Adolf Karger

Grundlagen der räumlichen kinematischen Geometrie. II

Aplikace matematiky, Vol. 25 (1980), No. 3, 161–181

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/103849`

GRUNDLAGEN DER RÄUMLICHEN KINEMATISCHEN GEOMETRIE II

ADOLF KARGER

(Eingegangen 5. September 1974)

1. EINFÜHRUNG

Der Artikel ist eine Fortsetzung des Artikels [1] und wird der Analyse und der Synthese der helikoidalen Bewegungen gewidmet.

Im der Analyse der helikoidalen Bewegungen gewidmeten Teil werden die helikoidalen Bewegungen als die Zweischraubenbewegungen charakterisiert und es sind Invarianten der helikoidalen Bewegungen gefunden.

Weiter sind die Beziehungen zwischen den der Zweischraubenbewegung bestimmenden Größen und den Invarianten der Polflächen und den Invarianten der Bewegung gefunden.

Im der Synthese der helikoidalen Bewegungen gewidmeten Teil sind alle helikoidalen Bewegungen, die eine ebene, gerade oder sphärische Trajektorie haben und helikoidale Bewegungen, die eine mit der festen Geraden beständig inzidierende Gerade in dem Gangraum haben, gefunden.

2. ANALYSE DEN HELIKOIDALEN BEWEGUNGEN

Es sei $g(\varphi)$ eine Bewegung mit dem Rastrichtkegel $R(\varphi)$ und mit dem kanonischen Parameter φ. Dann kann man die Frenetschen Formeln in der Form (siehe [1] mit $-\mu_2$ für μ_2)

$$(1)\qquad \begin{aligned} R &= R_1 + vR_2\,, & & \\ R_1' &= \varkappa_1 T_1 + \mu_1 T_2\,, & R_2' &= \varkappa_1 T_2\,, \\ T_1' &= -\varkappa_1 R_1 + \varkappa_2 N_1 - \mu_1 R_2 + \mu_2 N_2\,, & T_2' &= -\varkappa_1 R_2 + \varkappa_2 N_2\,, \\ N_1' &= -\varkappa_2 T_1 - \mu_2 N_2\,, & N_2' &= -\varkappa_2 T_2\,, \end{aligned}$$

wo φ, v, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, μ_1, μ_2 die Invarianten der Bewegung sind, schreiben. (Wir setzen $\varkappa_1 \neq 0$ voraus.) Jeden Vektor $X \in \mathfrak{g}$ können wir gemäß [1] in der Form (x, t), wo x und t Vektoren des dreidimensionalen Vektorraums V_3 sind, schreiben. Bezeichnen wir $(x; t)$ das gewöhnliche Skalarurodukt in V_3 und $x \times t$ das gewöhnliche Vektorprodukt in V_3 (siehe [1]).

Ist $\bar{A}$ ein Punkt in E_3, ist seine Trajektorie $A(\varphi) = g(\varphi)\,\bar{A}$. Der Tangentialvektor dieser Trajektorie ist $A' = RA$. Schreiben wir $R = (x, t)$, gewinnen wir leicht, daß dann $A' = x \times A + t$, wo A der Radiusvektor des Punktes A bedeutet. Analog für den Vektor v gilt $Rv = x \times v$.

Wählen wir einen beliebigen Vektor $X \in \mathfrak{g}$, dann gibt es eine einzige einparametrige Teilgruppe der Gruppe G mit dem Tangentialvektor X (es ist die Schraubenbewegung $g(\varphi)$ um die feste Gerade p und mit festem Parameter v). Finden wir p und v. Schreiben wir $X = (x, t)$ und es sei $(x; x) = 1$. Dann haben wir für die Punkte der Geraden $p \equiv A = x \times t + \lambda x$

$$A' = XA = x \times (x \times t + \lambda x) + t = (x; t)\,x\,.$$

Satz 1. *Es sei $X = (x, t) \in \mathfrak{g}$, $(x; x) = 1$. Dann ist $g(\varphi) = \exp(\varphi X)$ die Schraubenbewegung um die Achse $p \equiv A = x \times t + \lambda x$ mit dem Parameter $v = (x; t)$ und dem Drehungswinkel φ.*

Bemerkung. Das heißt, daß (x, t) die Plückersche Koordinaten von der Achse der zugehörigen Schraubenbewegung sind (siehe [2]). Wenn also $R = (x, t)$ der Richtkegel der Bewegung ist, dann ist $X(\varphi, \lambda) = x(\varphi) \times t(\varphi) + \lambda\, x(\varphi)$ die Gleichung der Polfläche (siehe [1]).

Satz 2. *Es sei $g(\varphi)$ die Bewegung mit den Frenetschen Formeln* (1). *Bezeichnen wir $\mathscr{F} = \{S, e_1, e_2, e_3\}$ das Frenetsche Dreibein der Rastpolfläche* (*siehe* [2]), *so bestimmen die Vektoren R_1, T_1, N_1 die Geraden $S + \lambda e_1$, $S + \lambda e_2$, $S + \lambda e_3$.*

Bemerkung. S ist die Striktionslinie, e_1 ist der Vektor der erzeugenden Gerade, e_2 ist der Vektor der Normale der Polfläche in dem Punkt der Striktionslinie.

Beweis. Wir führen die direkte Ausrechnung mit der Benutzung des Satzes 1 durch.

Satz 3. *Es sei $\mathscr{F} = \{S, e_1, e_2, e_3\}$ das Frenetsche Dreibein der Rastpolfläche. Dann gilt*

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}\varphi} = \mu_2 e_1 + \mu_1 e_3\,, \tag{2}$$

$$e_1' = \varkappa_1 e_2\,, \quad e_2' = -\varkappa_1 e_1 + \varkappa_2 e_3\,, \quad e_3 = -\varkappa_2 e_2\,,$$

und wenn σ der Bogen von dem sphärischen Bild der Rastpolfläche ist, so ist

(3) $$\frac{d\sigma}{d\varphi} = \varkappa_1\,, \quad \frac{\varkappa_2}{\varkappa_1} = k\,, \quad \frac{\mu_1}{\varkappa_1} = d\,, \quad \frac{\mu_2}{\varkappa_1} = q\,,$$

wo k die sphärische Krümmung, d der distributive Parameter und q die übrige Invariante der Rastpolfläche ist (siehe [2]).

Beweis. Wir benützen den Satz 2 und die Formeln (1); z. B. schreiben wir $S' = \alpha e_1 + \beta e_3$, $R_1 . S = 0$ d. h. $R_1' . S + R_1 . S' = (\varkappa_1 T_1 + \mu_1 T_2) S + R_1(\alpha e_1 + \beta e_3) = \mu_1 e_2 + \beta e_1 \times e_3 = 0$ d. h. $\beta = \mu_1$. Die übrigen Beziehungen beweisen wir analog (siehe auch [1]).

Satz 4. *Es sei eine helikoidale Regelfläche mit der Achse o, der erzeugenden Geraden p und dem Parameter v gegeben. Bezeichnen wir α den Winkel von der Achse o und der Geraden p, m den Abstand der Geraden p und o — d. h. den Radius der Fläche. Dann gilt für die Invarianten dieser Fläche*

(4) $$k = \operatorname{cotg} \alpha\,, \quad d = v - m \operatorname{cotg} \alpha\,, \quad q = m + v \operatorname{cotg} \alpha\,.$$

Beweis. Wir führen die direkte Ausrechnung durch (siehe [2]).

Definition 1. *Es seien $p_1 = (x, t)$, $p_2 = (y, s)$ zwei verschiedene nicht parallele Geraden, die durch die Plückerschen Koordinaten gegeben sind. Bezeichnen wir*

$$(x; y) = \cos \vartheta\,, \quad (x; s) + (y; t) = d \sin \vartheta\,,$$

wo ϑ ihr Winkel und d ihr Abstand ist. Es sei $g_1(\varphi_1)$ bzw. $g_2(\varphi_2)$ die Schraubenbewegung um die Achse p_1 bzw. p_2 mit dem Parameter v_1 bzw. v_2 und dem Winkel der Drehung φ_1 bzw. φ_2. Die Bewegung $g(\varphi) = g_1(\varphi_1) . g_2(\varphi_2)$, wo $\varphi_1 = \omega_1\varphi$, $\varphi_2 = \omega_2\varphi$, $\omega_1 \neq 0$, $\omega_2 \neq 0$, ω_1, ω_2 konstant sind, nennen wir die helikoidale Bewegung, die durch $\omega_1, \omega_2, d, \vartheta$ bestimmt wird.

Finden wir die Richtkegel dieser Bewegung. Bezeichnen wir $P_1 = (dg_1/d\varphi_1)\, g_1^{-1}$ $P_2 = (dg_2/d\varphi_2)\, g_2^{-1}$. Dann ist $P_1 = (x, t + v_1 x)$, $P_2 = (y, s + v_2 y)$. Weiter

$$R(\varphi) = (g_1 g_2)' (g_1 g_2)^{-1} = g_1' g_1^{-1} + g_1 . g_2' g_2^{-1} . g_1^{-1} =$$
$$= \operatorname{ad} g_1(g_1' g_2^{-1} + g_2' g_1^{-1}) = \operatorname{ad} g_1(\omega_1 P_1 + \omega_2 P_2)\,.$$

Also gilt

(5) $$R(\varphi) = \operatorname{ad} g_1[\omega_1(x, t + v_1 x) + \omega_2(y, s + v_2 y)]\,,$$

(6) $$\bar{R}(\varphi) = \operatorname{ad} g_2^{-1}[\omega_1(x, t + v_1 x) + \omega_2(y, s + v_2 y)]\,.$$

Da φ der kanonische Parameter ist, muß $\langle R(\varphi), R(\varphi)\rangle = 1$ gelten (siehe [1]), d. h.

(7) $$\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_1\omega_2 \cos \vartheta = 1\,.$$

Weiter setzen wir voraus, daß (7) gilt. Wir können auch $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ ohne die Allgemeinheit einzuschränken voraussetzen.

Nun finden wir die Invarianten der helikoidalen Bewegung. Aus den Beziehungen (5) und (6) sehen wir, daß die Polflächen die helikoidale Regelflächen sind, können wir also ihre Invarianten zufolge des Satzes 4 finden.

Bezeichnen wir

$$Q = \omega_1 P_1 + \omega_2 P_2 = (\omega_1 x + \omega_2 y, \omega_1 t + \omega_2 s + v_1 \omega_1 x + v_2 \omega_2 y) =$$
$$= R(0) = \bar{R}(0) .$$

Für den Parameter v der helikoidalen Bewegung bekommen wir dann

$$v = (\omega_1 x + \omega_2 y; \omega_1 t + \omega_2 s + v_1 \omega_1 x + v_2 \omega_2 y) =$$
$$= v_1 \omega_1^2 + v_2 \omega_2^2 + \omega_1 \omega_2 [d \sin \vartheta + (v_1 + v_2) \cos \vartheta] .$$

Wenn q die erzeugende Gerade der Rastpolfläche und der Gangpolfläche für $\varphi = 0$ ist, haben wir für ihre Plückersche Koordinaten Q_1:
Q_1

$$Q_1 = Q - v(0, \omega_1 x + \omega_2 y) = (\omega_1 x + \omega_2 y, \omega_1 t + \omega_2 s +$$
$$+ (v_1 - v)\,\omega_1 x + (v_2 - v)\,\omega_2 y) ,$$
$$v_1 - v = (v_1 - v_2)\,\omega_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) - \omega_1 \omega_2 d \sin \vartheta ,$$
$$v_2 - v = (v_2 - v_1)\,\omega_1(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta) - \omega_1 \omega_2 d \sin \vartheta .$$

Bezeichnen wir α_1 bzw. α_2 den Winkel von der Geraden q und p_1 bzw. p_2, m_1 bzw. m_2 den Abstand der Geraden q und p_1 bzw. q und p_2. Dann gilt $\alpha_1 - \alpha_2 = \vartheta$, $m_1 - m_2 = d$. Weiter bekommen wir

$$\cos \alpha_1 = (x; \omega_1 x + \omega_2 y) = \omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta , \tag{8}$$
$$\cos \alpha_2 = (y; \omega_1 x + \omega_2 y) = \omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta ,$$
$$\sin \alpha_1 = \omega_2 \sin \vartheta , \quad \sin \alpha_2 = -\omega_1 \sin \vartheta .$$

Weiter

$$m_1 \sin \alpha_1 = (x; \omega_1 t + \omega_2 s + (v_1 - v)\,\omega_1 x + (v_2 - v)\,\omega_2 x) +$$
$$+ (t; \omega_1 x + \omega_2 y) =$$
$$= \omega_2 \sin \vartheta [d \omega_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) + (v_1 - v_2)\,\omega_1 \omega_2 \sin \vartheta] ,$$
$$m_1 = d \omega_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) + (v_1 - v_2)\,\omega_1 \omega_2 \sin \vartheta , \tag{9}$$
$$m_2 = -d \omega_1(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta) + (v_1 - v_2)\,\omega_1 \omega_2 \sin \vartheta .$$

Bezeichnen wir k_1, d_1, q_1 die Invarianten der Rastpolfläche, k_2, d_2, q_2 die Invarianten der Gangpolfläche. Dann gilt

$$k_1 = \operatorname{cotg} \alpha_1 = \frac{\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta}{\omega_2 \sin \vartheta} , \quad k_2 = \operatorname{cotg} \alpha_2 = \tag{10}$$

$$= -\frac{\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta}{\omega_1 \sin \vartheta},$$

$$d_1 = v_1 - m_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = v_1\omega_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) + v_2\omega_1(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta) -$$
$$- d[\omega_1\omega_2 \sin \vartheta + \operatorname{cotg} \vartheta] = d_2,$$

$$q_1 = m_1 + v_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 = d\omega_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) + (v_1 - v_2)\,\omega_1\omega_2 \sin \vartheta +$$
$$+ \frac{v_1(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta)}{\omega_2 \sin \vartheta},$$

$$q_2 = m_2 + v_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = -d\omega_1(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta) + (v_1 - v_2)\,\omega_1\omega_2 \sin \vartheta -$$
$$- \frac{v_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta)}{\omega_1 \sin \vartheta}.$$

Aus den Beziehungen (3) und der Gleichung $k - \bar{k} = \varkappa_1^{-1}$ bestimmen wir nun die Invarianten der Bewegung.

Satz 5. *Für die Invartanten der helikoidalen Bewegung gilt*

$$\text{(11)} \qquad \varkappa_1 = \omega_1\omega_2 \sin \vartheta, \quad \varkappa_2 = \omega_1^2 + \omega_1\omega_2 \cos \vartheta, \quad \bar{\varkappa}_2 = -\omega_2^2 - \omega_1\omega_2 \cos \vartheta,$$
$$v = v_1 w_1^2 + v_2\omega_2^2 + \omega_1\omega_2[d \sin \vartheta + (v_1 + v_2) \cos \vartheta],$$
$$\mu_1 = \omega_1\omega_2[v_1\omega_2 \sin \vartheta(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) + v_2\omega_1 \sin \vartheta(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta) -$$
$$- d\omega_1\omega_2 \sin^2 \vartheta - d \cos \vartheta],$$
$$\mu_2 = \omega_1\omega_2^2 \sin \vartheta[d(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta) + \omega_1(v_1 - v_2) \sin \vartheta] +$$
$$+ v_1\omega_1(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta),$$
$$\bar{\mu}_2 = \omega_1^2\omega_2 \sin \vartheta[-d(\omega_1 + \omega_2 \cos \vartheta) + \omega_2(v_1 - v_2) \sin \vartheta] -$$
$$- v_2\omega_2(\omega_2 + \omega_1 \cos \vartheta).$$

Bemerkung. Beachten wir, daß $\mu_2 - \bar{\mu}_2 = v$ gilt. Endlich bemerken wir, daß die momentanen Bewegungen genau dann Rotationen sind, wenn

$$v_1\omega_1^2 + v_2\omega_2^2 + \omega_1\omega_2[d \sin \vartheta + (v_1 + v_2) \cos \vartheta] = 0$$

d. h. wenn

$$m_2 + v_2 \operatorname{cotg} \alpha_2 = m_1 + v_1 \operatorname{cotg} \alpha_1 \quad \text{ist}.$$

3. SYNTHESE DER HELIKOIDALEN BEWEGUNGEN

Wir werden uns weiter den speziellen Fragen der Synthese der helikoidalen Bewegungen widmen.

Satz 6. *Es sei* $\overline{\mathscr{F}} = \{\bar{S}, \bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ *bzw.* $\mathscr{F} = \{S, e_1, e_2, e_3\}$ *das Frenetsche Dreibein der Gangpolfläche bzw. der Rastpolfläche einer Bewegung* $g(\varphi)$. *Dann gilt* $g(\varphi)\overline{\mathscr{F}}(\varphi) = \mathscr{F}(\varphi)$.

Beweis. Der Satz folgt aus der Gleichung ad $g(\varphi)\,\bar{R}(\varphi) = R(\varphi)$ und deren Ableitungen (siehe [1]).

Es sei nun A Punkt, der fest mit der Rastpolfläche verbunden wird. Dann werden seine Koordinaten $x_1(\varphi)$, $x_2(\varphi)$, $x_3(\varphi)$ im Dreibein $\mathscr{F}(\varphi)$ durch die Beziehung

$$A = S(\varphi) + \sum_{i=1}^{3} x_i(\varphi)\, e_i(\varphi) \tag{12}$$

definiert. Durch Differenzieren der Gleichung (12) nach φ bekommen wir

$$0 = S' + \sum_{i=1}^{3} x_1' e_i + \sum_{i=1}^{3} x_i e_i' = (\mu_2 - \varkappa_1 x_2 + x_1')\, e_1 + (\varkappa_1 x_1 - \varkappa_2 x_3 + x_2')\, e_2 + (\mu_1 + \varkappa_2 x_2 + x_3')\, e_3\,,$$

wo wir die Beziehungen (3) benützt haben.

In folgenden sagen wir, daß die mit der Rastpolfläche fest verbundenen Punkte Rastraum bilden und analog für den Gangraum.

Satz 7. *Es sei* A *bzw.* $\bar{A}$ *ein Punkt des Rast- bzw. Gangraumes mit den Koordinaten* x_i *bzw.* $\bar{x}_i$ *hinsichtlich des Frenetschen Dreibeins* $\mathscr{F}$ *bzw.* $\overline{\mathscr{F}}$. *Dann gilt*

$$x_1' = \varkappa_1 x_2 - \mu_2\,, \quad x_2' = -\varkappa_1 x_1 + \varkappa_2 x_3\,, \quad x_3' = -\varkappa_2 x_2 - \mu_1\,, \tag{13}$$

$$\bar{x}_1' = \varkappa_1 \bar{x}_2 - \bar{\mu}_2\,, \quad \bar{x}_2' = -\varkappa_1 \bar{x}_1 + \bar{\varkappa}_2 \bar{x}_3\,, \quad \bar{x}_3' = -\bar{\varkappa}_2 \bar{x}_2 - \mu_1\,. \tag{14}$$

Satz 8. *Es sei* u *bzw.* $\bar{u}$ *ein Vektor des Rast- bzw. Gangraumes. Bezeichnen wir* u_i *bzw.* $\bar{u}_i$ *seine Koordinaten hinsichtlich des Dreibeins* $\mathscr{F}$ *bzw.* $\overline{\mathscr{F}}$. *Dann gilt*

$$u_1' = \varkappa_1 u_2\,, \quad u_2' = -\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_3\,, \quad u_3' = -\varkappa_2 u_2\,, \tag{15}$$

$$\bar{u}_1' = \varkappa_1 \bar{u}_2\,, \quad \bar{u}_2' = -\varkappa_1 \bar{u}_1 + \bar{\varkappa}_2 \bar{u}_3\,, \quad \bar{u}_3' = -\bar{\varkappa}_2 \bar{u}_2\,. \tag{16}$$

Beweis. Wir benützen den Satz 7 für die sphärische Bewegung.

Satz 9. *Der Punkt* $\bar{X}$ *aus dem Gangraum mit den Koordinaten* $\bar{x}_i$ *in dem Dreibein* $\overline{\mathscr{F}}$ *hat genau dann eine ebene Trajektorie, wenn ein Vektor* $u \neq 0$ *aus dem Rastraum mit den Koordinaten* u_i *in dem Dreibein* $\mathscr{F}$ *existiert so, daß die Gleichungen* (14) *und* 15) *erfüllt sind und es gilt*

$$v u_1 - \bar{x}_3 u_2 + \bar{x}_2 u_3 = 0\,. \tag{17}$$

Beweis. Soll die Trajektorie des Punktes $\bar{X}$ in einer Ebene liegen, muß ihr Tangentialvektor während der ganzen Bewegung senrecht zum festen Vektor sein. Der

Tangentialvektor der Trajektorie des Punktes $\bar{X}$ hat die Koordinaten $v, -\bar{x}_3, \bar{x}_2$ hinsichtlich des Dreibeins $\bar{\mathscr{F}}$.

In folgendem beschränken wir uns auf die helikoidalen Bewegungen, d. h. auf Bewegungen mit konstanten Invarianten. In diesem Fall können wir leicht das allgemeine Integral der Gleichungssysteme (13)–(16) finden.

Satz 10. *Das allgemeine Integral des Gleichungssystems* (13) *im Fall der helikoidalen Bewegung ist*

$$(18) \qquad \begin{aligned} x_1 &= -\omega_1^{-2}\varkappa_2\delta\varphi + \varkappa_2 C + \varkappa_1 C_1 \cos\omega_1\varphi + \varkappa_1 C_2 \sin\omega_1\varphi\,, \\ x_2 &= \omega_1^{-2}\varepsilon - \omega_1 C_1 \sin\omega_1\varphi + \omega_1 C_2\cos\omega_1\varphi\,, \\ x_3 &= -\omega_1^{-2}\varkappa_1\delta\varphi + \varkappa_1 C - \varkappa_2 C_1\cos\omega_1\varphi - \varkappa_2 C_2 \sin\omega_1\varphi\,, \end{aligned}$$

wo $\omega_1^2 = \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2$, $\delta = \varkappa_1\mu_1 + \varkappa_2\mu_2$, $\varepsilon = \varkappa_1\mu_2 - \varkappa_2\mu_1$. C, C_1, C_2 *sind Integrationkonstanten.*

Nun müssen wir einige Vorbereitungsbetrachtungen durchführen. Es sei die Gleichung

$$(19) \qquad A + \sum_{i=1}^{n}\left[A_i\cos\vartheta_i x + B_i \sin\vartheta_i x + x(C_i\cos\vartheta_i x + D_i\sin\vartheta_i x)\right] = 0$$

gegeben, wo ϑ_i, A_i, B_i, C_i, D_i reele Konstanten sind und $\vartheta_i \neq 0$, $|\vartheta_i| \neq |\vartheta_j|$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Wir beweisen, daß die Gleichungen (19) für alle x genau dann erfüllt ist, wenn $A = A_i = B_i = C_i = D_i = 0$ gilt. Setzen wir für x den Wert $-x$ ein, erhalten wir zwei Gleichungen

$$(20) \qquad A + \sum_{i=1}^{n}(A_i\cos\vartheta_i x + xD_i\sin\vartheta_i x) = 0\,,$$

$$(21) \qquad \sum_{i=1}^{n}(B_i\sin\vartheta_i x + xC_i\cos\vartheta_i x) = 0\,.$$

Durch Differenzieren (21) bekommen wir

$$\sum_{i=1}^{n}\left[(\vartheta_i B_i + C_i)\cos\vartheta_i x - \vartheta_i x C_i \sin\vartheta_i x\right] = 0\,.$$

Legen wir $\vartheta_i B_i + C_i = E_i$, $\vartheta_i C_i = F_i$ und nehmen wir die $2m$-te Ableitung in dem Punkt $x = 0$, erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n}(E_i\vartheta_i^{2m} + 2mF_i\vartheta_i^{2m-1}) = 0\,.$$

Für $m = 0, \ldots, 2n - 1$ erhält man das System von $2n$ Gleichungen für die Unbekannten E_i, F_i. Wenn $W = |a_k^j|$ die Determinante von diesem Gleichungsystem ist, ist $a_k^j = \vartheta_k^{2(j-2)}$ für $1 \leqq k \leqq n$, $1 \leqq j \leqq 2n$ und $a_k^j = 2(j-1)\,\vartheta_{k-n}^{2(j-1)-1}$, $n +$

$+ 1 \leqq k \leqq 2n$, $1 \leqq j \leqq 2n$ und wir finden leicht, daß $W \neq 0$ gilt. Also bekommen wir $E_i = F_i = 0$, d. h. $C_i = B_i = 0$.

Durch Differenzieren der Gleichung (20) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} [(-\vartheta_i A_i + D_i) \sin \vartheta_i x + x\vartheta_i D_i \cos \vartheta_i x] = 0$$

und analog wie in (21) haben wir $D_i = A_i = 0$ und aus (20) bekommen wir $A = 0$.

Betrachten wir nun die Gleichung

$$\begin{aligned} &a + b \cos \omega_1 x + c \sin \omega_1 x + d \cos \omega_2 x + e \sin \omega_2 x + \\ &+ f \cos \omega_1 x \sin \omega_2 x + g \sin \omega_1 x \cos \omega_2 x + \\ &+ h \cos \omega_1 x \cos \omega_2 x + l \sin \omega_1 x \sin \omega_2 x = 0\,, \end{aligned} \tag{22}$$

wo $\omega_1 > 0$, $\omega_2 > 0$ und untersuchen unter welchen Umständen die Gleichung (22) für alle x erfüllt ist. Nach einer Umformung bekommen wir

$$\begin{aligned} &2a + 2b \cos \omega_1 x + 2c \sin \omega_1 x + 2d \cos \omega_2 x + 2e \sin \omega_2 x + \\ &+ (f + g) \sin \omega_3 x - (f - g) \sin \omega_4 x + \\ &+ (h + l) \cos \omega_4 x + (h - l) \cos \omega_3 x = 0\,, \end{aligned} \tag{23}$$

wo $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$, $\omega_4 = \omega_1 - \omega_2$.

Diese Gleichung (23) kann eine nichttriviale Lösung nur in dem Fall haben, wenn $\omega_i = \pm \omega_j$, für irgendeine $i, j = 1, \ldots, 4$ gilt. Diese Bedingungen kann man nur für $\omega_1 = \omega_2$ oder $\omega_1 = 2\omega_2$ oder $\omega_2 = 2\omega_1$ erfüllen. Einzige Fälle sind

a) $W \neq 0$. Dann ist $\omega_1 \neq \omega_2$ und $\omega_1 \neq 2\omega_2$ und $\omega_2 \neq 2\omega_1$. Es ist

$$a = b = c = d = e = f = g = h = l = 0\,. \tag{24}$$

b) $\omega_1 = \omega_2$. Dann gilt

$$a + h = b + d = l - h = c + e = f + g = 0\,. \tag{25}$$

c) $\omega_2 = 2\omega_1$. Dann gilt

$$a = d = e = b + h = c - g = l - h = f + g = 0\,. \tag{26}$$

d) $\omega_1 = 2\omega_2$. Dann gilt

$$a = b = c = d + h = e - f = l - h = f + g = 0\,. \tag{27}$$

Nun kann man die Gleichung (17) lösen. Für die Koordinaten $\bar{x}_i$ $(i = 1, 2, 3)$ des Punktes $\bar{X} = \bar{S} + \sum_{i=1}^{3} \bar{x}_i \bar{e}_i$ des Gangraums erhält man zufolge (18)

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= -\omega_2^{-2} \bar{\varkappa}_2 \bar{\delta} \varphi + \bar{\varkappa}_2 \bar{C} + \varkappa_1 \bar{C}_1 \cos \omega_2 \varphi + \varkappa_1 \bar{C}_2 \sin \omega_2 \varphi\,, \\ \bar{x}_2 &= \omega_2^{-2} \bar{\varepsilon} - \omega_2 \bar{C}_1 \sin \omega_2 \varphi + \omega_2 \bar{C}_2 \cos \omega_2 \varphi\,, \end{aligned} \tag{28}$$

$$\bar{x}_3 = -\omega_2^{-2}\varkappa_1\bar{\delta}\varphi + \varkappa_1\bar{C} - \bar{\varkappa}_2\bar{C}_1 \cos \omega_2\varphi - \bar{\varkappa}_2\bar{C}_2 \sin \omega_2\varphi \,,$$

wo

$$\omega_2^2 = \varkappa_1^2 + \bar{\varkappa}_2^2 \,, \quad \bar{\delta} = \varkappa_1\mu_1 + \bar{\varkappa}_2\bar{\mu}_2 \,, \quad \bar{\varepsilon} = \varkappa_1\bar{\mu}_2 - \bar{\varkappa}_2\mu_1 \,. \; \bar{C}, \bar{C}_1, \bar{C}_2$$

die Integrationskonstanten sind.

Die Koordinaten u_i, $i = 1, 2, 3$ des Vektors $u = \sum_{i=1}^{3} u_i e_i$ des Rastsystems haben wir für eine zweckmäßige Wahl des Parameters φ in der Form

(29)
$$\begin{aligned} u_1 &= \varkappa_2 C + C_1\varkappa_1 \cos \omega_1\varphi \,, \\ u_2 &= -\omega_1 C_1 \sin \omega_1\varphi \,, \\ u_3 &= \varkappa_1 C - \varkappa_2 C_1 \cos \omega_1\varphi \,. \end{aligned}$$

Die Gleichung (17) wird die Form

(30)
$$\begin{aligned} &v(\varkappa_2 C + C_1\varkappa_1 \cos \omega_1\varphi) + (-\omega_2^{-2}\varkappa_1\bar{\delta}\varphi + \varkappa_1\bar{C} - \bar{\varkappa}_2\bar{C}_1 \cos \omega_2\varphi - \\ &\quad - \bar{\varkappa}_2\bar{C}_2 \sin \omega_2\varphi)\, \omega_1 C_1 \sin \omega_1\varphi + (\omega_2^{-2}\bar{\varepsilon} - \omega_2\bar{C}_1 \sin \omega_2\varphi + \\ &\quad + \omega_2\bar{C}_2 \cos \omega_2\varphi)\,(\varkappa_1 C - \varkappa_2 C_1 \cos \omega_1\varphi) = 0 \end{aligned}$$

haben. Für die Koeffizienten der Gleichung (19) analog zu (22) erhält man die Darstellung

$$\begin{aligned} &a = C\omega_2^{-2}(v\varkappa_2\omega_2^2 + \bar{\varepsilon}\varkappa_1) \,, \quad b = C_1\omega_2^{-2}(v\varkappa_1\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_2) \,, \quad c = \varkappa_1\omega_1 C_1\bar{C} \,, \\ &d = \varkappa_1\omega_2 C\bar{C}_2 \,, \quad e = -\varkappa_1\omega_2 C\bar{C}_1 \,, \quad f = \varkappa_2\omega_2 C_1\bar{C}_1 \,, \\ &g = -\omega_1\bar{\varkappa}_2 C_1\bar{C}_1 \,, \quad h = -\varkappa_2\omega_2 C_1\bar{C}_2 \,, \quad l = -\omega_1\bar{\varkappa}_2 C_1\bar{C}_2 \,. \end{aligned}$$

Das Glied $-\varphi\omega_2^{-2}\varkappa_1\bar{\delta}\omega_1 C_1 \sin \omega_1\varphi$ bleibt übrig.

i) $\bar{\delta} \neq 0$. Dann ist $C_1 = 0$, $C \neq 0$. Daraus folgt $b = c = f = g = h = l = 0$. In allen Fällen a) ... d) muß dann auch $a = d = e = 0$ gelten. Diese drei Gleichungen haben die Lösung

$$v\varkappa_2\omega_2^2 + \bar{\varepsilon}\varkappa_1 = 0 \,, \quad \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0 \,.$$

Die Punkte, die eine ebene Trajektorie haben, liegen auf der Geraden mit den Gleichungen

$$\bar{x}_2 = -v\varkappa_2/\varkappa_1 \,.\, \omega_2^2/\omega_1^2 \,, \quad \varkappa_1\bar{x}_1 - \bar{\varkappa}_2\bar{x}_3 = 0 \,.$$

ii) $\bar{\delta} = \varkappa_1\mu_1 + \bar{\varkappa}_2\bar{\mu}_2 = 0$. Man soll die Gleichungen (24)–(27) lösen. In allen Fällen muß $f + g = l - h = 0$ gelten. Diese zwei Gleichungen haben die Form $C_1\bar{C}_2 = C_1\bar{C}_1 = 0$. Wenn $C_1 = 0$ gilt, erhält man den vorhergehenden Fall mit $\bar{\delta} = 0$. Also kann man $C_1 \neq 0$ voraussetzen. Dann ist $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$, so daß $f = g = h = l = 0$ gilt. Weiter gilt $d = e = 0$, so daß $a = b = c = 0$ d. h.

$$\bar{C} = 0 \,, \quad v\varkappa_1\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_2 = C(v\varkappa_2\omega_2^2 + \bar{\varepsilon}\varkappa_1) = 0$$

in allen Fällen a) ... d) gelten muß.

Nun unterscheiden wir zwei Fälle

iiα) $C \neq 0$. Gleichungen

$$\bar{\delta} = v\varkappa_1\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_2 = v\varkappa_2\omega_2^2 + \bar{\varepsilon}\varkappa_1 = 0$$

geben uns $v = \mu_1 = \mu_2 = 0$. Der Punkt $\bar{X}$ ist der feste Mittelpunkt der Sphäre bei der sphärischen Bewegung.

iiβ) $C = 0$. Die Gleichungen $\bar{\delta} = v\varkappa_1\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_2 = 0$ geben uns

$$\mu_2 = \varkappa_1(\mu_1 + v\varkappa_1) + v\,, \quad \varkappa_2(\mu_1 + v\varkappa_1) = v\varkappa_1\,.$$

Schießlich erhält man also die folgenden drei Fälle der helikoidalen Bewegung mit der ebenen Trajektorie:

1) $C_1 = \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0\,, \quad v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon} = 0\,.$

2) $C = \bar{C} = \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0\,, \quad \bar{\delta} = v\varkappa_1\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_2 = 0\,.$

3) Die sphärische Bewegung, $\bar{C} = \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = v = \mu_1 = \mu_2 = 0$.

Betrachten wir weiter die Lage der Punkte $\bar{X}$. $\bar{X}$ sind die Punkte, für welche $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ ist.

Diese Punkte haben die Koordinaten

$$(31) \qquad \bar{x}_2 = \frac{\bar{\varepsilon}}{\omega_2^2} = \frac{\varkappa_1\bar{\mu}_2 - \bar{\varkappa}_2\mu_1}{\varkappa_1^2 + \bar{\varkappa}_2^2} = \frac{\varkappa_1^2 q_2 - \varkappa_1^2 k_2 d_2}{\varkappa_1^2 + \varkappa_1^2 k_2^2} = \frac{q_2 - k_2 d_2}{1 + k_2^2} =$$

$$= \frac{m_2 + v_2 \operatorname{cotg}\alpha_2 - \operatorname{cotg}\alpha_2(v_2 - m_2 \operatorname{cotg}\alpha_2)}{1 + \operatorname{cotg}^2\alpha_2} = m_2\,, \frac{\bar{x}_1}{x_3} = \frac{\bar{\varkappa}_2}{\varkappa_1} = k_2 = \operatorname{cotg}\alpha_2\,,$$

wo wir die Gleichung (4) für die Gangpolfläche benützt haben. Aus diesen Beziehungen sehen wir gleich, daß $\bar{X}$ die Punkte der Achse der Gangpolfläche sind.

Beachten wir noch, daß

$$(32) \qquad \frac{\bar{\delta}}{\omega_2^2} = \frac{\varkappa_1\mu_1 + \bar{\varkappa}_2\bar{\mu}_2}{\omega_2^2} = \frac{\varkappa_1^2(d_2 + k_2 q_2)}{\varkappa_1^2(1 + k_2^2)} = v_2\,.$$

In folgendem finden wir die Gleichungen der zugehörigen ebenen Kurven. Zuerst müssen wir die Gleichung der Rastpolfläche finden, d. h. die Frenetsche Formeln (2) lösen. Der Vektorteil der Formeln (2) ist formal dem System (15) gleich, so daß die Lösung

$$(33) \qquad \begin{aligned} e_1 &= \frac{\varkappa_2}{\omega_1} f_1 + \frac{\varkappa_1}{\omega_1} f_2 \cos\omega_1\varphi + \frac{\varkappa_1}{\omega_1} f_3 \sin\omega_1\varphi\,, \\ e_2 &= -f_2 \sin\omega_1\varphi + f_3\cos\omega_1\varphi\,, \\ e_3 &= \frac{\varkappa_1}{\omega_1} f_1 - \frac{\varkappa_2}{\omega_1} f_2 \cos\omega_1\varphi - \frac{\varkappa_2}{\omega_1} f_3 \operatorname{s n}\omega_1\varphi \end{aligned}$$

sein wird, wo $\{f_1, f_2, f_3\}$ eine feste orthonormierte Basis in dem Rastraum ist.

Die Gleichung für $\mathrm{d}S/d\varphi$ bekommt die Form

$$\mathrm{d}S/\mathrm{d}\varphi = \mu_2 e_1 + \mu_1 e_3 = \omega_1^{-1}[\delta f_1 + \varepsilon f_2 \cos \omega_1 \varphi + \varepsilon f_3 \sin \omega_1 \varphi]$$

so daß

$$S = A_0 + \omega_1^{-2}[\omega_1 \delta \varphi f_1 + \varepsilon f_2 \sin \omega_1 \varphi - \varepsilon f_3 \cos \omega_1 \varphi] . \tag{34}$$

Die Trajektorie $X(\varphi)$ des Punktes $\bar{X}$, wenn wir $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ betrachten, wird in dem Dreibein $\mathscr{R}_0 = \{A_0, f_1, f_2, f_3\}$ die Form $X(\varphi) = S + \sum_{i=1}^{3} \bar{x}_i e_i = A_0 + \sum_{i=1}^{3} y_i f_i$ haben, wo

$$\bar{x}_1 = \bar{\varkappa}_2 \bar{C} - \omega_2^{-2} \bar{\delta} \varphi \bar{\varkappa}_2 , \quad \bar{x}_2 = \omega_2^{-2} \bar{\varepsilon} , \quad \bar{x}_3 = \varkappa_1 \bar{C} - \omega_2^{-2} \bar{\delta} \varphi \varkappa_1 ,$$

so daß

$$y_1 = \omega_1^{-1} \omega_2^{-2}[\omega_2^2 \delta \varphi + (\bar{C} \omega_2^2 - \bar{\delta} \varphi)(\varkappa_2 \bar{\varkappa}_2 + \varkappa_1^2)] ,$$

$$y_2 = \omega_1^{-2} \omega_2^{-2}[(\varepsilon \omega_2^2 - \bar{\varepsilon} \omega_1^2) \sin \omega_1 \varphi - \omega_1(\bar{C} \omega_2^2 - \bar{\delta} \varphi) \varkappa_1 \cos \omega_1 \varphi] ,$$

$$y_3 = \omega^{-2}_1 \omega_2^{-2}[-(\varepsilon \omega_2^2 - \bar{\varepsilon} \omega_1^2) \cos \omega_1 \varphi - \omega_1(\bar{C} \omega_2^2 - \bar{\delta} \varphi) \varkappa_1 \sin \omega_1 \varphi] .$$

Betrachten wir nun einzelne Fälle:

1) $v \varkappa_2 \omega_2^2 + \varkappa_1 \bar{\varepsilon} = 0$.

Setzen wir aus dieser Gleichung in y_1 ein, erhalten wir $y_1 =$ Konst. Die Trajektorie ist wirklich eben und seine Ebene ist senkrecht zur Achse der Rastpolfläche. f_1 hat die Richtung der Achse der Rastpolfläche. Wenn $\bar{\delta} \neq 0$ nun gilt, kann man den Parameter φ so ändern, daß die Gleichungen für y_2 und y_3 die Form

$$y_2 = M \sin \omega_1 \varphi + N \varphi \cos \omega_1 \varphi , \quad y_3 = -M \cos \omega_1 \varphi + N \varphi \sin \omega_1 \varphi$$

haben, was die Darstellung der allgemeinen Evolvente ist. Für die Bewegung muß $v_1/\sin \alpha_2 - v_2 \cos \vartheta/\sin \alpha_1 = 0$ gelten.

Wenn $\bar{\delta} = 0$ d. h. $v_2 = 0$ ist, bekommen wir den Kreis vom Radius $\varrho = (d^2 + (\bar{C}^2 \varkappa_1^2)/(\omega_1^2 \omega_2^4))^{1/2}$, die Gangpolfläche ist das Rotationshyperboloid.

2) $\bar{\delta} = 0$, $v \varkappa_1 \omega_2^2 - \varkappa_2 \bar{\varepsilon} = 0$.

Die Gangpolfläche ist ein Rotationshyperboloid und der Punkt, der eine ebene Trajektorie hat, ist sein Mittelpunkt. Dann $\varepsilon \omega_2^2 - \bar{\varepsilon} \omega_1^2 = 0$, der Mittelpunkt der Gangpolfläche hat Trajektorie $y_1 = \omega_1^{-1} \delta \varphi$, $y_2 = y_3 = 0$, was eine Gerade ist – die Achse der Rastpolfläche. Für die Bewegung muß $v_2 = 0$, $m_1 = m_2$ d. h. $d = 0$ gelten.

Satz 11. *Die helikoidale Bewegung hat nur in folgenden drei Fallen eine ebene Trajektorie*

1) $v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon} = 0$.

Alle Punkte, die auf der Achse der Gangpolfläche liegen, haben eine ebene Trajektorie. Diese Trajektorie ist für $\bar{\delta} \neq 0$ eine allgemeine Evolvente in der Ebene, die senkrecht auf die Achse der Rastpolfläche steht. Wenn $\bar{\delta} = 0$, ist die Rastpolfläche ein Rotationshyperboloid und alle Punkte, die auf seiner Achse liegen, zeichnen den Kreis.

2) $v\varkappa_1\omega_2^2 - \varkappa_2\bar{\varepsilon} = 0$, $\quad \bar{\delta} = 0$.

Die Gangpolfläche ist ein Rotationshyperboloid und die Polflächenachsen schneiden sich gemeinsam. Die Gangpolflächenmittelpunkt zeichnent die Achse der Rastpolfläche als seine Trajektorie d. h. die Trajektorie ist eine Gerade.

3) *Der Mittelpunkt der Sphäre hat eine Punkttrajektorie bei der sphärischen Bewegung.*

Beachten wir noch den Fall 1). Die ebenen Trajektorien werden genau dann in derselben Ebene liegen, wenn $y_1 = \bar{C}\omega_2^2(\varkappa_2\bar{\varkappa}_2 + \varkappa_1^2) = 0$. Mit Rücksicht auf die Geltung der Gleichung $\omega_2^2\delta - \bar{\delta}(\varkappa_2\bar{\varkappa}_2 + \varkappa_1^2) = 0$ muß $\delta = 0$ sein. Wir bekommen also

$$\delta = v_1 = 0\,, \quad \varkappa_2/\varkappa_1 \,.\, \bar{\varkappa}_2/\bar{\varkappa}_1 = k_1 \,.\, k_2 = \operatorname{cotg}\alpha_1 \,.\, \operatorname{cotg}\alpha_2 = -1\,.$$

Satz 12. *Die helikoidale Bewegung hat eine Gerade, die eine ebene Trajektorie zeichnet nur in dem Fall $v_1 = 0$, $k_1k_2 = -1$. Die Rastpolfläche ist dann ein Rotationshyperboloid, die Achse der Gangpolfläche liegt stets in einer Ebene, die senkrecht zu der Rastpolflächenachse steht. Die Achsen der Polflächen stehen senkrecht aufeinander.*

Satz 13. *Die helikoidale Bewegung hat nur in folgenden Fällen eine Ebene, die durch einen festen Punkt geht:*

1) $v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon = 0$.

Wenn $k_1k_2 \neq -1$ ist, bilden diese Ebenen ein einparametriges System und stehen senkrecht zu der Achse der Gangpolfläche.

Wenn $k_1k_2 = -1$ ist, ist diese Ebene einzig und sie hüllt eine Gerade ein.
Die Gangpolfläche ist in diesem Fall das Rotationshyperboloid und die erwähnte Ebene steht senkrecht zu seiner Achse und geht durch seinen Mittelpunkt.

2) $\delta = 0$, $\quad v\varkappa_1\omega_1^2 - \bar{\varkappa}_2\varepsilon = 0$.

Die Rastpolfläche ist ein Rotationshyperboloid, die Achsen schneiden sich einander und jede, diese Achse der Rastpolfläche enthaltende, Ebene enthält auch diesen Schnittpunkt.

3) *Die Bewegung ist sphärisch. Jede durch den Mittelpunkt der Sphäre gehende Ebene enthält diesen Mittelpunkt.*

Der Satz 13 bestimmt gleichzeitig in den Fällen 2) und 3) alle helikoidale Bewegungen, die die stets durch ein festen Punkt gehende Gerade haben. Im Fall 2) ist es die Achse der Gangpolfläche, 3) ist trivial.

Satz 14. *Helikoidale Bewegungen, bei welchen eine Ebene eine Gerade einhüllt, sind genau alle Bewegungen mit den Eingeschaften*

$$v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon = 0\,, \quad k_1k_2 = -1\,(\varkappa_2\bar{\varkappa}_2 + \varkappa_1^2 = 0)\,.$$

Die Gangpolfläche ist ein Rotationshyperboloid und die Ebene, die senkrecht auf seine Achse steht und durch seinen Mittelpunkt geht, hüllt die Achse der Rastpolfläche ein.

Beweis für Sätze 13 und 14. Wenn $g(\varphi)$ eine Bewegung ist, definiert man die inverse Bewegung $g^{in}(\tau)$ durch $g^{in}(\tau) = g^{-1}(-\varphi)$. Für Invarianten der inversen Bewegung gilt dann

$$v = v^{in}\,, \quad \varkappa_1 = \varkappa_1^{in}\,, \quad \mu_1 = \mu_1^{in}\,, \quad \varkappa_2 = -\bar{\varkappa}_2^{in}\,, \quad \mu_2 = -\bar{\mu}_2^{in}\,,$$
$$\bar{\varkappa}_2 = -\varkappa_2^{in}\,, \quad \bar{\mu}_2 = -\mu_2^{in}\,.$$

Der beweis folgt nun aus den Sätzen 11 und 12.

Betrachten wir noch den speziellen Fall der sphärischen Bewegung. Die Fälle 2) und 3) sind trivial. Für den Fall 1) ist die Gleichung immer erfüllt, d. h. jede zyklische sphärische Bewegung hat eine ebene Trajektorie und es ist die Trajektorie des Mittelpunktes der Gangpolkurve. Ebene Trajektorien sind also zwei gegenüberliegende Kreise bzw. ein einziger Großkreis für $k_1k_2 = -1$

Übergehen wir zu inversen Bewegungen, dann sehen wir, daß jede zyklische sphärische Bewegung genau zwei Kreise mit einer Punkthülle wenn $k_1k_2 \neq -1$ und genau einen solchen Kreis für $k_1k_2 = -1$ hat.

Weiter werden wir helikoidale Bewegungen betrachten, welche die auf einer Kugel liegende Trajektorie haben. Den Fall der sphärischen Bewegung scheiden wir als trivial aus.

Es sei also X bzw. $\bar{X}$ ein Punkt aus dem Rast- bzw. Gangraum, schreiben wir $X = S + \sum_{i=1}^{3} a_ie_i$, $\bar{X} = \bar{S} + \sum_{i=1}^{3} \bar{x}_i\bar{e}_i$. Der Punkt $\bar{X}$ hat eine sphärische Trajektorie genau dann, wenn ein Punkt X existiert so, daß $(v_{\bar{X}}, \bar{X} - X) = 0$, d. h.

$$v(\bar{x}_1 - a_1) - \bar{x}_3(\bar{x}_2 - a_2) + \bar{x}_2(\bar{x}_3 - a_3) = 0$$

für die Geschwindigkeit $v_{\bar{x}}$ des Punktes $\bar{X}$ gilt.

Satz 15. *Punkt $\bar{X}$ aus dem Gangraum hat eine sphärische Trajektorie genau dann, wenn ein Punkt X aus dem Rastraum existiert so, daß*

$$v(a_1 - \bar{x}_1) - a_2\bar{x}_3 + a_3\bar{x}_2 = 0 \tag{35}$$

gilt.

Nach der Einsetzung aus (18) und (28) erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} v(\varkappa_2 C - \omega_1^{-2}\delta\varphi\varkappa_2 + \varkappa_1 C_1 \cos\omega_1\varphi - \bar{\varkappa}_2\bar{C} + \omega_2^{-2}\bar{\delta}\varphi\bar{\varkappa}_2 - \varkappa_1\bar{C}_1 \cos\omega_2\varphi - \\ - \varkappa_1\bar{C}_2 \sin\omega_2\varphi) + (-\omega_1^{-2}\varepsilon + \omega_1 C_1 \sin\omega_1\varphi)\,. \\ .\,(\varkappa_1\bar{C} - \omega_2^{-2}\bar{\delta}\varphi\varkappa_1 - \bar{\varkappa}_2\bar{C}_1 \cos\omega_2\varphi - \bar{\varkappa}_2\bar{C}_2 \sin\omega_2\varphi) + \\ + (\varkappa_1 C - \omega_1^{-2}\delta\varphi\varkappa_1 - \varkappa_2 C_1 \cos\omega_1\varphi)\,. \\ .\,(\omega_2^{-2}\bar{\varepsilon} - \omega_2 C_1 \sin\omega_2\varphi + \omega_2 C_2 \cos\omega_2\varphi) = 0\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Für die Koeffizienten der Gleichung (22) bekommt man

$$\begin{aligned} &a = C\omega_2^{-2}(v\varkappa_2\omega_2^2 + \bar{\varepsilon}\varkappa_1) - \bar{C}\omega_1^{-2}(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon)\,, \\ &b = C_1\omega_2^{-2}(v\varkappa_1\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_2)\,, \quad c = \omega_1\varkappa_1\bar{C}C_1\,, \\ &d = \bar{C}_1\omega_1^2(-v\varkappa_1\omega_1^2 + \varepsilon\bar{\varkappa}_2) + \varkappa_1\omega_2 C\bar{C}_1\,, \\ &e = \bar{C}_2\omega_1^{-2}(-v\varkappa_1\omega_1^2 + \varepsilon\bar{\varkappa}_2) - \varkappa_1\omega_2 C\bar{C}_1\,, \quad f = \varkappa_2\omega_2 C_1\bar{C}_1\,, \\ &g = -\omega_1\bar{\varkappa}_2 C_1\bar{C}_1\,, \quad h = -\varkappa_2\omega_2 C_1\bar{C}_2\,, \quad l = -\omega_1\bar{\varkappa}_2 C_1\bar{C}_2\,. \end{aligned}$$

Dann bleibt das Glied

$$\begin{aligned} A = \varphi\{\omega_1^{-2}\omega_2^{-2}[-\delta(v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon}) + \bar{\delta}(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon)] - \\ - \omega_1\omega_2^{-2}\bar{\delta}\varkappa_1 C_1 \sin\omega_1\varphi + \omega_1^{-2}\omega_2\delta\varkappa_1\bar{C}_1 \sin\omega_2\varphi - \\ - \omega_1^{-2}\omega_2\delta\varkappa_1\bar{C}_2 \cos\omega_2\varphi\}\,. \end{aligned}$$

In allen vier Fällen muß $f + g = h - l = 0$ gelten, d. h.

$$C_1\bar{C}_1(\omega_2\varkappa_2 - \omega_1\bar{\varkappa}_2) = C_1\bar{C}_2(\omega_2\varkappa_2 - \omega_1\bar{\varkappa}_2) = 0\,.$$

Dabei führt die Gleichung $\omega_2\varkappa_2 - \omega_1\bar{\varkappa}_2 = 0$ zu der Beziehung $\varkappa_2 = \bar{\varkappa}_2$, die man nicht erfüllen kann. Also gilt $C_1\bar{C}_1 = C_1\bar{C}_2 = 0$ und daraus folgt $h = l = g = f = 0$. Es sei weiter $b + d = c + l = 0$. Unterscheiden wir zwei Fälle:

α) $C_1 = 0$. Dann $b = c = 0$ d. h. auch $d = e = 0$.

β) $C_1 \neq 0$. Dann $\bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$ d. h. $d = e = 0$, so daß auch $b = c = 0$. Also muß $a = b = c = d = e = 0$ in allen Fällen gelten. Im ganzen bekommen wir das System der Gleichungen

(37)

$$C_1\bar{C}_1 = C_1\bar{C}_2 = C_1\bar{C} = 0\,, \quad \delta C_1 - \delta\bar{C}_1 = \delta\bar{C}_2 = 0\,,$$
$$\delta(v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon}) - \bar{\delta}(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon) = 0\,,$$
$$C\omega_1^2(v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon}) - \bar{C}\omega_2^2(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon) = 0\,,$$
$$C_1(v\varkappa_1\omega_2^2 - \varkappa_2\bar{\varepsilon}) = 0\,,$$
$$\bar{C}_1(-v\varkappa_1\omega_1^2 + \bar{\varkappa}_2\varepsilon) + \varkappa_1\omega_1^2\omega_2 C\bar{C}_2 = 0\,, \qquad (\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2)\,C = 0\,,$$
$$\bar{C}_2(-v\varkappa_1\omega_1^2 + \bar{\varkappa}_2\varepsilon) - \varkappa_1\omega_1^2\omega_2 C\tilde{C}_1 = 0\,, \quad \sim \quad (\bar{C}_1^2 + \bar{C}_2^2)\,(-v\varkappa_1\omega_1^2 + \bar{\varkappa}_2\varepsilon) =$$

wo wir das Glied A mit der Hilfe der Gleichung (19) analog als oben analisierten. Eine nicht triviale Lösung des Systems (37) bekommt man nur im Fall $C_1 = \bar{C}_1 = \bar{C}_2 = 0$. Dann

$$C\omega_1^2(v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon}) - \bar{C}\omega_2^2(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon) = 0\,.$$

Für die Bewegung muß $\delta(v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon}) - \bar{\delta}(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon) = 0$ gelten, d. h. $v_1(vk_1 + m_2) - v_2(vk_2 + m_1) = 0$, wenn wir (31) und (32) benützen.

Satz 16. *Eine helikoidale Bewegung, die nicht sphärisch ist, hat genau dann eine sphärische Trajektorie, wenn*

$$\delta(v\varkappa_2\omega_2^2 + \varkappa_1\bar{\varepsilon}) - \bar{\delta}(v\bar{\varkappa}_2\omega_1^2 + \varkappa_1\varepsilon) = 0$$

für sie gilt. Die sphärische Trajektorie haben die Punkte auf der Achse der Gangpolfläche und der Mittelpunkt der zugehörigen Sphäre liegt auf der Achse der Rastpolfläche.

Endlich werden wir uns der Trajektorie einer Gerade bei der helikoidalen Bewegung widmen. Es sei eine Gerade p in dem Rastraum gegeben und es seien $p_1, \ldots, p_6$ seine Plückersche Koordinaten in dem Frenetschen Dreibein $\mathscr{F} = \{S, e_1, e_2, e_3\}$ der Rastpolfläche. Wenn X ein Vektor aus $\mathfrak{g}$ ist, welcher zu der Gerade p zufolge Satzes 1 zugehört, bekommen wir

$$X = p_1R_1 + p_2T_1 + p_3N_1 + p_4R_2 + p_5T_2 + p_6N_2\,.$$

Durch Differenzieren dieser Gleichung und durch Benutzung der Frenetschen Formeln (1) erhalten wir ein System von Differentialgleichungen für $p_1, \ldots, p_6$.

Satz 17. *Es seien $g(\varphi)$ eine Bewegung und $p_1, \ldots, p_6$ die Plückersche Koordinaten einer Geraden p in dem Dreibein $\mathscr{F}$. Dann gehört p dem Rastraum genau dann wenn*

$$p_1' = \varkappa_1 p_2\,, \quad p_2' = -\varkappa_1 p_1 + \varkappa_2 p_3\,, \quad p_3' = -\varkappa_2 p_2\,,$$
$$p_4' = \mu_1 p_2 + \varkappa_1 p_5\,, \quad p_5' = -\mu_1 p_1 + \mu_2 p_3 - \varkappa_1 p_4 + \varkappa_2 p_6\,, \tag{38}$$
$$p_6' = -\mu_2 p_2 - \varkappa_2 p_5$$

gilt.

Dass allgemeine Integral des Systems (38) in dem Fall der helikoidalen Bewegung schreiben wir in der Form

$$
\begin{aligned}
(39)\qquad p_1 &= \omega_1^{-1}(\varkappa_2 D_1 + \varkappa_1 D_2 \cos \omega_1 \varphi + \varkappa_1 D_3 \sin \omega_1 \varphi)\,,\\
p_2 &= -D_2 \sin \omega_1 \varphi + D_3 \cos \omega_1 \varphi\,,\\
p_3 &= \omega_1^{-1}(\varkappa_1 D_1 - \varkappa_2 D_2 \cos \omega_1 \varphi - \varkappa_2 D_3 \sin \omega_1 \varphi)\,,\\
p_4 &= \omega_1^{-3} \varepsilon \varkappa_1 D_1 - \varkappa_2 D_4 + \cos \omega_1 \varphi(-\omega_1^{-3} \varepsilon \varkappa_2 D_2 + \omega_1^{-2} \delta \varphi \varkappa_1 D_3 -\\
&\quad - \varkappa_1 D_5) + \sin \omega_1 \varphi(-\omega_1^{-3} \varepsilon \varkappa_2 D_3 - \omega_1^{-2} \delta \varphi \varkappa_1 D_2 - \varkappa_1 D_6)\,,\\
p_5 &= \cos \omega_1 \varphi(-\omega_1 D_6 - \omega_1^{-1} \delta \varphi D_2) + \sin \omega_1 \varphi(\omega_1 D_5 - \omega_1^{-1} \delta \varphi D_3)\,,\\
p_6 &= -\omega_1^{-3} \varepsilon \varkappa_2 D_1 - \varkappa_1 D_4 + \cos \omega_1 \varphi(-\omega_1^{-3} \varepsilon \varkappa_1 D_2 - \omega_1^{-2} \delta \varphi \varkappa_2 D_3 +\\
&\quad + \varkappa_2 D_5) + \sin \omega_1 \varphi(-\omega_1^{-3} \varepsilon \varkappa_1 D_3 + \omega_1^{-2} \delta \varphi \varkappa_2 D_2 + \varkappa_2 D_6)\,,
\end{aligned}
$$

wobei $D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 = 1$, $D_1 D_4 + D_2 D_5 + D_3 D_6 = 0$.

Zuerst untersuchen wir, wann die Trajektorie einer Geraden bei der helikoidalen Bewegung einem linearen Geradenkomplex gehört. Es seien p eine Gerade im Rastraum und q eine Gerade im Gangraum und $q_1, \ldots, q_6$ die Plückersche Koordinaten der Geraden q im Frenetschen Dreibein $\overline{\mathscr{F}} = \{S, e_1, e_2, e_3\}$ der Gangpolfläche. Die Gerade q gehört genau dann zu dem linearen Geradenkomplex mit der Achse p und dem Parameter η, wenn

$$(x; s) + (y; t) + \eta(x; y) = 0$$

für ihre Plückersche Koordinaten $p = (x, t)$, $q = (y, s)$ gilt.

Diese Beziehung gibt uns in Plückerschen Koordinaten

$$
\begin{aligned}
(40)\qquad p_1 q_4 + p_2 q_5 + p_3 q_6 + p_4 q_1 + p_5 q_2 + p_6 q_3 + \eta(p_1 q_1 + p_2 q_2 +\\
+ p_3 q_3) = 0\,.
\end{aligned}
$$

Differenzieren gibt uns durch Benutzung (38):

$$(41)\qquad p_3 q_5 - p_5 q_3 - p_2 q_6 + p_6 q_2 + (p_3 q_2 - p_2 q_3)(v + \eta) = 0\,.$$

Nun finden wir alle Lösungen der Gleichungen (40) und (41). Die Darstellung für q können wir nach der Änderung des Parameters φ in der Form

$$
\begin{aligned}
(42)\qquad q_1 &= \omega_2^{-1}(\bar{\varkappa}_2 E_1 + \varkappa_1 E_2 \cos \omega_2 \varphi)\,,\\
q_2 &= -E_2 \sin \omega_2 \varphi\,,\\
q_3 &= \omega_2^{-1}(\varkappa_1 E_1 - \bar{\varkappa}_2 E \cos \omega_2 \varphi)\,,\\
q_4 &= \omega_2^{-3} \bar{\varepsilon} \varkappa_1 E_1 - \bar{\varkappa}_2 E_4 + \cos \omega_2 \varphi(-\omega_2^{-3} \bar{\varepsilon} \bar{\varkappa}_2 E_2 - \varkappa_1 E_5) -\\
&\quad - \varkappa_1 E_6 \sin \omega_2 \varphi - \omega_2^{-2} \bar{\delta} \varphi \varkappa_1 E_2 \sin \omega_2 \varphi\,,
\end{aligned}
$$

$$q_5 = -\omega_2 E_6 \cos \omega_2\varphi + \omega_2 E_5 \sin \omega_2\varphi - \omega_2^{-1}\delta\varphi E_2 \cos \omega_2\varphi\,,$$
$$q_6 = -\omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\bar{\varkappa}_2 E_1 - \varkappa_1 E_4 + \cos \omega_2\varphi(-\omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\varkappa_1 E_2 + \bar{\varkappa}_2 E_5) +$$
$$+ \bar{\varkappa}_2 E_6 \sin \omega_2\varphi + \omega_2^{-2}\bar{\delta}\varphi\bar{\varkappa}_2 E_2 \sin \omega_2\varphi\,,$$

schreiben, wobei $E_1^2 + E_2^2 = 1$, $E_1E_4 + E_2E_5 = 0$.

Aus der Gleichung (41) schreiben wir zuerst die Glieder auf, aus welchen wir φ vorwerfen können. Wir erhalten die Gleichung

$$0 = \omega_1^{-1}(\varkappa_1 D_1 - \varkappa_2 D_2 \cos \omega_1\varphi - \varkappa_2 D_3 \sin \omega_1\varphi)\,.$$
$$.\,\omega_2^{-1}(-\bar{\delta}E_2 \cos \omega_2\varphi) + \omega_1^{-1}\delta(D_2 \cos \omega_1\varphi + D_3 \sin \omega_1\varphi)\,.$$
$$.\,\omega_2^{-1}(\varkappa_1 E_1 - \bar{\varkappa}_2 E_2 \cos \omega_2\varphi) + \delta\varkappa_2\omega_1^{-2}(-D_3 \cos \omega_1\varphi + D_2 \sin \omega_1\varphi)\,.$$
$$.\,(-E_2 \sin \omega_2\varphi) + (D_2 \sin \omega_1\varphi - D_3 \cos \omega_1\varphi)\,\bar{\delta}\bar{\varkappa}_2\omega_2^{-2}E_2 \sin \omega_2\varphi\,.$$

Schreiben wir die Koeffizienten der Gleichung (19) mit dem Strich, bekommen wir

$$a' = 0\,,\quad b' = \omega_1^{-1}\omega_2^{-1}\delta\varkappa_1 E_1 D_2\,,\quad c' = \omega_1^{-1}\omega_2^{-1}\delta\varkappa_1 D_3 E_1\,,$$
$$d' = -\omega_1^{-1}\omega_2^{-1}\bar{\delta}\varkappa_1 D_1 E_2\,,\quad e' = 0\,,\quad f' = D_3E_2(\omega_1^{-2}\delta\varkappa_2 - \omega_2^{-2}\bar{\delta}\bar{\varkappa}_2)\,,$$
$$g' = \omega_1^{-1}\omega_2^{-1}D_3E_2(\bar{\delta}\varkappa_2 - \delta\bar{\varkappa}_2)\,,\quad h' = \omega_1^{-1}\omega_2^{-1}D_2E_2(\bar{\delta}\varkappa_2 - \delta\bar{\varkappa}_2)\,,$$
$$l' = D_2E_2(\omega_2^{-2}\bar{\delta}\bar{\varkappa}_2 - \omega^{-2}_1\delta\varkappa_2)\,.$$

Mit Rücksicht darauf, daß die Gleichung (40) symmetrisch hinsichtlich p und q ist, hat die Bewegung die gesuchte Eigenschaft zugleich mit der Bewegung, welche zu ihr invers ist. Es genügt also nur irgendwelche Fälle zu betrachten. Schreiben wir sie!

1) $D_2 = D_3 = E_2 = 0\,,\quad D_1 = E_1 = 1\,,\quad D_4 = E_4 = 0\,,$

2) $D_2 = D_3 = 0\,,\quad D_1 = 1\,,\quad D_4 = 0\,,\quad E_2 \neq 0\,,\quad \bar{\delta} = 0\,,$

3) $\omega_1 = \omega_2\,,\quad \delta + \bar{\delta} = 0\,,\quad \bar{\delta} \neq 0\,,\quad \varkappa_2 = 1/2\,,\quad \bar{\varkappa}_2 = -1/2\,,\quad v = -4\varkappa_1\mu_1\,,$
$D_3E_1 = D_1E_2 + D_2E_1 = 0\,,\quad D_2^2 + D_3^2 \neq 0\,,\quad E_2 \neq 0\,,$

4) $\omega_1 = 2\omega_2\,,\quad \delta + 2\bar{\delta} = 0\,,\quad \delta \neq 0\,,\quad E_1 = D_3 = E_5 = 0\,,\quad E_2 = 1\,,$
$(3\bar{\varkappa}_2 + 1)\,D_2 - \varkappa_1 D_1 = 0\,,\quad D_2 \neq 0\,,$

5) $D_2^2 + D_3^2 \neq 0\,,\quad E_2 \neq 0\,,\quad \delta = \bar{\delta} = 0\,.$

Durch die ausführliche Analyse bekommen wir weiter alle Lösungen der Gleichungen (40) und (41). In der Praxis interesieren wir uns nur für zwei besondere Fälle:

α) Die Trajektorie einer Geraden ist eine helikoidale Fläche.

β) Der erwähnte lineare Geradenkomplex ist speziell d. h. die Gerade p und q schneiden sich einander.

Soll eine Gerade als die Trajektorie eine helikoidale Fläche zeichnen, muß seine Richtung bei der zugeordneten sphärischen Bewegung den Kreis zeichnen. Es bedeutet zufolge der Bemerkung zum Satz 14, daß es um den Fall 1) d. h.

$$D_2 = D_3 = D_4 = E_2 = E_4 = 0\,, \quad D_1 = E_1 = 1\,,$$

geht. Die Gleichung (41) hat dann die Form

$$E_5 \sin \omega_2 \varphi - E_6 \cos \omega_2 \varphi - D_5 \sin \omega_1 \varphi + D_6 \cos \omega_1 \varphi = 0$$

und diese Gleichung hat die Lösung

$$\begin{aligned} &E_5 = E_6 = D_5 = D_6 = 0 \quad &&\text{für} \quad \omega_1 \neq \omega_2\,, \\ &E_5 = D_5\,, \quad E_6 = D_6 &&\text{für} \quad \omega_1 = \omega_2\,. \end{aligned}$$

Satz 18. *Die Gerade q bei der helikoidalen Bewegung zeichnet nur in diesen Fällen eine helikoidale Fläche*:

1) $\omega_1 \neq \omega_2$, *q ist die Achse der Gangpolfläche,*

2) $\omega_1 = \omega_2$, *q ist eine parallele Gerade mit der Achse der Gangpolfläche.*

Weiter beachten wir den zweiten Fall, d. h. wir legen in den Gleichungen (40) und (41) $\eta = 0$. Gleichung (41) hat folgende Koeffizienten

$$\begin{aligned}
&a = 0\,, \quad b = \omega_2^{-1}[\omega_1 \varkappa_1 D_6 E_1 + \omega_2 \varkappa_1 D_3 E_4 + D_3 E_1(v\varkappa_1 + \omega_2^{-2}\bar{\varepsilon}\bar{\varkappa}_2)]\,, \\
&c = -\omega_2^{-1}[\omega_1 \varkappa_1 D_5 E_1 + \omega_2 \varkappa_1 D_2 E_4 + D_2 E_1(v\varkappa_1 + \omega_2^{-2}\bar{\varepsilon}\bar{\varkappa}_2)]\,, \\
&d = -\omega_1^{-1}\omega_2 \varkappa_1 D_1 E_6\,, \\
&e = \omega_1^{-1}[\omega_2 \varkappa_1 D_1 E_5 + \omega_1 \varkappa_1 D_4 E_2 + D_1 E_2(v\varkappa_1 + \omega_1^{-2}\varepsilon\varkappa_2)]\,, \\
&f = -\varkappa_2 \omega_1^{-1}\omega_2 D_2 E_5 - \varkappa_2 D_5 E_2 - \bar{\varkappa}_2 D_3 E_6 + D_2 E_2(-\omega_1^{-1} v\varkappa_2 + \omega_1^{-3}\varepsilon\varkappa_1)\,, \\
&g = \varkappa_2 \omega_1^{-1}\omega_2 D_3 E_6 + \bar{\varkappa}_2 \omega_1 \omega_2^{-1} D_5 E_2 + \bar{\varkappa}_2 D_2 E_5 + D_2 E_2(\omega_2^{-1} v\bar{\varkappa}_2 - \omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\varkappa_1)\,, \\
&h = \varkappa_2 \omega_1^{-1}\omega_2 D_2 E_6 - \bar{\varkappa}_2 \omega_1 \omega_2^{-1} D_6 E_2 - \bar{\varkappa}_2 D_3 E_5 + D_3 E_2(-\omega_2^{-1} v\bar{\varkappa}_2 + \omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\varkappa_1)\,, \\
&l = -\varkappa_2 \omega_1^{-1}\omega_2 D_3 E_5 - \varkappa_2 D_6 E_2 + \bar{\varkappa}_2 D_2 E_6 + D_3 E_2(-\omega_1^{-1} v\varkappa_2 + \omega_1^{-3}\varepsilon\varkappa_1)\,.
\end{aligned}$$

Das konstante Glied der Gleichung (40) ist

$$A = \omega_1^{-1}\omega_2^{-1}[\varkappa_1 D_1 E_1(\omega_2^{-2}\bar{\varepsilon} - \omega_1^{-2}\varepsilon) - (\varkappa_1^2 + \varkappa_2 \bar{\varkappa}_2)(D_1 E_4 \omega_2 + D_4 E_1 \omega_1)\,.$$

Nun werden wir uns den einzelnen Fällen widmen.

1) $D_2 = D_3 = E_2 = D_4 = E_4 = 0\,, \quad D_1 = E_1 = 1\,.$

a) $\omega_1 \neq \omega_2$. $D_5 = D_6 = E_5 = E_6 = 0$, aus $A = 0$ folgt $\omega_2^{-2}\bar{\varepsilon} - \omega_1^{-2}\varepsilon = 0$ d. h. $m_2 - m_1 = d = 0$, d. h. die Achsen müssen einander schneiden.

b) $\omega_1 = \omega_2$. $D_5 = E_5$, $D_6 = E_6$, wieder gilt $d = 0$.

2) $D_2 = D_3 = D_4 = 0$, $D_1 = 1$, $E_2 \neq 0$,

Aus der Gleichung (41) folgt $D_5 = D_6 = E_6 = 0$, $v_2 = 0$,

$E_1 d \sin\alpha_1 - (1 + k_1 k_2) E_4 = 0$, $(v + m_1 k_1) E_2 + \sin\alpha_2 . E_5 = 0$.

3) $\omega_1 = \omega_2$, $\delta = -\bar{\delta}$, $\delta \neq 0$, $\varkappa_2 = 1/2$, $\bar{\varkappa}_2 = -1/2$, $v = 4\varkappa_1 \mu_1$,

$D_3 E_1 = D_1 E_2 + D_2 E_1 = 0$, $D_2^2 + D_3^2 \neq 0$, $E_2 \neq 0$.

a) $D_3 = 0$, $E_1 = 0$. Die Lösung ist $v = \mu_1 = 0$ und die Konstanten können wir in der Form

$$D_1 = \cos\psi , \quad D_2 = \sin\psi , \quad D_4 = -\lambda \sin\psi , \quad D_5 = \lambda\cos\psi ,$$

$$E_1 = \cos\psi , \quad E_2 = -\sin\psi , \quad E_4 = \lambda\sin\psi , \quad E_5 = \lambda\cos\psi ,$$

$$D_6 = E_6$$

schreiben. Für die Bewegung gilt $v_1 = -v_2$, $k_1 = -k_2$, $d = 0$.

b) $E_1 = 0$. Dann ist auch $D_1 = 0$, $E_2 = 1$. Man erhält die Gleichungen $D_3 E_4 = 0$, $D_4 - D_2 E_4 = 0$.

α) $D_3 = 0$. Dann gilt $D_5 = E_5 = 0$, $D_6 = -E_6$, $D_4 = E_4$, $D_2 = E_2 = 1$.

β) $D_3 \neq 0$, $E_4 = D_4 = 0$. Daraus folgt $E_5 = 0$, $D_6 = -D_2 E_6$, $D_5 = D_3 E_6$, $\bar{\mu}_2 = 2\mu_1\varkappa_1$.

4) $\omega_1 = 2\omega_2$, $\delta + 2\bar{\delta} = 0$, $\bar{\delta} \neq 0$, $\bar{\varkappa}_2 \neq -1/3$, $(3\bar{\varkappa}_2 + 1) D_2 - \varkappa_1 D_1 = 0$,

$$E_1 = D_3 = E_5 = 0 , \quad E_2 = 1 , \quad D_2 \neq 0 .$$

Dann ist

$$E_4 = E_6 = D_6 = 0 .$$

Die Bedingung der Lösbarkeit ist

$$4(\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\left[\varkappa_1^2 - \varkappa_2(3\bar{\varkappa}_2 + 1)\right] + 3\varkappa_1 v \omega_1^4 = 0 .$$

5) $D_2^2 + D_3^2 \neq 0$, $E_2 \neq 0$, $\delta = \bar{\delta} = 0$.

Dann gilt

$\omega_1^{-3}\varepsilon\varkappa_1 - \omega_1^{-1} v\varkappa_2 = -\omega_1^{-1} v$, $\omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\varkappa_1 - \omega_2^{-1} v\bar{\varkappa}_2 = \omega_2^{-1} v$.

Wir müssen einzelne Fälle analisieren, d. h. die Gleichungen (24)–(27) nach einander lösen.

a) $E_6 = 0$. Für alle Fälle bekommen wir die sphärische Bewegung und die Lösungen sind Geraden, die durch den Mittelpunkt der Sphäre gehen.

b) $E_6 \neq 0$, $W \neq 0$. Die Gleichung (24) hat keine Lösung.

c) $W = 0$. Die Gleichungen (25)–(27) haben immer eine Lösung.

Satz 19. *Helikoidale Bewegungen, bei welchen eine Gerade q in dem Gangraum existiert, welche mit der Geraden p in dem Rastraum einen gemeinsamen Punkt hat, sind genau diese:*

i) $d = 0$, *d. h. die Achsen schneiden sich einander und* $q = o_2$, $p = o_1$.

ii) $v_2 = 0$, *d. h. die Gangpolfläche ist ein Rotationshyperboloid und* $p_1 = o_1$.

iii) $v = \mu_1 = \mu_2 = 0$. *Die Bewegung ist eine sphärische Bewegung und die Geraden gehen durch den Mittelpunkt der Sphäre.*

iv) $\omega_1 = \omega_2$, $d = 0$, *d. h. die Achsen schneiden sich* ,

$k_1 + k_2 = 0$, *ist parallel mit* o_1, q *ist parallel mit* o_2.

v) $\omega_1 = \omega_2\,, \quad \delta + \bar{\delta} = 0\,, \quad k_1 + k_2 = 0\,, \quad v = \mu_1 = 0\,, \quad v_1 + v_2 = 0(D_3 = 0)\,.$

vi) $\omega_1 = \omega_2\,, \quad \delta + \bar{\delta} = 0\,, \quad k_1 + k_2 = 0\,, \quad v_1 + v_2 = 0(D_1 = D_3 = D_5 =$
$= D_6 = 0,\ E_1 = 0)\,.$

vii) $\omega_1 = \omega_2\,, \quad \delta + \bar{\delta} = 0\,, \quad k_1 + k_2 = 0\,, \quad v_1 + v_2 = 0\,,$
$\bar{\mu}_2 = 2\varkappa_1\mu_1(D_1 = D_4 = 0,\ E_1 = E_4 = E_5 = 0)\,.$

viii) $\omega_1 = \omega_2\,, \quad \delta = \bar{\delta} = 0\,, \quad k_1 + k_2 = 0\,, \quad v_1 = v_2 = 0\,.$

ix) $\omega_1 = 2\omega_2\,, \quad \delta + 2\bar{\delta} = 0\,, \quad 4(\varepsilon - 2\bar{\varepsilon})\left[\varkappa_1^2 - \varkappa_2(3\bar{\varkappa}_2 + 1)\right] + 3\varkappa_1 v\omega_1^4 = 0\,.$

x) $\omega_1 = 2\omega_2\,, \quad \delta = \bar{\delta} = 0\,, \quad v_1 = v_2 = 0\,,$

und die zu diesen inverse Bewegungen.

Endlich finden wir helikoidale Bewegungen, die eine Gerade besitzen, welche stets dem Nullystem gehört. Das Nullsystem hat die Gleichung $vq_1 + q_4 = 0$ und daraus folgt

$$v\omega_2^{-1}(\bar{\varkappa}_2E_1 + \varkappa_1E_2\cos\omega_2\varphi) + \omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\varkappa_1E_1 - \bar{\varkappa}_2E_4 +$$
$$+ \cos\omega_2\varphi(-\omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\bar{\varkappa}_2E_2 - \varkappa_1E_5) - \varkappa_1E_6\sin\omega_2\varphi -$$
$$- \omega_2^{-2}\delta\varphi\varkappa_1E_2\sin\omega_2\varphi = 0\,.$$

Satz 20. *Eine helikoidale Bewegung hat eine Gerade, welche stets dem Nullsystem gehört, genau in diesen zwei Fällen:*

1) $E_2 = E_4 = E_5 = E_6 = 0$, $v\bar{\varkappa}_2\omega_2^2 + \bar{\varepsilon}\varkappa_1 = 0$, *$q$ ist die Achse der Gangpolfläche.*

2) $E_6 = 0\,, \quad \delta = v_2 = 0\,, \quad (\omega_2^{-1}\varkappa_1 v - \omega_2^{-3}\varepsilon\bar{\varkappa}_2)\,E_2 - \varkappa_1E_5 = 0\,,$
$(\omega_2^{-1}\bar{\varkappa}_2 v - \omega_2^{-3}\bar{\varepsilon}\varkappa_1)\,E_1 - \bar{\varkappa}_2E_4 = 0\,,$
$\operatorname{sgn}(\varkappa_1 v\omega_2^2 - \varepsilon\bar{\varkappa}_2)\,.\,\operatorname{sgn}(\bar{\varkappa}_2 v\omega_2^2 - \bar{\varepsilon}\varkappa_1) = \operatorname{sgn}(\varkappa_1^2 + \varkappa_2\bar{\varkappa}_2)\,.$

Geraden mit dieser Eigenschaft bilden eine Regelfläche.

Literaturverzeichnis

[1] *A. Karger:* Grundlagen der räumlichen kinematischen Geometrie I. Apl. mat. 14 (1969), 87—93.

[2] *J. Favard:* Cours de Géometrie différentielle locale. Moskau 1960 (russ. Übers.).

Souhrn

GRUNDLAGEN DER RÄUMLICHEN KINEMATISCHEN GEOMETRIE II

ADOLF KARGER

Článek je pokračováním práce [1] a je věnován analýze a některým otázkám syntézy helikoidálních pohybů. V prvé části jsou helikoidální pohyby charakterizovány jako dvojšroubové pohyby speciálního typu a je nalezena souvislost mezi invarianty helikoidálního pohybu a invarianty jeho axoidů, které jsou tvořeny přímkovými šroubovými plochami. V druhé části jsou nalezeny ty helikoidální pohyby, které mají alespoň jednu rovinnou resp. přímkovou resp. sférickou trajektorii. Přímková trajektorie je explicitně popsána. Dále jsou nalezeny všechny helikoidální pohyby, které mají v hybné soustavě přímku, která stále protíná danou pevnou přímku pevné soustavy resp. ty, které mají v hybné soustavě rovinu stále procházející daným pevným bodem.

Anschrift des Verfassers: RNDr. *Adolf Karger*, CSc., Matematicko-fyzikální fakulta UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.