

# Aplikace matematiky

---

Pierre-Jean Laurent

Représentation de données expérimentales à l'aide de fonctions-spline  
d'ajustement et evaluation optimale de fonctionnelles linéaires continues

*Aplikace matematiky*, Vol. 13 (1968), No. 2, 154–162

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/103148>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1968

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

REPRÉSENTATION DE DONNÉES EXPÉRIMENTALES  
A L'AIDE DE FONCTIONS-SPLINE D'AJUSTEMENT ET EVALUATION  
OPTIMALE DE FONCTIONNELLES LINEAIRES CONTINUES

P. J. LAURENT

I. INTRODUCTION

Le problème suivant est très fréquent en analyse numérique: Sachant qu'une fonction inconnue  $g$  prend en certaines abscisses  $x_i \in \langle a, b \rangle$ ,  $i = 1$  à  $n$ , les valeurs  $y_i$  entachées d'erreurs (expérimentales ou autres), on cherche à obtenir la valeur de  $g$  en un point quelconque  $x \in \langle a, b \rangle$ , ou plus généralement, on cherche la valeur d'une fonctionnelle linéaire continue appliquée à  $g$  (dérivée en un point, intégrale, etc ...).

Pour représenter la fonction inconnue  $g$  il semble raisonnable de faire un compromis entre l'approximation des données expérimentales caractérisée par

$$E(f) = \sum_{i=1}^n [f(x_i) - y_i]^2$$

et le caractère lisse de la solution caractérisé par

$$L(f) = \int_a^b [f^{(q)}(x)]^2 dx .$$

On prendra donc pour  $g$  la fonction  $s$  qui minimise

$$\phi(f) = L(f) + \varrho E(f) \quad (\varrho > 0)$$

parmi toutes les fonctions  $f$  ayant une dérivée  $q^{\text{ième}}$  de carré sommable sur  $\langle a, b \rangle$ . Lorsque  $n \geq q$ , cette fonction  $s$  (*fonction-spline d'ajustement*) est *unique*. Elle est formée de morceaux de polynômes de degré  $2q - 1$  qui se raccordent aux abscisses  $x_i$  jusqu'à la dérivée  $2q - 2^{\text{ème}}$  comprise (voir [9]).

Soit  $H^q$  l'espace de Hilbert des fonctions ayant une dérivée  $q - 1^{\text{ème}}$  absolument continue et une dérivée  $q^{\text{ème}}$  de carré sommable sur  $\langle a, b \rangle$  avec le produit scalaire:

$$[f, g]_q = \sum_{i=0}^q \int_a^b f^{(i)}(x) g^{(i)}(x) dx .$$

Les fonctionnelles qui à  $f \in H^q$  associent  $f(x_i)$  sont linéaires et continues ( $q \geq 1$ ). Il existe donc  $k_i \in H^q$  tel que:

$$[k_i, p]_q = f(x_i), \quad i = 1 \quad \text{à} \quad n .$$

Soit  $H^0$  l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable sur  $\langle a, b \rangle$  avec le produit scalaire

$$[f, g]_0 = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

et  $D^q$  l'opérateur linéaire continu de  $H^q$  sur  $H^0$  qui à  $f$  associe sa dérivée  $f^{(q)}$ .

Désignons par  $E$  l'espace euclidien de dimension  $n$  et par  $A$  l'opérateur linéaire continu de  $H^q$  dans  $A$  défini par:

$$A: x \in H^q \rightarrow \{[k_1, x]_q, \dots, [k_n, x]_q\} \in E.$$

Posons

$$e = \{y_1, y_2, \dots, y_n\} \in E.$$

La fonction-spline  $s$  est l'élément de  $H^q$  qui minimise la quantité:

$$\Phi(f) = \|D^q f\|^2 + \varrho \|Af - e\|^2.$$

## II. FONCTIONS-SPLINE D'AJUSTEMENT GÉNÉRALES

Nous allons étudier le problème de la *caractérisation* et de la *construction* de la fonction-spline  $s$  dans le cadre plus général utilisé par M. ATTEIA [1].

Soient  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert (qui joueront le rôle de  $H^q$  et  $H^0$  respectivement) et  $T$  un opérateur *linéaire continu* de  $X$  sur  $Y$  (jouant le rôle de  $D^q$ ). On désigne par  $k_1, \dots, k_n$  des éléments indépendants de  $X$  représentant  $n$  fonctionnelles linéaires continues. On notera  $Z = Y \times E$  l'espace de Hilbert produit cartésien de  $Y$  et  $E$  avec le produit scalaire:

$$[\{y_1, e_1\}, \{y_2, e_2\}]_Z = [y_1, y_2]_Y + \varrho [e_1, e_2]_E; \quad (\text{avec } \varrho > 0).$$

Soit  $L$  l'opérateur linéaire continu de  $X$  dans  $Z$  défini par:

$$L: x \in X \rightarrow \{Tx, Ax\} \in Z \quad (\text{avec } A \text{ défini comme au I.})$$

Posons  $a = \{\Theta_Y, e\} \in Z$  (avec  $\Theta_Y$  origine de  $Y$ ).

On appellera *fonction-spline d'ajustement générale* l'élément de  $X$  qui minimise

$$\Phi(f) = \|Tf\|_Y^2 + \varrho \|Af - e\|_E^2 = \|Lf - a\|_Z^2$$

c'est-à-dire l'élément  $s \in X$  qui vérifie:

$$(1) \quad \|Ls - a\|_Z = \min_{f \in X} \|Lf - a\|_Z.$$

Nous noterons  $N$  le noyau de  $T$  et nous le supposerons de dimension finie égale à  $q$ . Soit  $N^\perp$  son complémentaire orthogonal.

Désignons par  $K$  le sous-espace de dimension  $n$  engendré par les  $k_i$  et par  $K^\perp$  son complémentaire orthogonal.

Dans toute la suite nous ferons l'hypothèse:

$$(2) \quad N \cap K^\perp = \{\Theta_x\}$$

(où  $\Theta_x$  désigne l'origine de  $X$ ).

**Lemme 1.** *Le sous-espace  $H = K \cap N^\perp$  est de dimension  $n - q$ .*

(Pour la démonstration voir [6].)

L'opérateur adjoint  $T^*$  de  $T$  applique  $Y$  sur  $N^\perp$  (YOSIDA [10], page 205) et  $A^*$  applique  $E$  sur  $K$ :

$$A^*e = \sum_{i=1}^n y_i k_i.$$

Désignons par  $L^*$  l'opérateur adjoint de  $L$ : Si  $z = \{z_Y, z_E\} \in Z$ , on a:

$$(3) \quad L^*z = T^*z_Y + \varrho A^*z_E.$$

Ainsi nous avons  $L^*(Z) = N^\perp + K = X$  (par l'hypothèse (2)).  $L^*$  est donc un opérateur linéaire continu de  $Z$  sur  $X$ .

**Lemme 2.** *Le noyau  $G$  de  $L^*$  est un sous-espace de dimension  $n - q$  de  $Z$  et l'on a  $L(X) = G^\perp$ .*

Comme  $L^*(Z) = X$ , d'après le théorème du closed-range (Yosida [10], page 205),  $L(X) = \text{Ker}(L^*)^\perp = G^\perp$ .

On a  $L^*z = 0$  si et seulement si  $T^*z_Y = -\varrho A^*z_E$ , ce qui est seulement possible pour chaque  $x \in T^*(Y) \cap \varrho A^*(E) = N^\perp \cap K = H$  qui est de dimension  $n - q$ . Comme  $T^*$  et  $A^*$  sont biunivoques, le noyau  $G$  est aussi de dimension  $n - q$ .

Si  $h_1, \dots, h_{n-q}$  désigne une base de  $H$ , on peut prendre pour  $G$  la base suivante:

$$(4) \quad g_i = \left\{ f_i, -\frac{b_i}{\varrho} \right\},$$

$$i = 1 \text{ à } n - q \text{ avec } f_i = T^{*-1}(h_i) \text{ et } b_i = A^{*-1}(h_i).$$

**Théorème 1.** *Il existe une solution unique  $s \in X$  qui vérifie (1): C'est l'élément de  $X$  (unique) tel que:*

$$(5) \quad Ls - a = \sum_{j=1}^{n-q} \mu_j g_j \in G$$

où les  $\mu_j$  sont solutions du système linéaire:

$$(6) \quad \sum_{i=1}^{n-q} \mu_j [g_j, g_i]_Z = -[a, g_i]_Z, \quad i = 1 \text{ à } n - q.$$

En effet, on cherche  $p = Ls \in L(X) = G^\perp$  à distance minimum de  $a \in Z$ . Comme  $L(X)$  est fermé, l'élément  $p$  existe et il est unique; c'est la projection de  $a$  sur  $G^\perp$ : On a donc  $p - a \in G$ .

Le système linéaire exprime que  $p = \sum_{j=1}^{n-q} \mu_j g_j + a \in G^\perp$ .

Comme  $L$  est biunivoque (par l'hypothèse (2)),  $s$  est unique. (L'existence et l'unicité de  $s$  ont été démontrées par Attéia ([1], [2]) d'une façon différente.)

### III. CONSTRUCTION NUMÉRIQUE

La construction numérique est directement basée sur le théorème 1. Dans la plupart des cas, il est facile de trouver une base  $h_1, \dots, h_{n-q}$  de  $H$ . Les  $h_i$  sont combinaisons linéaires des  $k_j$  et les  $b_i \in E$  représentent les coefficients de ces combinaisons:

$$(7) \quad h_i = \sum_{j=1}^n b_j^i k_j, \quad i = 1 \text{ à } n - q.$$

On en déduit la base  $g_i$ , suivant (4).

On calcule  $[g_j, g_i]_Z$  et  $[a, g_i]_Z$  et on résoud le système (6) pour obtenir les  $\mu_j$ .

On en déduit  $Ls = \{Ts, As\}$ , soit simultanément:

$$(8) \quad Ts = \sum_{j=1}^{n-q} \mu_j f_j$$

$$(9) \quad As = e - \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{n-q} \mu_j b_j \quad \text{d'où les } [k_i, s]_X.$$

On remonte à la fonction-spline  $s$ .

**Exemple.** Reprenons l'exemple introductif. Le sous-espace  $N$  est l'ensemble des polynômes de degré  $q - 1$ . Comme  $h_i$ , on peut prendre la fonctionnelle différence divisée d'ordre  $q$ :

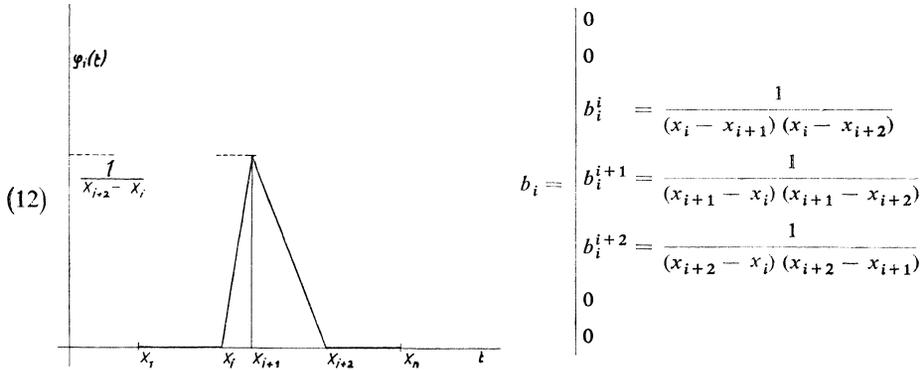
$$(10) \quad [h_i, f]_q = \delta_{x_i, \dots, x_{i+q}}^{(q)} f = \sum_{j=1}^n b_j^i f(x_j); \quad i = 1 \text{ à } n - q.$$

On sait que l'on a:

$$(11) \quad [h_i, f]_q = \int_a^b \varphi_i(t) f^{(q)}(t) dt = [\varphi_i, Tf]_0$$

où  $\varphi_i$  est la fonction noyau de la différence divisée d'ordre  $q$ . On a donc  $\varphi_i = T^{*^{-1}}(h_i) = f_i$ . On en déduit la base  $g_i$  suivant (4).

Prenons  $q = 2$ :



On a

$$(13) \quad [g_j, g_i]_Z = [\varphi_j, \varphi_i]_Y + \frac{1}{\varrho} [b_j, b_i]_E.$$

La matrice  $[g_j, g_i]$  est symétrique et penta-diagonale (pour  $q = 2$ ).

$$(14) \quad - [a, g_i]_Z = [e, b_i]_E = \sum_{j=1}^n y_j b_i^j.$$

On résout le système linéaire en  $\mu_j$  et on en déduit:

$$(15) \quad Ts = s'' = \sum_{i=1}^{n-2} \mu_i \varphi_i$$

(morceaux de segments qui se raccordent).

On retrouve le fait que  $s$  est formée de morceaux de polynômes de degré 3.

$$(16) \quad [k_i, s]_2 = s(x_i) = y_i - \frac{1}{\varrho} \sum_{j=1}^{n-2} \mu_j b_i^j; \quad i = 1 \quad \text{à} \quad n.$$

#### IV. EVALUATION D'UNE FONCTIONNELLE LINÉAIRE CONTINUE

Considérons d'abord l'exemple introductif:

Sachant que les valeurs  $y_i$  de  $g$  aux abscisses  $x_i$  sont entachées d'erreur et que cette fonction est supposée „lisse“, il paraît raisonnable de dire que la fonction  $g$  appartient à l'ensemble:

$$C_d = \{f \in H^q : \|D^q f\|^2 + \varrho \|Af - e\|^2 \leq d^2\}$$

pour un certain  $d > 0$  ( $\varrho$  étant fixé et caractérisant le compromis entre le lissage et l'approximation).

Si l'on désire connaître la valeur d'une fonctionnelle  $h$  appliquée à  $g$ , en principe, toutes les valeurs  $[h, f]_q$  avec  $f \in C_d$  sont possibles. En fait, quand  $f$  décrit  $C_d$ ,  $[h, f]_q$  décrit un intervalle  $\langle \alpha, \beta \rangle$ . Il semble donc normal d'adopter  $m = \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$  comme valeur approchée optimale de  $[h, g]_q$ . On va voir que cette valeur correspond à  $[h, s]_q$  où  $s$  est la fonction spline. On indiquera comment calculer cette valeur.

*Nous reprenons maintenant les notations du II.*

Soit  $h \in X$  la fonctionnelle à évaluer et

$$(17) \quad \begin{aligned} C_d &= \{f \in X : \|Tf\|_Y^2 + \varrho \|Af - e\|_E^2 \leq d^2\} \\ &= \{f \in X : \|Lf - a\|_Z \leq d\} \end{aligned}$$

l'ensemble des éléments possibles.

Puisque  $V = L(X) = G^\perp$  est fermé, d'après le théorème de l'opérateur inverse,  $L^{-1}$  est un opérateur linéaire continu de  $V$  sur  $X$ .

Si  $BF(a, d)$  désigne la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $d$  dans  $Z$ , on a:

$$C_d = L^{-1}(BF(a, d) \cap V).$$

Comme  $BF(a, d) \cap V$  est un ensemble borné, convexe, centré sur  $p$  (projection de  $a$  sur  $V$ ),  $C_d$  est un ensemble borné, convexe, centré sur  $L^{-1}(p) = s$  (la fonction-spline du II).

L'image par  $h \in X$  de l'ensemble  $C_d$  est donc un ensemble borné convexe de  $R$  (un intervalle) centré sur  $[h, s]_X$ .

Il en résulte le théorème suivant dû à M. ATTEIA [2]:

**Théorème 2.** *Si  $C_d = \{f \in X : \|Lf - a\|_Z \leq d\}$ , et si  $s_a$  est la fonction-spline relative à  $a$  (qui minimise  $\|Lx - a\|_Z$ ),  $[h, s_a]_X$  est le milieu de l'intervalle de  $R$ , décrit par les nombres  $[h, f]_X$  quand  $f$  parcourt  $C_d$ .*

*Evaluation de  $[h, s]_X$ :* Considérons un  $g \in Z$  tel que  $h = L^*g$  (un tel  $g$  n'est pas unique puisque  $L^*$  n'est pas biunivoque:  $\text{Ker}(L^*) = G$  de dimension  $n - q$ ). On a:

$$(18) \quad [h, x]_X = [L^*g, x]_X = [g, Lx]_Z = [g_Y, Tx]_Y + \varrho [g_E, Ax]_E$$

$$(19) \quad [h, x]_X = [g_Y, Tx]_Y + \varrho \sum_{i=1}^n g_E^i [k_i, x]_X.$$

En général il existe des formules naturelles simples du type (19). La méthode de construction numérique de  $s$  décrite au III fournit  $Ts$  et  $As = \{[k_i, s], i = 1 \text{ à } n\}$ . Il suffira donc d'appliquer (19) à  $s$ .

**Remarque 1.** Il existe un  $g_0 = \{g_{0Y}, g_{0E}\} \in Z$  unique vérifiant  $h = L^*g_0$  et de norme minimum dans  $Z$ : il suffit de prendre  $g_0 \in G^\perp$ .

Comme  $Ls = p$  est tel que  $p - a \in G$ , on aura:

$$(20) \quad [h, s]_X = [g_0, Ls]_Z = [g_0, p]_Z = [g_0, a]_Z = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$$

(en posant  $\lambda_i = g_{0E}^i$ ).

Il existe donc des coefficients  $\lambda_i$  (vérifiant  $[h, p]_X = \sum_{i=1}^n \lambda_i [k_i, p]_X$  pour tout  $p \in N$ ) tels que  $\sum_{i=1}^n \lambda_i y_i$  fournisse la valeur optimale  $[h, s]_X$ , c'est-à-dire le milieu de l'intervalle  $[h, C_d]_X$ .

**Remarque 2.** Appelons  $s_j$  la fonction-spline de base obtenue en prenant  $y_j = \delta_{ji}$ ,  $j = 1$  à  $n$ . On aura alors:

$$(21) \quad [h, s_i]_X = \lambda_i = g_{0E}^i.$$

Si la formule doit être calculée souvent, pour un même  $g$ , on aura intérêt à calculer les  $\lambda_i$ ; dans le cas contraire c'est la formule (19) qui sera à conseiller.

## V. EXEMPLES NUMÉRIQUES

Considérons l'exemple du III, avec  $q = 2$ ,  $n = 4$  ( $x_1 = 0$ ;  $x_2 = \frac{1}{3}$ ;  $x_3 = \frac{2}{3}$ ;  $x_4 = 1$ ).

a) *Evaluation d'intégrale:* Supposons que l'on veuille évaluer:

$$[h, g]_2 = \int_0^1 g(t) dt.$$

On peut trouver une formule simple du type (19) en se basant sur la formule des trapèzes de pas  $\frac{1}{3}$  avec son terme d'erreur sous forme intégrale:

$$(22) \quad [h, f]_2 = \int_0^1 K(t) f''(t) dt + [\frac{1}{6}f(0) + \frac{1}{3}f(\frac{1}{3}) + \frac{1}{3}f(\frac{2}{3}) + \frac{1}{6}f(1)] = \\ = [K, f'']_0 + g \left[ \frac{b}{g}, Af \right]_E$$

avec  $K(t) = \frac{1}{2}(t - \frac{1}{3})$  pour  $t \in \langle 0, \frac{1}{3} \rangle$  et périodique de période  $\frac{1}{3}$ ;  $b = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\} \in E$ . On applique (22) à la fonction-spline  $s$ , sachant que (d'après (15) et (16)):

$$(23) \quad s'' = \mu_1 \varphi_1 + \mu_2 \varphi_2, \quad As = e - \frac{1}{g} (\mu_1 b_1 + \mu_2 b_2).$$

Les coefficients  $\mu_1$  et  $\mu_2$  sont obtenus en résolvant le système linéaire (6) qui est ici d'ordre 2.

On obtient donc finalement:

$$(24) \quad [h, s]_2 = [b, e]_E + \mu_1 \left( [K, \varphi_1]_0 - \frac{1}{\varrho} [b_1, b]_E \right) + \mu_2 \left( [K, \varphi_2]_0 - \frac{1}{\varrho} [b_2, b]_E \right)$$

et en explicitant tous les calculs:

$$\begin{aligned} [h, s]_2 &= \frac{1}{6}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{6}y_4 + \\ &+ \frac{2}{81} \frac{(243 - \varrho)}{(5\varrho - 324)} \left( \frac{\varrho}{2}y_1 - \frac{\varrho}{2}y_2 - \frac{\varrho}{2}y_3 + \frac{\varrho}{2}y_4 \right). \end{aligned}$$

Lorsque  $\varrho$  tend vers zéro on obtient la formule  $\sum_{i=1}^4 \frac{1}{4}y_i$  qui correspond à intégrer la droite des moindres carrés.

Lorsque  $\varrho$  tend vers l'infini on obtient:

$$\frac{1}{90}(13y_1 + 32y_2 + 32y_3 + 13y_4)$$

qui est une meilleure formule au sens de Sard (Intégration de la fonction-spline d'interpolation: SCHOENBERG [7]).

b) *Dérivation approchée.* Supposons que l'on veuille calculer:

$$[h, g]_2 = g'(\frac{1}{2}).$$

Choisissons la formule suivante du type (19):

$$\begin{aligned} [h, f]_2 &= \int_0^1 H(t) f''(t) dt + [3f(\frac{2}{3}) - 3f(\frac{1}{3})] = \\ &= [H, f'']_0 + \varrho \left[ \frac{c}{\varrho}, Af \right] \end{aligned}$$

$$\text{avec } H(t) = \begin{cases} 3t - 1 & \text{pour } t \in \langle \frac{1}{3}, \frac{1}{2} \rangle \\ 3t - 2 & \text{pour } t \in \langle \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \rangle \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

$$c = \{0, -3, +3, 0\}.$$

Il suffit alors d'appliquer (24) en remplaçant  $b$  par  $c$  et  $K$  par  $H$ . On obtient finalement:

$$[h, s]_2 = (3y_3 - 3y_2) + \frac{\varrho - 81 \cdot 24}{18\varrho + 120 \cdot 81} \left( \frac{\varrho}{2}y_1 - \frac{27}{2}y_2 + \frac{27}{2}y_3 - \frac{\varrho}{2}y_4 \right).$$

Lorsque  $\varrho$  tend vers zéro, on obtient la formule:

$$-\frac{9}{10}y_1 - \frac{3}{10}y_2 + \frac{3}{10}y_3 + \frac{9}{10}y_4$$

qui correspond à la pente de la droite de moindre carré.

Lorsque  $g$  tend vers l'infini, on obtient:

$$\frac{1}{4}y_1 - \frac{15}{4}y_2 + \frac{15}{4}y_3 - \frac{1}{4}y_4$$

qui est la dérivée en  $\frac{1}{2}$  de la fonction-spline d'interpolation.

#### References

- [1] *M. Atteia*: Fonction-Spline généralisée, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 261 (1965), p. 2149—2152.
- [2] *M. Atteia*: Etude de certains noyaux et théorie des fonctions-spline en analyse numérique. Thèse, Grenoble (1966).
- [3] *C. Carasso*: Méthodes numériques pour l'obtention de fonctions-spline. Thèse, Grenoble (mars 1966).
- [4] *C. Carasso*: Méthode générale de construction de fonctions-spline (à paraître dans: Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle).
- [5] *P. J. Laurent*: Théorèmes de caractérisation en approximation convexe. Colloque: théorie de l'approximation des fonctions, Cluj 15—20 Sept. 67, (à paraître dans *Mathematica* 1968).
- [6] *P. J. Laurent* and *P. M. Anselone*: A general method for the construction of interpolating or smoothing spline-functions (à paraître dans *Numerische Mathematik*, 1968).
- [7] *I. J. Schoenberg*: On best approximation of linear operators. *Kon. Nederlandse Akad. Van Wetenschappen, Proc. Séries A*, 67, (1964), pp 155—163.
- [8] *I. J. Schoenberg*: Spline functions and the problem of graduation. *Proc. Nat. Acad. Sci*; 52 (1964), pp 947—950.
- [9] *I. J. Schoenberg* and *T. N. E. Greville*: Smoothing by generalized spline-functions. *SIAM Nat. Meeting*, N. Y. June 7—9, (1965).
- [10] *K. Yosida*: *Functional Analysis*, Springer Verlag (1965).

*P. J. Laurent*, Faculté des Sciences de Grenoble, Boîte Postale 7, 38—Saint Martin d'Hères, France.