Recenze

*Aplikace matematiky*, Vol. 16 (1971), No. 6, 452–459

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/103381

# RECENZE

*H. Stumpf:* EINGRENZUNGSVERFAHREN IN DER ELASTOMECHANIK. (Metody oboustranných odhadů v mechanice pružných těles). Forschungsberichte des Landes Nordrhein—Westfalen, Nr. 2116. Vydalo nakladatelství Westdeutscher Verlag Köln und Opladen 1970, 105 stran.

Tato monografie uvádí čtenáře podrobně do metodiky bodových oboustranných odhadů pro řešení úloh lineární teorie pružnosti. Stavy pružného tělesa rozděluje autor na „zatěžovací" (Lastspannungszustände) a „stavy vlastních pnutí" (Eigenspannungszustände) a dokazuje, že tím je dán rozklad Hilbertova prostoru všech pružných stavů s energetickým skalárním součinem na dva ortogonální podprostory. Pomocí tohoto rozkladu odvozují se nejprve oboustranné odhady pro skalární součin, v němž jeden součinitel je neznámý a nahrazuje se „srovnávacími" stavy, tj. aproximacemi. V této souvislosti je tu citována známá metoda „hyperkruhu" J. L. Synge.

Bodové odhady řešení lze získat dosazením „Greenova stavu" do principu virtuálních prací. „Greenův stav" je řešením úlohy s vhodně voleným singulárním bodovým zatížením, resp. deformací. Většinou nebývá přesný „Greenův stav" k disposici, ale dají se k němu nalézt jistá přiblížení — srovnávací stavy, které postačí k tomu, abychom stanovili nakonec interval, v němž leží hodnota hledané funkce v daném bodě. Metoda je osvětlena na příkladě desky, u které hledáme průhyb resp. ohybový moment v daném bodě.

Poslední část publikace je věnována oboustranným odhadům vlastních funkcí a to i v případě, že příslušný „Greenův stav" nemá konečnou energii. Numerické výsledky (pro desku) jsou uvedeny v 1 tabulce a v 18 diagramech. Text je doplněn mnoha názornými obrázky a bohatým seznamem literatury se 122 tituly.

V knize téměř neexistují tiskové chyby a po formální stránce jí lze sotva něco vytknout. Měl bych však několik připomínek, týkajících se obsahu. K celé řadě obrázků totiž schází — kromě odkazu na literaturu — vysvětlení. Nejasná zůstává otázka, k čemu slouží vůbec oboustranné bodové odhady vlastních funkcí. Při uvedení některých obecných definic a výsledků pro lineární operátory v Hilbertově prostoru dopustil se autor několika menších nepřesností.

Vcelku je výklad jasný a podrobný a námět vzhledem k rostoucímu významu a využívání počítačové techniky velmi aktuální. Knihu je možno vřele doporučit jednak technikům teoretického zaměření a jednak matematikům, zajímajícím se o matematické aplikace a numerické metody v mechanice, speciálně v lineární teorii pružnosti.

*Ivan Hlaváček*

*F. Heinmets a kol.*: CONCEPTS AND MODELS OF BIOMATHEMATICS. Marcel Dekker, inc. New York 1969, stran 287.

Publikace sestává ze dvou částí, z nichž vyšla dosud první, nazvaná: „*Simulační techniky a metody*". Tato část je též předmětem následné recense. Co do formy je publikace sborníkem. Hlavní autor se snažil, jak sám uvádí, zařadit do něj vybrané případy biologického modelování z nejrůznějších oblastí biologie, čemuž odpovídá i jejich volba.

Tak v kapitole I., nazvané *„Simulace glykolytického systému"*, popisuje David Garfinkel nejprve zkoumaný problém z hlediska jeho biochemických vlastností, dále naznačuje použité simulační techniky a použitý jazyk, konstrukci modelů jednoduchého enzymu a zamýšlí se nad budoucím vývojem biochemické simulace.

V kapitole II., nazvané *„Analysa pohybu elektronů v mitochondře"* (M. Pring), je nejprve popsán problém pohybu elektronů a navrženy simulační metody. Je připojen matematický rozbor a navíc i připojeno schema zpracování hybridním počítačem.

V kapitole III., *„Analysa sejmutých dat Fourierovou transformací"*, popisuje M. Pizer nejprve dosavadní metody analysy, podrobně pak vlastní techniku Fourierovy transformace a na konkretním případě demonstruje získané výsledky včetně částí použitých programů.

V kapitole IV., *„Regulace glukosy v krvi a cukrovka"*, zabývá se E. Ackerman povšechnými cíli matematické simulace, redukcí dat, diagnostickou klasifikací, testováním hypotéz apod. V rámci příkladů uvádí některé zajímavé výsledky koncentrace enzymů v závislosti na růstové funkci a zabývá se vlivem rychlosti vstřebávání a jeho modelováním.

V kapitole V., nazvané *„Analysa buněčného růstového procesu"*, popisuje sám F. Heinmets model růstu buňky včetně potřebné matematické formulace a na několika příkladech ukazuje simulaci tohoto procesu pomocí analogového počítače.

V kapitole VI., *„Modelování dynamiky adrenocortikálního vyměšování"*, se Ching-Chung nejprve zabývá tímto problémem z hlediska biologického, identifikuje jej nelineárním systémem a formuluje matematický model, který analysuje a realisuje.

V kapitole VII., *„Simulace pícninářské situace"*, podává pak David W. Goodall nejprve některé náměty na modelování ekosystémů a zabývá se jejich specifickými vlastnostmi. Popisuje některé vhodné matematické funkce a zabývá se podrobně i problémem strojového zpracování takovýchto modelů a dokonce otiskuje i program PASTOR, kterým je možno simulovat změny v pícninářském systému.

V poslední, tj. VIII. kapitole, nazvané *„Model pro výběr v systémech druhů"*, se zabývá Bruce R. Levin možnostmi modelování v rámci genetických problémů.

Publikace je bezesporu cenná tím, že předkládá řadu konkretních příkladů z oblasti biologického modelování, v české literatuře například jen ojediněle zastoupené. Nesnaží se, jak sám autor uvádí, vytvořit systematickou práci nebo dokonce učebnici biomatematiky. To by jistě i podle našeho názoru nebylo vhodné, neboť nebyla dosud podána ani základní definice tohoto nového hraničního oboru a nebyl vymezen uspokojivě ani jeho rozsah. V tom smyslu lze dané publikaci vytknout, že její označení neodpovídá plně jejímu obsahu. Pokud bychom vzali za směrodatný název, mohli bychom v publikaci postrádat zejména ty části biomatematiky, které se domníváme, že do ní patří: např. stochastické procesy, kvalitativní analysy, matematicko-logické modely, nehledě k řadě ostatních možností. V podání, které je předkládáno, obsahuje publikace spíše matematickou problematiku biochemie, kromě kapitol VII. a VIII. V tomto smyslu bychom si asi představovali její název, aby lépe odpovídal demonstrovaným příkladům. Částečně lze ovšem vysvětlit tento nedostatek na začátku citovaným rozdělením publikace na dva samostatné svazky. Pro předkládanou publikaci by byl jako základní název vhodnější název prvního svazku tj. *„Simulační techniky a metody v biologii"*, zatím co ostatní nenominálně ohlašované svazky by mohly vykrývat problematiku, na kterou jsme poukazovali.

Poznamenejme ještě, že kniha jest zřejmě psána inženýrskými kádry a programátory, neboť spíše demonstruje vlastní techniku zpracování biologických modelů než matematické odvození uváděných metod. V tom směru lze i souhlasně konstatovat, že z matematického hlediska neobsahuje zřejmě nic podstatně nového. Kladem knihy tedy zůstává jistá demonstrace toho, co bychom i v tomto oboru mohli nazvat „Know-How". Tím je dán i její bezesporný přínos pro určitou část lékařského a biologického výzkumu a jejích technických laboratoří.

*Metoděj K. Chytil*

*Kentaro Yano:* INTEGRAL FORMULAS IN RIEMANNIAN GEOMETRY. Marcel Dekker, New York 1970. Str. X + 156.

Autor — profesor matematiky na technologickém institutu v Tokiu — je přední odborník v diferenciální geometrii ve velkém, zabývá se však též teoretickou fyzikou. Dříve vydal knihy: „Curvature and Betti Numbers" (Princeton 1953, spolu s S. Bochnerem), „Theory of Lie Derivatives and Its Applications" (Amsterdam 1957) a „Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces" (New York 1965).

Nejznámější integrální vzorec diferenciální geometrie je Gaussův-Bonnetův vztah*) mezi totální křivostí oblasti a geodetickou křivostí po její hranici. Je v každé náročnější učebnici klasické diferenciální geometrie, velmi často jako jediná representace geometrie ve velkém. Vede totiž k topologické klasifikaci uzavřených ploch podle Riemannova rodu. Gaussův-Bonnetův vzorec je první v dnes už těžko přehledné řadě integrálních vztahů v globální diferenciální geometrii. Jmenujme za všechny alespoň vzorec, který objevil G. Herglotz v r. 1943 a který mu umožnil velmi elegantní důkaz Cohn-Vossenovy věty, že dvě isometrické vejčité plochy třetí třídy lze ztotožnit pohybem případně zrcadlením.

Studium integrálních vzorců v Riemannově geometrii podnítili S. Bochner a S. S. Chern v polovině čtyřicátých let. Hned Gaussova-Bonnetova relace se dočkala velkého zobecnění: Eulerova-Poincaréova charakteristika kompaktní orientovatelné Riemannovy variety je vyjádřena integrálem přes tuto varietu z jistého výrazu vytvořeného z jejího tensoru křivosti. V této nové oblasti dnes intensivně pracuje velká řada geometrů. Kentaro Yano — sám autor více než třiceti prací z tohoto oboru a beze sporu jeho čelný představitel — shrnul výsledky, publikované většinou jen v časopisech, v monografii, která se stane nepochybně východiskem dalšího studia. Význam takového zpracování zvláště pro zcela mladou disciplínu je naprosto zřejmý. Pro její vývoj a vyvolání zaslouženého zájmu je jistě rozhodující.

Jen heslovitě obsah: Kapitola I patří základním pojmům a vzorcům Riemannovy geometrie. Harmonickým formám a Killingovým vektorovým a tensorovým polím jsou věnovány kapitoly II a IV; v případě Riemannových variet s hranicí pak kapitoly VII a VIII. Tyto čtyři kapitoly souvisí s první autorovou knihou. Kapitola III se týká Riemannových variet připouštějících infinitesimální konformní transformace. Nadplochy v Riemannově prostoru jsou předmětem kapitol V a VI, u kterých bych se zdržel.

V bodě B plochy v obyčejném trojrozměrném prostoru mají křivosti rovinných řezů, procházejících normálou v bodě B, dva extrémy — tzv. hlavní křivosti — anebo jsou všecky stejné; v tomto případě, pokud jsou nenulové, se mluví o kruhovém bodu. Plocha se všemi body kruhovými je ovšem kulová. Podobně se definuje $n - 1$ hlavních křivostí nadplochy v $n$-rozměrném euklidovském prostoru. Její $l$-tou ($l = 1, 2, \ldots, n$) střední křivostí se — až na numerický faktor — rozumí jejich $l$-tá základní symetrická funkce. Pro $n = 3$ už H. Liebmann v r. 1900 a pro $n \geqq 3$ W. Süss v r. 1929 dokázali, že uzavřená konvexní nadplocha s konstantní některou střední křivostí je kulová. Süssův velmi elegantní postup (je založen na základních integrálních vzorcích s opěrnou funkcí, které pro $n = 3$ odvodil už H. Minkowski v r. 1903 a pro $n \geqq 3$ T. Kubota v r. 1925) opakují T. Bonnesen a W. Fenchel ve své knize „Theorie der konvexen Körper" (Berlin 1934;

*) Jeho pojmenování není bez zajímavosti. Geodetickou křivost $g$ — název zavedl J. Liouville v r. 1850 — studoval už Gauss v letech 1822—5 s označením „Seitenkrümmung", kterým později rozuměl $\int g\,ds$. Relaci objevil O. Bonnet v „Mémoires sur la théorie générale des surfaces" z r. 1848. Gaussova účast na ní není jasná. P. Stäckel ve znamenitém pojednání „Gauss als Geometer" z r. 1917 píše (str. 108): „Er hatte dabei (tj. při studiu $\int g\,ds$) wohl die Verallgemeinerung des Satzes von der Winkelsumme des geodätischen Dreiecks im Auge, die später von Bonnet angegeben worden ist." W. Blaschke ve „Vorlesungen über Differentialgeometrie I" z r. 1921 pak říká (str. 108): „Vermutlich hat sie schon Gauss besessen. Daher sprechen manche (sogar französische) Geometer von der Formel von Gauss-Bonnet".

str. 118). Z Fenchelova podnětu pak Süssův výsledek i na nekonvexní nadplochy přenesl C. C. Hsiung v r. 1954.

Ústředním problémem kapitoly VI je otázka, jak dalece je v orientovatelném Riemannově prostoru dimense $n$ mezi orientovatelnými nadplochami charakterizována konstantní první střední křivostí analogie koule — totiž nadplocha, jejíž všecky body jsou kruhové; připomeňme, že v prostoru konstantní křivosti má taková nadplocha konstantní křivost. Bohužel mají tato zobecnění daleko do elegance Süssových a Hsiungových výsledků, neboť vyžadují i nemilé analytické předpoklady, vynucené křivostí prostoru.

Autor používá Ricciho a Cartanův počet. Knihu lze číst i bez znalosti geometrie ve velkém ploch z euklidovského prostoru. Nepochybně však takové vědomosti četbu usnadňují, zvláště když autor při motivaci riemannovských zobecnění je dosti skoupý (v kap. V a VI cituje pouze H. Liebmanna a W. Süsse jako předchůdce v euklidovském případě). Věty z kapitoly VI jsou protějšky k větám o jednoznačném určení plochy — a to jen ve velmi speciálním případě — některou z jejích středních křivostí při situaci v euklidovském prostoru. Měly by jim korespondovat věty o existenci, které však ani pro nadplochy $n$-rozměrného euklidovského prostoru nejsou dnes úplně vyšetřeny. Problematiku o určenosti plochy její střední křivostí formuloval a řešil v obyčejném prostoru s poloměry křivostí místo křivostmi samými první E. B. Christoffel*) v dnes už slavné práci z r. 1865. Obtížnost Christoffelovy tematiky v Riemannových prostorech snad dostatečně zřetelně vystihuje, že přes úsilí řady geometrů v posledních dvou desetiletích je stále na začátku.

*Zbyněk Nádeník*

*E. OE. Wolstenholme:* ELEMENTARY VECTORS. Pergamon Press, Oxford—New York—Toronto—Sydney—Braunschweig, 2. vyd. 1971. Str. 109, obr. 37.

Úvod do vektorového počtu asi na úrovni brožur ze sbírky „Škola mladých matematiků", vydávaných ústředním výborem matematické olympiády. [Letos v této sbírce vychází svazek B. Budinského a S. Šmakala: Vektory v geometrii (Mladá fronta, Praha 1971), který se zaměřením recensované knížce podobá, ale obsahuje rozsáhlejší použití vektorového počtu v geometrii.] Přes pětinu knížky je věnováno mechanice hmotného bodu včetně Keplerových zákonů. Geometrické aplikace končí tečnou křivky a tečnou rovinou plochy. Výklad je velmi tradiční. V textu je řada úplně rozřešených příkladů a mnoho úloh s připojenými výsledky.

*Zbyněk Nádeník*

*D. G. B. Edelen, A. G. Wilson:* RELATIVITY AND THE QUESTION OF DISCRETIZATION IN ASTRONOMY, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York 1970, str. XII & 186, 34 obr., 23 tabulek. Svazek 20 sbírky TRACTS IN NATURAL PHILOSOPHY. Celoplátěná vazba, cena DM 38,—, $ 10,50.

Vznik knihy vděčí náhodě: Matematik Edelen dospěl z teoretických úvah k závěru, že velikosti galaxií jsou kvantizovány do diskretních hodnot. S dotazem, zná-li astronomie numerické hodnoty konfrontovatelné s jeho teoretickými závěry, se obrátil na hvězdáře Wilsona, který byl

*) O významu svého teorému ve vyšší geodézii napsal [J. reine angew. Math. 64 (1865), str. 194]: „In Folge dieses Satzes kann die Gestalt der Fläche $E$ mit jeder beliebigen Genauigkeit bestimmt werden, wenn man im Stande ist, für eine genügende Anzahl von Punkten derselben, über deren gegenseitige Lage keine anderweitigen Angaben erforderlich sind, 1) die sphärischen Coordinaten ihres wahren Zeniths und 2) die Summe der in ihnen stattfindenden Hauptkrümmungshalbmesser zu ermitteln." Na Christoffelovu větu se odvolává ve své knize „Physikalische Geodäsie" (Leipzig 1933, str. 332—333) F. Hopfner, dlouholetý profesor vyšší geodézie na vídeňské technice, který se narodil v Trutnově a studoval na středních a vysokých školách v Praze, kde dosáhl i doktorátu filosofie; byl až do své smrti v r. 1949 jedním z nejvýznamnějších zastánců sblížení geodézie s matematikou.

asi právě jediným, kdo disponoval žádoucí odpovědí. Před dvanácti lety (1950) totiž přednášel v astrofyzikálním semináři o své práci, věnované podobné otázce z hlediska pozorovacích materiálů. Nepublikovaný referát zůstal bez odezvy a Wilson práci založil. Po Edelenově dotazu se za podpory RAND*) Corporation rozvinula spolupráce obou autorů; výsledkem je recenzovaná kniha.

Vstupní stať pohlíží gnoseologicky na dichotomické členění *binárního* (nespojitého) a *polárního* (spojitého) pojímání (*conception*) závěrů z pozorování (*perception*). Binárností se rozumí kontradiktorní soud A vel non A s tertium non datur; naproti tomu polárnost dovoluje přechodné, vyrovnávací (*equator*) charakteristiky mezi polárními extrémy. Na místě Plotinovy (204—270) novoplatonské koncepce posloupnosti v přírodě se tvoří termín *hierarchická struktura*, který je titulem samostatné citované práce**). Dvojice výrazně diskretních hodnot $10^{34}$ a $10^{45}$ určujících průměrnou gramovou hmotu hvězdy a galaxie budí nedůvěru k dostatečnosti termodynamického pohledu přes entropii pro vystižení přírody. Studium kosmologie, jsoucnosti (*entity*) nutí k členění do soustav (*level*) numericky odlišných. V řešení vznikajících otázek spatřují autoři i možnost nalezení klíče k jiným problémům.

Z řady empirických vzorců pro rozložení jasnosti v galaxii se volí formule Hubblova (1930). Po úmluvě, že galaxií se myslí galaxie eliptická (převážně se jedná o galaxiích eliptických a sférických), končí vstupní stať zdůrazněním rozměrové shodnosti fyzikálních objektů (*polárních*) a odpovídajících (*binárních*) matematických modelů.

Vlastní výzkumný přínos knihy je členěn do dvou částí:

První část, věnovaná *teoretickým úvahám*, je rozpracována ve třech kapitolách. Prvá z nich se věnuje ve dvou přístupech studiu kosmických struktur. První přístup (A) vychází z úvah o nehomogenitě a anizotropii ve vesmíru (*externí prostředí*), druhý (B) — umělejší — je motivován snahou postihnout makrostrukturu v závislosti na struktuře lokální (*konsistence interní*).

Kapitola I. A. Relativistická souvislost geometrie s fyzikou a koncentrace vesmírných objektů podněcuje autory uvažovat o nehomogenním prostoročase. Třídě Einsteinových-Riemannových prostorů klasických kosmologických představ se přiřazuje konformně ekvivalentní třída prostorů metriky

$$\mathrm{d}s(h^2) = \exp\{\psi\}\, \mathrm{d}s(g^2)$$

s koeficientem konformity $\psi$, jejichž struktura je zpracována ve standardních učebnicích. Pojetí autorů je motivováno požadavkem na charakteristické hodnoty tenzoru energie a hybnosti a obecně platný výsledek se zjednodušuje zanedbáním součinů dvou a více derivací $\psi$. V takovéto lineární aproximaci se spatřuje první postižení nehomogenity vesmíru. Získaný vztah $\nabla^2\psi = 3R\dot{R}\,\partial_0\psi$, v němž $R(\dot{R})$ se chovají jako hyperbolický kosinus (sinus), je nazván *předstrukturní rovnicí* (prestructure equation). Po přechodu k rovnici $\nabla^2 X_j = -\lambda_j X_j$ se Bochnerovým teoremem (1937) získává podmínka netriviálních řešení

$$\lambda_j = j(j+2)\,; \quad j = 1, 2, 3, \ldots,$$

již lze pojímat jako stupnici nehomogenity. Známý teoretický výsledek (Schwarzschild, Eddington, Tolman, ...) o existenci horní hranice potenciálu kulově souměrné soustavy je doprovozen dvěma tabulkami a hypoteticky vysloven pro vnitřek každé sféry dostatečně velkého poloměru s libovolným středem.

---

*) Research and Development Corporation.

**) Porovnání myšlenkové náplně *hierarchické struktury*, jak je v knize pojímána, s dynamickým pantheismem plotinského pojmu *scala naturae* ukazuje, že jde spíš o záležitost slohovou, než obsahově ontologickou interpretaci filosofického pojmu *εἶδος*.

B. Vystupuje požadavek nalézt rovnice popisující soubor astronomických objektů, z nichž jednotlivé jsou charakterizovány Einsteinovými rovnicemi pole. Podněcuje k tomu okolnost, že optická i radiová pozorování galaxií podávají výsledky superponované z takových objektů (hvězdy, mlhoviny, mezihvězdná hmota). Dospívá se k *operátoru pozorování* (observation operator) vyjadřujícímu pole, jež pozorovatel lokalizovaný v určitém místě čtyřrozměrného světa přisoudí různým světobodům. Po heuristické připomínce přechodu mezi mechanikou kontinua a diskretních bodů se získávají *rovnice souborného pole* (aggregate field equations) s vlastnostmi odlišnými od rovnice Einsteinovy. Výsledek aplikace operátoru pozorování na lokální metrický tenzor je interpretován jako *makroskopický metrický tenzor* a na místě tenzoru hybnosti a energie a Einsteinových rovnic pole nastupují jejich makroskopické pendanty.

Kapitola II. Po orientačním pohledu na třídění galaxií se probírá otázka jejich rovnovážných stavů. Neznalost makroskopického tenzoru energie a hybnosti hledá východisko ve studiu *izoplet*, jimiž se rozumějí jednak obory s konstantní střední hustotou, jednak s konstantní střední světelností, resp. jejich projekce na nebeské pozadí. Druhá kapitola k nim přihlíží z hlediska geometrického (A), fyzikálního (B) a fyzikálně geometrického (C).

A. V prostoročase obecné relativity jsou izoplety zobrazeny trojrozměrnými nadplochami, *světotrubicemi* (world tube). Kalibrace a synchronizace času umožňuje uvažovat pozorovatele vázané na izoplety v průběhu času tak, že s užitím Lieovy derivace se dospěje k reprezentaci prostorové časově *neproměnné* konfigurace. Nevhodnost tohoto popisu pro pojem rovnováhy *vyvíjejícího* se objektu je překonána definováním *geometrické rovnováhy*. Rovnice nutné a dostačující k tomu, aby světotrubice byla vývojovou historií izoplety ve stavu geometrické rovnováhy, vedou k hyperbolickému metrickému prostoru, známému jako prostor statický (Lichnerowicz 1955).

B. Fyzikální charakteristika izoplet se dociluje připuštěním *konečné diskontinuity* ve složkách tenzoru energie a hybnosti s podmínkou Boltzmannova-Smolokowského statického modelu galaxií. Vyplývající nutnost nespojitostí alespoň druhé derivace složek metrického tenzoru je precizována, zavádí se *míra nespojitosti* (jump strength) a formuluje se podmínka řešitelnosti Einsteinových rovnic pole.

C. Spojení úvah z A, B vede k vyjádření nutné a dostačující podmínky k tomu, aby nadplocha byla geometricky rovnovážnou izopletou. Podávají se rovnice (*trace condition* — postulát, *discretization equation* — odvozeno) určující některé vlastnosti míry nespojitosti.

Kapitola III studuje geometrie izoplet ve třech krocích:

A. Zjednodušujících vlastností symetrie se využívá zavedením pomocné trojrozměrné subvariety čtyřrozměrného prostoru s metrikou získanou Kirkwoodem (1963) při studiu experimentálně ověřitelných gravitačních jevů. Závěrem jsou rovnice popisující izoplety kartézskými souřadnicemi trojrozměrného euklidovského světa.

B. Rozbor vedoucí k numerickému vyjádření předchozího závěru je proveden užitím Thomasova (1963) rozšíření Gaussových-Codazziových rovnic na případ konečných nespojitostí ve druhých derivacích. Dospívá se k aproximativnímu — linearizovanému — řešení; druhý a třetí člen rozvoje se podává v dodatku knihy.

C. Teoretické úvahy vrcholí trojparametrickým (dva parametry spojité, jeden celočíselný) tvarovým tříděním (*morphological classification*) galaxií s rotační osou. Teoretické výsledky ilustrované ve 28. obrázcích jsou dokumentovány šesti galaxiemi.

Druhá část po připomínce jak samostatně výzkumného, tak i vzájemně podnětného úkolu i teorie i praxe se zaměřuje na *pozorovací materiál*. Člení se do dvou kapitol, z nichž jedna je věnována obecnému pojetí nespojitostí, jedna konkretním hodnotám.

Kapitola IV hledí ve své prvé části (A) k noetice pojetí nespojitosti jednak jako opaku kontinua, jednak jako opaku libovůle. Tendence tvořit spojité nebo nespojité modely se uvádí do souvislosti s dosažitelnou přesností poznatků. Venerabilis inceptor scholastiky W. Occam (1270—1347) je svou proslulou břitvou příhodně poučným mementem pro výběr pracovních hypotéz: Entia non sunt multiplicanda praeter necessitatem (frustra fit plura, quod fieri potest pauciora). Druhá část (B) se věnuje testům hypotézy nespojitosti se zdůrazněním významu *přesnosti měření* vedle *pracovní metody*. Reminiscence na Bodovu-Titiovu (1766) řadu (Lambert, Wolf) je bezprostředně přirozená. Připomíná se metoda Monte-Carlo, Efronův test s prací Pageovou (1964) a Neymanovo (1961) pojetí kontraverze J. Bertranda a E. Borela.

Kapitola V, členěná do dvou částí, se v prvé (A) zabývá průměry galaxií a ve druhé (B) rudým posuvem.

A. Probírají se potíže vznikající při měření průměrů galaxií v souvislosti s jejich neostrostí. S přihlédnutím k Hubblovým výsledkům (1926) se výběr zkoumaných galaxií podřizuje zdánlivé exentricitě, tabelované v závislosti na exentricitě skutečné a na úhlu rotační osy s pozorovacím směrem. Délkový průměr se vyjadřuje užitím Hubblovy rychlostně distačnční rovnice (úměrnost spektrálního posuvu a vzdálenosti) a po zavedení *synoptického posuvu* (synoptic redshift) se dospívá k vyjádření pozorovatelných úhlových průměrů jednotlivých členů galaktického hnízda v závislosti na celočíselném parametru. Numerické zpracování 31 *jasných galaxií* vyhovujících předpokladům sice *neodpovídá* na otázku, potvrzuje-li jejich výběr stupnice diskretního rozložení hodnot galaktických průměrů z předchozí teorie, ale *nespojitostem nasvědčuje* a teorie sama poskytuje *klasifikační schéma nespojitosti.*

Druhý výběr je proveden šesti *galaktickými hnízdy* (Boo, Com A & B, CrB, Uma I & II). Umožňuje se tak (ovšem pro soubory každého z hnízd odděleně) předpokládat úměru mezi délkovým a úhlovým průměrem objektů. Popisuje se metoda zpracování (*stellarizing!*) exponovaných desek (W. C. Miller, G. Kocher, A. Wilson) získaných 200" reflektorem; připomíná se Vaucoulersův vzorec. Materiál je zpracován statisticky, případy považované za shody s teorií se (co do počtu) srovnávají s náhodně očekávatelným počtem shod. Výsledky mluví (poměr 2,10 až 1,41) ve prospěch teorie.

B. Zavádí se pojem *sdružovacího procesu* $\dot{*}$ (operation of compaction), jímž se prvkům $P_i$ množiny $\{P\}$ prostřednictvím *kompakční posloupnosti* (compaction sequence) $E(i)$ přiřazuje společná hodnota $P_0$

$$P_i \dot{*} E(i) = P_0 \pm \delta$$

s tolerancí $\delta$. Užitím na dřívější výsledky se dospívá k závěru, že rudému posuvu přísluší diskretní struktura. Pro $E(N) = \log(N(N+1))$ se tento závěr osvědčuje na 20 galaktických shlucích z prošetřených 28. Ve zbývajících se shoda dociluje *dvouparametrickým* pohledem $\log(N(N+1)) + \log(M(M+1))$. Uvažuje se o směrovém rozložení galaktických shluků s euklidovsky aproximovatelnou triangulací. Vlivy náhody se vyšetřují zákonem binomického rozložení, dospívá se ke geometrickému *kuboktahedronálnímu* modelu, vyslovují se některé myšlenky kosmogonického charakteru a uzavírá se bezrozměrným vyjádřením kvantovaných veličin v souvislosti se spektrální Sommerfeldovou konstantou jemné struktury $2\pi e^2/(hc)$.

Textová část knihy končí dodatkem rozvádějícím a rozšiřujícím některé pasáže hlavního textu. Poslední stránky jsou autorským a předmětovým ukazatelem. Souborný soupis literatury není, četné literární odkazy (173) jsou roztroušeny v textu*).

---

*) Českého čtenáře potěší citace V. Hlavatého (*The Geometry of Einstein's Unified Field Theory* — 1957), jemuž ostatně v předmluvě (vedle Abbému Lemaîtreovi) děkují autoři za zájem a podporu.

*Kniha je jak získanými výsledky, tak pracovní metodou průkopnicky novým přístupem ke kosmologii, případně kosmogonii.* Podle individuálního zaměření čtenářů stačí tato skutečnost sama o sobě k podvědomému apriornímu vyvolání celé palety přístupů: Od pohrdlivě přehlíživého ke skepticky zdrženlivému, pohodlnicky neutrálnímu a přes kriticky zvídavé i zaujatě dychtivé až po romanticky nadšené. Být pověřeným právním zástupcem kteréhokoliv takového názoru by nebylo těžké; hledat objektivně spravedlivé stanovisko je obtížnější: Publikace shrnuje náročnou formou dlouhodobou výzkumnou práci; nešíří se známými poznatky*), i výsledky dřívějších prací obou autorů jsou uváděny bez rozvádění. To předurčuje *celek* knihy úzce vyhraněným zájmům. Přitom první (*relativistická*) část, nevyžadující speciální zájem o astronomii galaxií, upoutá pracovníky obecné relativity, druhá část (*praktická astronomie*) je přínosným pohledem na statistické vyšetřování eliptických galaxií, aniž by v tom ohledu vyžadovala zostřený zájem o relativitu.

Na nejednom místě je záhodno některé výrazy (*best, cannot, certainly, must, only*) brát s reservou s podtržením kriticky disciplinované formulace jiných míst (*admit, assumption, can, may, suggest, uncertain*), třeba spekulace o stopovatelném důsledku (*crystal like*) struktury původního (*primeval atom*) předexpansního pravesmíru. Se zájmem lze očekávat případné rozhodnutí budoucnosti, jde-li v numerickém zápisu dvojparametrového synoptického posuvu *užitím Sommerfeldovy konstanty* (48.1) o objevitelskou předtuchu nebo o číselnou hříčku. *Celek knihy je podnětnou kumulací svědomité výzkumnické práce vážící vrcholy matematického myšlení s názorovou intuicí živenou nezbytnou tvůrčí fantazií badatele.*

*Karel Mišoň*

*) Referenční knihou je Schouten J. A.: *Ricci-Calculus*, 1954 — s výjimkou str. $56_{10}$.