numerischer Beispiele danke ich den Herren HELMUT KRISCH, GÜNTER LÖH und PETER SIGGELKO. Die angegebenen Rechenzeiten beziehen sich auf die Anlage TELEFUNKEN TR4 der Universität Hamburg. Es ist in den Beispielen $x$, $y$ statt $x_1$, $x_2$ gesetzt. Bei den ersten vier Beispielen wird approximiert durch Quotienten aus linearen Funktionen:

$$\frac{u}{v} = \frac{a_0 + a_1 x + a_2 y}{1 + b_1 x + b_2 y} \tag{16}$$

die Beispiele wurden nach den in Nr. 3, 4, 5 beschriebenen Methoden behandelt, wobei sich die dort jeweils genannten Erfahrungen zeigen:

| Beispiel Nr. | Funktion $f(x, y)$ | Bereich B | Punktgitter M | Lösung | Verfahren nach Nr. | Anzahl der Schritte | Rechen-zeit pro Schritt in sec. | Gesamt-zeit in sec. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $e^{x^3 y}$ | $0 \leqq x \leqq 1$ | Quadratisches Gitter mit der Maschenweite $h = 0.1$ | $\lVert\varepsilon\rVert \leqq 0.113\,69$<br>$a_0 = 0.886\,317$<br>$a_1 = 0.635\,875$<br>$a_2 = 0.036\,073\,5$<br>$b_1 = -0.775\,120$<br>$b_2 = -0.123\,707$ | 3 | 17 | 10 | 170 |
| | | | | | 4 I | 8 | 5 | 97 |
| | | | | | 4 II | 5 | 11 | |
| | | | | | 5 | 24 | 7.2 | 173 |
| 2 | $\ln(2+x)/(2-y)$ | $0 \leqq y \leqq 1$ | | $\lVert\varepsilon\rVert \leqq 0.003\,387$<br>$a_0 = 0.003\,386$<br>$a_1 = 0.473\,403$<br>$a_2 = 0.471\,722$<br>$b_1 = 0.182\,992$<br>$b_2 = -0.316\,951$ | 3 | 18 | 8.7 | 158 |
| | | | | | 4 I | 2 | 6 | 22 |
| | | | | | 4 II | 2 | 5 | |
| | | | | | 5 | 33 | 6.6 | 218 |
| 3 | $e^x - e^y$ | $x^2 + y^2 \leqq 1$ | 49 Punkte (die Punkte liegen zu je 8 auf gleichabständigen Kreisen, auf $r = 1$ liegen 16 Punkte) | $\lVert\varepsilon\rVert \leqq 0.111\,4$<br>$a_0 = 0$<br>$a_1 = 1.037\,7$<br>$a_2 = 1.037\,7$<br>$b_1 = -0.396\,1$<br>$b_2 = 0.396\,1$ | 3 | | | |
| | | | | | 4 I | 4 | | 37 |
| | | | | | 4 II | 1 | | |
| | | | | | 5 | 16 | 8 | 129 |
| 4 | $\sin x + \cos y$ | $0 \leqq x \leqq 1$<br>$0 \leqq y \leqq 1$ | Quadratisches Gitter der Maschenweite $h = 0.1$ | $\lVert\varepsilon\rVert \leqq 0.068\,9$<br>$a_0 = 1.05$<br>$a_1 = 1.48$<br>$a_2 = -0.34$<br>$b_1 = 0.33$<br>$b_2 = 0.19$ | 3 | | | 119 |
| | | | | | 4 I | | | 81 |
| | | | | | 4 II | | | |
| | | | | | 5 | | | 157 |

Bei dem vierten Beispiel $f(x, y) = \sin x + \cos y$ liefert die Methode von Nr. 4 die Werte der Koeffizienten

$$a_0 = 1.073\,, \quad a_1 = 1.246\,, \quad a_2 = -0.508\,, \quad b_1 = 0.211\,, \quad b_2 = 0.034\,;$$

es wird $\|\varepsilon\| \leqq 0{,}0726$; das Verfahren konvergiert, aber nicht gegen die richtige Lösung.

Schließlich sei noch das Beispiel $f(x, y) = \tan(\pi x) \,.\, \tan(\pi y)$ genannt, welches im Dreiecksbereich $0 \leqq y \leqq x \leqq 0.25$ bei einem quadratischen Gitter mit der Maschenweite $h = \frac{1}{40}$ mit insgesamt 66 Gitterpunkten und einer rationalen Funktion der Form

$$\frac{u}{v} = \frac{a_1 xy + a_2 xy(x^2 + y^2)}{b_1 + b_2(x^2 + y^2)} \tag{17}$$

nach der in Nr. 6 beschriebenen Methode von Krabs behandelt wurde. Es ergab sich die Lösung

$$\begin{aligned} a_0 &= 11.727\,654\,5 \\ a_1 &= 10.184\,312\,7 \\ b_0 &= 1.177\,961\,9 \\ b_1 &= -2.905\,500\,7 \end{aligned}$$

und für die Minimalabweichung die Schranken:

$$\begin{aligned} \varrho(f) &\geqq 0.002\,738\,156\,316 \\ \varrho(f) &\leqq 0.002\,738\,156\,356 \end{aligned}$$

In diesem Fall scheint die Methode von Nr. 6 den anderen der genannten Methoden überlegen zu sein.

Der erweiterte Ansatz

$$\frac{u}{v} = \frac{a_0 xy + a_1 xy(x^2 + y^2) + a_2 xy(3x^4 + 10x^2y^2 + 3y^4)}{b_0 + b_1(x^2 + y^2) + b_2(x^4 + 6x^2y^2 + y^4)} \tag{18}$$

fürht bei dem gleichen Gitter zu der Lösung:

$$\begin{aligned} a_0 &= 9.868\,194\,2 & b_0 &= 1.000\,000\,0 \\ a_1 &= -17.081\,575\,9 & b_1 &= -5.036\,324\,4 \\ a_2 &= -\ 2.680\,660\,4 & b_2 &= 3.275\,663\,6 \end{aligned}$$

Der Vergleich mit den anderen Methoden ergibt:

| Methode Nr. | Abschätzung für die Minimalabweichung | Rechenzeit |
|---|---|---|
| 3 | $\varrho(f) \geqq 0.000\,036\,049\,6$<br>$\varrho(f) \leqq 0.000\,036\,095\,4$ | $\sim$ 84 sec |
| 4 | $\varrho(f) \leqq 0.000\,036\,056\,8$ | $\sim$ 45 sec |
| 5 | $\varrho(f) \leqq 0.000\,036\,057\,1$ | $\sim$ 40 sec |
| 6 | $\varrho(f) \geqq 0.000\,036\,056\,4$<br>$\varrho(f) \leqq 0.000\,036\,057\,8$ | $\sim$ 32 sec |

Bei Verfahren von Nr. 3 und 5 wurde durch einen Minimax-Schritt eine günstige Ausgangsnäherung ermittelt.

Während die Methode 6 bei diesem Beispiel den anderen der genannten Methoden überlegen zu sein scheint, versagt sie in Beispeil 1, 2 und 4.

Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei ausdrücklich darauf hingewiesen, daß die angegebenen Rechenzeiten stark von der Anfangsnäherung und der angestrebten Genauigkeit abhängen. Die Zeiten beziehen sich auf nicht speziell errechnete und daher nur mäßige Anfangsnäherungen.

### *Literatur*

*Cheney E. W.* und *H. L. Loeb* [61]: Two new algorithms for rational approximation. Num. Math. *3*, 72—75 (1961).

*Cheney E. W.* und *H. L. Loeb* [62]: On rational Chebychev Approximation. Num. Math. *4*, 124—127 (1962).

*Collatz L.* und *W. Wetterling*: [66] Optimierungsaufgaben, Berlin, Heidelberg, New York, Springer 1966, 178 S.

*Goldstein A. A.* [63]: On the stability of rational approximation. Num. Math. *5*, 431—438 (1963).

*Goldstein A. A.* [65] (zusammen mit P. Fox und G. Lastman): Rational approximation on finite point sets. In: Approximation of Funtions, Amsterdam—London—New York 1965: Elsevier Publ. Comp., pp. 57—67.

*Kolmogoroff A. N.* [48]: Eine Bemerkung zu den Polynomen von P. L. Tschebyscheff, die von einer gegebenen Funktion am wenigsten abweichen (Russisch) Usp. Math. Nauk *3*, 216—221 (1948).

*Krabs W.* [66]: Ein Verfahren zur Lösung der diskreten rationalen Approximationsaufgabe. Z. angew. Math. Mech. *46* (Sonderheft der GAMM-Tagung) 63—66 (1966).

*Krabs W.* [66a]: Zur verallgemeinerten rationalen Approximation, Math. Z. *94*, 84—97 (1966).

*Krabs W.* [67]: Dualität bei diskreter rationaler Approximation; In: Funktionalanalysis, Approximationstheorie, Num. Math. ISNM, Bd. 7, Birkhäuser Verlag, herausgegeben von L. Collatz, G. Meinardus, H. Unger 1967, S. 33—41.

*H. L. Loeb* [60]: Algorithms for Chebychev approximation using the ratio for linear forms. J. SIAM *8*, 458—465 (1960).
*Meinardus, G.* [64]: Approximation von Funktionen und ihre numerische Behandlung, Berlin—Heidelberg—Göttingen—New York, Springer 1964.
*Werner H.* [63]: Rationale Tschebyscheff-Approximation, Eigenwert-Theorie und Differenzenrechnung, Arch. Rat. Mech. Anal. *13*, 330—347 (1963).
*Zuhovickiĭ S. J.* und *R. A. Poljak* [64]: An algorithm for solving the problem of rational Čebyšev approximation. Soviet Math. Dokl. *5*, 1574—1578 (1964).

*L. Collatz,* Eulenkurgstr. 84, Hamburg 67, BRD.