Aplikace matematiky

A. Sh. Akishev

Об одной задаче В. С. Владимирова в теории переноса излучения

Aplikace matematiky, Vol. 29 (1984), No. 3, 161–181

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104082

Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1984

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

SVAZEK 29 (1984) APLIKACE MATEMATIKY ČÍSLO 3

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ В. С. ВЛАДИМИРОВА В ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

А. Ш. Акишев

(Поступило в редакцию 22/VI. 1982 г.)

ВВЕДЕНИЕ

В книге В. С. Бладимирова [2] стационарная система МСГ в P_{2r+1} приближении записана в симметризованной, т. е. симметричной и положительно определенной форме:

$$L_0^{(r)} \boldsymbol{v}_{2r+1} = S^{(r)} \boldsymbol{v}_{2r+1} + \boldsymbol{f}_{2r+1}, \ \boldsymbol{v}_{2r+1} \in D_0(r) , \tag{I}$$

где $S^{(r)}$ – оператор ограниченный, положительный и самосопряженный в пространстве вектор-функции $L_2(r)$; оператор $L_0^{(r)}$ – симетричный и положительно определенный на вектор-функциях из его области определения $D_0(r)$. Причем запись получена в предположении, что индикатриса рассеяния и функция источников обладают свойством четности.

В дальнейшем симметризация системы уравнений МСГ P_{2r+1} приближений получила обобщение в работе В. В. Смелова [4], в которой ограничения на индикатрису и источники были сняты.

Насколько автору данной работы известно, в литературе отсутствует какая-либо работа по приведению четного P_{2r} приближения к форме (1). Возможнсоть такого приведения должна быть связана с удачным выбором граничных условий на внешней границе для P_{2r}. Если удалось бы записать P_{2r} в форме (1), то практическая ценность очевидна, так как при большом r количество уравнений в системе катастрофически растет.

Кроме того, в литературе *отсутствует ответ на вопрос, поставленный академиком В. С. Владимировым: будут ли операторы* $\tilde{L}_0^{(r)-1}$ *вполне непрерывны из* $L_2(r)$ *в* $L_2(r)$? *Где* $\tilde{L}_0^{(r)}$ – *самосопряженное расширение оператора* $L_0^{(r)}$; $\tilde{L}_0^{(r)-1}$ – *его обратный* (см. [2], с. 114).

При положительном ответе на этот вопрос можно получить доказательство существования решения нестационарной задачи, симметризованной по пространственным переменным.

Целью настоящей работы является получение с математической точки зрения единого органического ответа на эти вопросы для любого P_N приближения с произвольными входными данными.

Поскольку в работах ряда авторов [1, 2], [4], [6–8] рассматривалась система в нечетном P_N приближении, то будем считать, что она имеет полноту исследования помимо выше перечисленных вопросов. В связи с этим, полученные утверждения в настоящей работе будут доказываться более подробно для четного P_{2r} приближения.

1. ПОСТАНОВКА СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМЫ МЕТОДА СФЕРИЧЕСКИХ ГАРМОНИК (МСГ)

Рассмотрим нестационарное односкоростное кинетическое уравнение переноса нейтронов в следующем виде [1–8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + \sigma u = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_\Omega g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')\, u(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} + f, \tag{1.1}$$

где $u = u(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ функция распределения нейтронов, летящих в направлении $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3) = (\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta)$ в точке $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ трехмерного евклидова пространства R_3 в момент времени $t \in [0, T]$; $f = f(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ – функция источников; $\sigma(x)$, $\sigma_s(x)$ – сечения характеризующие свойства среды, причем $0 < \sigma^\circ \leqq \sigma(\boldsymbol{x}) \leqq \sigma' < \infty$, $0 \leqq \sigma_s(\boldsymbol{x}) \leqq \sigma_s' < \infty$, $\sigma^0, \sigma', \sigma_s'$ – константы; $g = g(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\omega}')$ – индикатриса, рассеяния, она зависит от направлений $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\omega}'$ лишь посредством $\mu_0 = \mu\mu' + \sqrt{(1-\mu^2)}\sqrt{(1-\mu'^2)}\cos(\psi - \psi')$ косинуса угла между ними; $\mu = \cos\theta$; Ω – единичная сфера вектора направлений $\boldsymbol{\omega}$.

Предположим, что область G, где происходит процесс переноса нейтронов выпукла и органичена кусочно-гладкой поверхностью Γ.

Для уравнения (1.1) в области $Q = [0, T] \times G \times \Omega$ поставим смешанную задачу Коши

$$u(0, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \varphi(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}), \tag{1.2}$$

$$u(t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\omega}) = 0, \quad \boldsymbol{z} \in \Gamma, \quad (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}) < 0. \tag{1.3}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ единичный вектор внешней нормали в точке $\boldsymbol{z}$ границы Γ.

Как известно, система уравнений метода сферических гармоник в P_N приближении, соответствующая уравнению (1.1), представляется в виде [1–2], [4], [7–8]

$$B\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_\alpha} + \sigma B\boldsymbol{v} = \frac{\sigma_s}{2} BG_1\boldsymbol{v} + B\boldsymbol{f}, \tag{1.4}$$

где $\boldsymbol{v}$ – неизвестная вектор-функция; B – положительно-определеная, G_1,

A_α, $(\alpha = 1, 2, 3)$ – симметрические квадратные матрицы с $(N + 1)^2 \times (N + 1)^2$ элементами, тем самым система образует *симметрическую гиперболическую систему по Фридрихсу.*

Для полной определенности системы (1.4) надо поставить начальное и граничные условия в области $Q = [0, T] \times G \times \Omega$.

Начальные условия запишутся в виде

$$v(0, x) = \varphi(x) , \tag{1.5}$$

где $\psi = \varphi(x)$ – известная вектор-функция.

Прежде, чем сформулировать граничные условия, приведем ряд лемм.

Лемма 1.1. [7]. *Существуют унитарные матрицы* M_α, $(\alpha = 1, 2, 3)$ *такие, что*

$$A(z) = M_\alpha^* A_\alpha M_\alpha , \quad M_\alpha^* M_\alpha = I , \quad (\alpha = 1, 2, 3) ,$$

где $A(z) = \sum_{\alpha=1}^{3} n_\alpha A_\alpha$ *– граничная матрица,* $z \in \Gamma$, n_α *– компонента единичного вектора внешней нормали* $\boldsymbol{n}$.

Лемма 1.2. *Корнями характеристического уравнения* $|A(z) - \lambda B| = 0$ *являются корни полинома*

$$P_{N+1}(\lambda) \times \left[\frac{dP_{N+1}(\lambda)}{d\lambda}\right]^2 \times \left[\frac{d^2 P_{N+1}(\lambda)}{d\lambda^2}\right]^2 \times \ldots \times \left[\frac{d^N P_{N+1}(\lambda)}{d\lambda^N}\right]^2 = 0 ,$$

где $P_{N+1}(\lambda)$ *– полином Лежандра* $(N + 1)$*-ой степени.*

Доказательство этих лемм можно найти соответственно в [7], [12]. Из утверждения последней леммы следует, что спектр собственных значений формы $(A(z)\, v, v) = \lambda(Bv, v)$ состоит из $N(N + 1)/2$ – положительных, $N(N + 1)/2$ – отрицательных, $(N + 1)$ – нулевых чисел.

Лемма 1.3. *Каждая система* $\{C_{2l}^q(\boldsymbol{\omega}), S_{2l}^q(\boldsymbol{\omega})\}$, $\{C_{2l+1}^q(\boldsymbol{\omega}), S_{2l+1}^q(\boldsymbol{\omega})\}$ *по отдельности образует полную ортогональную систему в*

$$L_2((\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n}) \lessgtr 0) ,$$

где $\boldsymbol{\omega} = (\mu, \sqrt{(1 - \mu^2)} \sin \psi, \sqrt{(1 - \mu^2)} \cos \psi)$ *вектор направлений из единичной сферы* $\Omega = \{-1 \leqq \mu \leqq 1, 0 \leqq \psi \leqq 2\pi\}$, *т. е.* $\boldsymbol{\omega} \in \Omega$; $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$; $C_k^q(\boldsymbol{\omega}) = P_k^q(\mu) \cos \psi$, $S_k^q(\boldsymbol{\omega}) = P_k^q(\mu) \sin q\psi$ *– сферические функции.*

Лемма 1.4. *Система уравнений* (1.4) *равносильна одному интегродифференциальному уравнению* [13].

$$\frac{\partial v_N}{\partial t} + \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{N} (2l + 1) \int_\Omega P_l(\mu_0) \sum_{\alpha=1}^{3} \omega'_\alpha \frac{\partial v_N(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha} \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + \sigma v_N = \tag{1.5}$$

$$= \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_\Omega g^{(N)}(\mu_0)\, v_N(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}') \, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + f_N(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) ,$$

где

$$v_N(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=0}^{N} \sum_{m=0}^{k} a_k^m [C_k^m(\boldsymbol{\omega})\, v_{c,k}^m(t, \boldsymbol{x}) + S_k^m(\boldsymbol{\omega})\, v_{s,k}^m(t, \boldsymbol{x})] ,$$

$$g^{(N)}(\mu_0) = \sum_{k=0}^{N} \frac{2k+1}{2} P_k(\mu_0)\, g_k , \quad a_k^m = \frac{2k+1}{2\pi(1+\delta_m^0)} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} ,$$

$$P_k(\mu_0) = \sum_{m=0}^{k} \frac{2}{1+\delta_m^0} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} [C_k^m(\boldsymbol{\omega})\, C_k^m(\boldsymbol{\omega}') + S_k^m(\boldsymbol{\omega})\, S_k^m(\boldsymbol{\omega}')] ,$$

$v_{c,k}^m(t, \boldsymbol{x})$, $v_{s,k}^m(t, \boldsymbol{x})$ — *компоненты вектора* $\boldsymbol{v}$.

Лемма докказываетя с использованием аналогов формул Кристофелля-Дарбу для сферических функций.

Из (1.5) заметим, что линейная комбинация сферических функций определяющая граничную матрицу $A(z) = \sum_{\alpha=1}^{3} n_\alpha A_\alpha$ имеет вид

$$\text{(1.7)} \qquad \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{N} (2l+1) \int_{\Omega} P_l(\mu_0)\, (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \boldsymbol{\omega}')\, d\boldsymbol{\omega}', \; z \in \Gamma ,$$

эту функцию также будем называть граничной.

Далее функцию $v_N(t, z, \boldsymbol{\omega})$ представим в виде суммы

$$\text{(1.8a)} \qquad v_N(t, z, \boldsymbol{\omega}) = R_{2r-1}(t, z, \boldsymbol{\omega}) + 2R_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega}) , \quad N = 2r ,$$

$$\text{(1.8b)} \qquad v_N(t, z, \boldsymbol{\omega}) = \tilde{R}_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega}) + \tilde{R}_{2r+1}(t, z, \boldsymbol{\omega}) , \quad N = 2r + 1 ,$$

где

$$R_{2r+1}(t, z, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{2k+1} a_{2k+1}^m [C_{2k+1}^m(\boldsymbol{\omega})\, v_{c,2k+1}^m(t, z) + S_{2k+1}^m(\boldsymbol{\omega})\, v_{s,2k+1}^m(t, z)] ,$$

$$\tilde{R}_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{m=0}^{2k} a_{2k}^m [C_{2k}^m(\boldsymbol{\omega})\, v_{c,2k}^m(t, z) + S_{2k}^m(\boldsymbol{\omega})\, v_{s,2k}^m(t, z)]$$

и, учитывая ортогональность сферических функций различных порядков, имеем счедующие равенства:

$$\text{(1.9a)} \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{N} (2l+1) \int_{\Omega} P_l(\mu_0)\, (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \boldsymbol{\omega}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, R_{2r-1}(t, z, \boldsymbol{\omega}) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{2l+1} 2a_{2l+1}^q [C_{2l+1}^q(\boldsymbol{\omega})\, \alpha_{c,2l+1}^q(t, z) + S_{2l+1}^q(\boldsymbol{\omega})\, \alpha_{s,2l+1}^q(t, z)] , \quad N = 2r,$$

$$\text{(1.9b)} \quad \frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{N} (2l+1) \int_{\Omega} P_l(\mu_0)\, (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \boldsymbol{\omega}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, \tilde{R}_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega}) +$$
$$+ \sum_{l=0}^{r} \sum_{q=0}^{2} 2a_{2l}^q [C_{2l}^q(\boldsymbol{\omega})\, \tilde{\alpha}_{c,2l}^q(t, z) + S_{2l}^q(\boldsymbol{\omega})\, \tilde{\alpha}_{s,2l}^q(t, z)] , \quad N = 2r + 1 ,$$

где

$$\alpha^q_{c,2l+1} = \int_{(\omega,n)<0} C^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, n)\,R_{2r}(t, z, \omega)\,d\omega,\ \ l = 0, \ldots, r-1,\ \ q = 0, \ldots, 2l+1,$$

$$\alpha^q_{s,2l+1} = \int_{(\omega,n)<0} S^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, n)\,R_{2r}(t, z, \omega)\,d\omega,\ \ l = 0, \ldots, r-1,\ \ q = 1, \ldots, 2l+1,$$

$$\tilde{\alpha}^q_{c,2l} = \int_{(\omega,n)<0} C^q_{2l}(\omega)\,(\omega, n)\,\tilde{R}_{2r+1}(t, z, \omega)\,d\omega\,,\quad l = 0, \ldots, r\,,\quad q = 0, \ldots, 2l\,,$$

$$\tilde{\alpha}^q_{s,2l} = \int_{(\omega,n)<0} S^q_{2l}(\omega)\,(\omega, n)\,\tilde{R}_{2r+1}(t, z, \omega)\,d\omega\,,\quad l = 1, \ldots, r\,,\quad q = 1, \ldots, 2l\,.$$

Далее займемся вопросами вывода граничных условий из структуры граничных функций (1.9a, 1.9b). Разберем сначала случай $N = 2r$. Заметим, что количество коэффициентов линейной комбинации

$$\sum_{l=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{2l+1} 2a^q_{2l+1}\left[\alpha^q_{c,2l+1} C^q_{2l+1}(\omega) + \alpha^q_{s,2l+1}\, S^q_{2l+1}(\omega)\right] \tag{1.10}$$

совпадает с количеством положительных собственных значений формы $(A(z)\,v, v) = \lambda(B(v, v))$ в рассматриваемом случае.

Теперь воспользуемся утверждением леммы 1.3 и при фиксированном $(t_0, z_0) \in [0, T] \times \Gamma$ коэффициенты линейной комбинации (1.10) выберем так, чтобы (1.10) явился элементом наилучшего приближения функции $(\omega, n_0)\,R_{2r-1}(t_0, z_0, \omega)$ в пространстве $L_2((\omega, n) < 0)$. Как известно, в гильбертовом пространстве элемент наилучшего приближения единственен и можно построить его из условия минимума интеграла

$$\int_{(\omega,n_0)<0} \Big\{(\omega, n_0)\,R_{2r-1}(\omega) + \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{2l+1} 2a^q_{2l+1}\left[\alpha^q_{c,2l+1}\, C^q_{2l+1}(\omega) + \right.$$
$$\left. + \,\alpha^q_{s,2l+1} S^q_{2l+1}(\omega)\right]\Big\}^2\,d\omega\,, \tag{1.11}$$

по коэффициентам $\{\alpha^q_{c,2l+1}, \alpha^q_{s,2l+1}\}$ линейной комбинации (1.10).

Действительно, обозначив через $\beta^q_{c,2l+1}$, $\beta^q_{s,2l+1}$ коэффициенты Фурье, функции $(\omega, n_0)\,R_{2r-1}(\omega)$ по системе $\{C^q_{2l+1}, S^q_{2l+1}\}$, т. е.

$$\beta^q_{c,2l+1} = \int_{(\omega,n_0)<0} C^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, n_0)\,R_{2r-1}(\omega)\,d\omega,\ l = 0, \ldots, r-1, q = 0, \ldots, 2l-1,$$

$$\beta^q_{s,2l+1} = \int_{(\omega,n_0)<0} S^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, n_0)\,R_{2r-1}(\omega)\,d\omega,\ l = 0, \ldots, r-1, q = 1, \ldots, 2l+1,$$

то, с учетом леммы 1.3. из (1.11), получим

$$\Big\|(\omega, n_0)\,R_{2r-1}(\omega) + \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{2l+1} 2a^q_{2l+1}\left[\alpha^q_{c,2l+1} C^q_{2l+1}(\omega) + \alpha^q_{s,2l+1} S^q_{2l+1}(\omega)\right]\Big\|^2_{L_2((\omega,n_0)<0)} =$$

$$= \left\|(\omega, \boldsymbol{n}_0) R_{2r-1}(\omega)\right\|^2_{L_2((\omega,\boldsymbol{n}_0)<0)} - \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{2l+1} 2a^q_{2l+1}\left[(\beta^q_{c,2l+1})^2 + (\beta^q_{s,2l+1})^2\right] +$$

$$+ \sum_{l=0}^{r-1} \sum_{q=0}^{2l+1} 2a^q_{2l+1}\left[(\alpha^q_{c,2l+1} + \beta^q_{c,2l+1})^2 + (\alpha^q_{s,2l+1} + \beta^q_{s,2l+1})^2\right].$$

Следовательно, правая часмь последнего равенства принимает минимальное значение тогда и только тогда, когда

$$\alpha^q_{c,2l+1} + \beta^q_{c,2l+1} = 0\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,, \quad q = 0, \dots, 2l+1\,,$$

$$\alpha^q_{s,2l+1} + \beta^q_{s,2l+1} = 0\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,, \quad q = 1, \dots, 2l-1\,.$$

Отсюда имеем *граничные условия для системы* (1.4) *при* $N = 2r$

(1.6a) $$\int_{(\omega,\boldsymbol{n})<0} C^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \omega)\, \mathrm{d}(\omega) = 0\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,,$$
$$q = 0, \dots, 2l+1\,,$$

$$\int_{(\omega,\boldsymbol{n})<0} S^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \omega)\, \mathrm{d}\omega = 0\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,,$$
$$q = 1, 2l+1\,.$$

Повторяя предыдущее рассуждение из (1.9b), получим *граничные условия В. С. Владимирова для* (1.4) *при* $N = 2r + 1$, т.е.

(1.6b) $$\int_{(\omega,\boldsymbol{n})<0} C^q_{2l}(\omega)\,(\omega, \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \omega)\, \mathrm{d}\omega = 0\,, \quad l = 0, \dots, r\,, \quad q = 0, \dots, 2l$$

$$\int_{(\omega,\boldsymbol{n})<0} S^q_{2l}(\omega)\,(\omega, \boldsymbol{n})\, v_N(t, z, \omega)\, \mathrm{d}\omega = 0\,, \quad l = 0, \dots, r\,, \quad q = 1, \dots, 2l\,.$$

Далее для простоты предположим, что область G состоит из двух сред. На границе раздела двух сред потребуем непрерывность граничной функции (1.7).

Сначала разберем случай $N = 2r$.

(1.12) $$\int_\Omega (\omega, \boldsymbol{n})\left[R_{2r-1}(t, z^+, \omega) - R_{2r-1}(t, z^-, \omega)\right] +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_\Omega P_{2l+1}(\mu_0)\,(\omega', \boldsymbol{n})\left[R_{2r}(t, z^+, \omega') - R_{2r}(t, z^-, \omega')\right] \mathrm{d}\omega' = 0\,,$$

где $R_j(t, z^-, \omega)$ – значение R_j справа от границы;

$R_j(t, z^+, \omega)$ – значение слева от границы.

Чтобы получить необходимые граничные условия для системы (1.4) поступим следующим образом. Умножая (1.12) на $C^q_l(\omega)\,(S^q_l(\omega))$, проинтегрируем по единичной сфере Ω и воспользуемся следующими свойствами сферических функций

$$\int_\Omega C^q_{2l}(\boldsymbol{\omega})\, P_{2l+1}(\mu_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,, \quad \int_\Omega S^q_{2l}(\boldsymbol{\omega})\, P_{2l+1}(\mu_0)\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,$$

$$\int_\Omega P_{2l+1}(\mu_0) \left\langle \begin{matrix} C^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}) \\ S^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}) \end{matrix} \right\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = \frac{4\pi}{4l+3} \left\langle \begin{matrix} C^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}') \\ S^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}') \end{matrix} \right\rangle,$$

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, R_{2r-1}(t, z^*, \boldsymbol{\omega}) \left\langle \begin{matrix} C^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}) \\ S^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}) \end{matrix} \right\rangle \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,$$

в результате имеем следующий комплект *граничных условий на границе раздела двух сред:*

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, C^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}) \left[R_{2r}(t, z^+, \boldsymbol{\omega}) - R_{2r}(t, z^-, \boldsymbol{\omega})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,$$
$$l = 0, \dots, r-1\,, \quad q = 0, \dots, 2l+1\,,$$

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, S^q_{2l+1}(\boldsymbol{\omega}) \left[R_{2r}(t, z^+, \boldsymbol{\omega}) - R_{2r}(t, z^-, \boldsymbol{\omega})\right] \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,,$$
$$q = 1\,, \dots, 2l+1\,,$$

$$v^q_{c,2l+1}(t, z^+) = v^q_{c,2l+1}(t, z^-)\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,, \quad q = 0, \dots, 2l+1\,,$$
$$v^q_{s,2l+1}(t, z^+) = v^q_{s,2l+1}(t, z^-)\,, \quad l = 0, \dots, r-1\,, \quad q = 1, \dots, 2l+1\,.$$

Заметим, что число граничных условий равно $N(N+1)$ — количеству отличных от нуля собственных значений формы

$$(A(z)\,\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) = \lambda(B\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}) \quad \text{при} \quad N = 2r\,.$$

Аналогичным образом получены граничные условия на разделе двух сред при $N = 2r + 1$, причем они совпадают с условиями, приведенными в работах [4, 6], поэтому их опускаем.

Лемма 1.5. *Для линейных комбинаций сферических функций* $\boldsymbol{v}_N(t, z, \boldsymbol{\omega})$, *удовлетворяющих условию* (1.6a) *и* (1.6b) *соответственно, справедливы следующие интегральные соотношения*

(1.13a)
$$\int_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})<0} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, R^2_{2r-1}(t, z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} =$$
$$= -\int_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})<0} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, R_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega})\, R_{2r-1}(t, z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,, \quad N = 2r\,.$$

(1.13b)
$$\int_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})<0} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, \tilde{R}^2_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} =$$
$$= -\int_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})<0} (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})\, \tilde{R}_{2r}(t, z, \boldsymbol{\omega})\, \tilde{R}_{2r+1}(t, z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,, \quad N = 2r+1\,.$$

Доказательство. Пусть $N = 2r$. Умножив первое равенство (1.6а) на $2a^q_{2l+1}C^q_{2l+1}(\omega')$, а второе — на $2a^q_{2l+1}S^q_{2l+1}(\omega')$ и их сложим, после того, суммируя по l, q, получим

$$\sum_{l=0}^{r-1}\sum_{q=0}^{2l+1} 2a^q_{2l+1}\int_{(\omega,n)<0}\left[C^q_{2l+1}(\omega')C^q_{2l+1}(\omega) + \right.$$

$$\left. + S^q_{2l+1}(\omega')\, S^q_{2l+1}(\omega)\right](\omega, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{v}_N\, \mathrm{d}\omega = 0\,.$$

Отсюда, используя теорему сложения для сферических функций и представление (1.8а), имеем

$$(1.14)\qquad \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1} 2(4l+3)\int_{(\omega,n)<0}(\omega, \boldsymbol{n})\, P_{2l+1}(\mu_0)\, R_{2r-1}(t, z, \omega)\, \mathrm{d}\omega =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{(\omega,n)<0}(\omega, \boldsymbol{n})\, P_{2l+1}(\mu_0)\, R_{2r}(t, z, \omega)\, \mathrm{d}\omega\,.$$

Имея в виду равенство

$$R_{2r-1}(t, z, \omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{(\omega,n)<0} P_{2l+1}(\mu_0)\, R_{2r-1}(t, z, \omega')\, \mathrm{d}\omega'$$

справедливость которого следует из леммы 1.3, умножим (1.14) на $R_{2r-1}(t, z, \omega)$ и проинтегрируем по „полусфере" $(\omega, \boldsymbol{n}) < 0$, в результате чего получим доказательство леммы при $N = 2r$. Отметим, что следствием доказанного соотношения (1.13а) является *диссипативность граничных условий* (1.6а).

Аналогично доказывается случай для $N = 2r + 1$.

2. ПРИВЕДЕНИЕ К СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ МСГ

В этом пункте рассмотрим систему уравнений МСГ в P_N приближении (1.4) в стационарном случае, т. е.

$$(2.1)\qquad \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial x_\alpha} + \sigma B\boldsymbol{v} = \frac{\sigma_s}{2} BG_1\boldsymbol{v} + Bf\,,$$

с граничными условиями (1.6):

(2.2а)

$$\int_{(\omega,n)<0} C^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{v}_N(z, \omega)\, \mathrm{d}\omega = 0\,,\quad l = 0, \ldots, r-1\,,\quad q = 0, \ldots, 2l+1\,;$$

$$\int_{(\omega,n)<0} S^q_{2l+1}(\omega)\,(\omega, \boldsymbol{n})\, \boldsymbol{v}_N(z, \omega)\, \mathrm{d}\omega = 0\,,\quad l = 0, \ldots, r-1\,,\quad q = 1, \ldots, 2l+1$$

при $N = 2r$, $z \in \Gamma$.

$$(2.2\text{b})\quad \int_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})<0} C_{2l}^{q}(\boldsymbol{\omega})\,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})\,v_N(z,\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\quad l = 0,\dots,r\,,\quad q = 0,\dots,2l\,;$$

$$\int_{(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})<0} S_{2l}^{q}(\boldsymbol{\omega})\,(\boldsymbol{\omega},\boldsymbol{n})\,v_N(z,\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega} = 0\,,\quad l = 1,\dots,r\,,\quad q = 1,\dots,2l$$

при $N = 2r + 1$, $z \in \Gamma$.

В случае $N = 2r$, используя представление (1.8a), из системы (2.1) получим систему из двух интегро-дифференциальных уравнений, равносильную (1.5) в стационарном случае

$$(2.3\text{a})\qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial R_{2r-1}}{\partial x_\alpha} + \sigma R_{2r} = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_\Omega G_{2r}(\mu_0)\,R_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + F_{2r}\,,$$

$$\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_\Omega P_{2l+1}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha \frac{\partial R_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + \sigma R_{2r-1} =$$

$$= \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_\Omega G_{2r-1}(\mu_0)\,R_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + F_{2r-1}\,,$$

где

$$f_N = F_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) + F_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})\,,\quad g^{(N)}(\mu_0) = G_{2r}(\mu_0) + G_{2r-1}(\mu_0)\,.$$

Аналогично, как для случая $N = 2r + 1$, система, с учетом (1.8b), записывается в следующем виде

$$(2.3\text{b})\qquad \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r}(4l+1)\int_\Omega P_{2l}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha \frac{\partial \tilde{R}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + \sigma\tilde{R}_{2r} =$$

$$= \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_\Omega \tilde{G}_{2r}(\mu_0)\,\tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + \tilde{F}_{2r}\,,$$

$$\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha \frac{\partial \tilde{R}_{2r}}{\partial x_\alpha} + \sigma\tilde{R}_{2r+1} = \frac{\sigma_s}{4\pi}\int_\Omega \tilde{G}_{2r+1}(\mu_0)\,\tilde{R}_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + \tilde{F}_{2r+1}\,,$$

$$f_N = \tilde{F}_{2r} + \tilde{F}_{2r+1}\,,\quad g^{(N)}(\mu_0) = \tilde{G}_{2r}(\mu_0) + \tilde{G}_{2r+1}(\mu_0)\,.$$

Из первого уравнения системы (2.3a) после несложных выкладок имеем

$$(2.4\text{a})\quad R_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}') = -\int_\Omega \gamma_{2r}(\boldsymbol{x},\mu'_0)\left[\sum_{\beta=1}^{3}\omega''_\beta \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}'')}{\partial x_\beta} - F_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}'')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,,$$

где

$$\gamma_{2r}(\boldsymbol{x},\mu'_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{r}\frac{4k+1}{\sigma_{2k}(\boldsymbol{x})}P_{2k}(\mu'_0)\,,\quad \sigma_{2k} = \sigma - \sigma_s g_{2k}/2 > 0\,,$$

$$\mu'_0 = \mu'\mu'' + \sqrt{((1-\mu'^2)(1-\mu''^2))}\cos(\psi' - \psi'')\,.$$

Далее, исключив $R_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')$ с помощью (2.4а) из второго уравнения системы (2.3а) получим интегро-дифференциальное уравнение второго порядка относительно $R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$

(2.5а)
$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\Omega}\gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu'_0)\times$$
$$\times\sum_{\beta=1}^{3}\omega''_\beta \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial x_\beta}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' + \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} G'_{2r-1}(\mu_0)\, R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = F'_{2r-1}\,,$$

где
$$G'_{2r-1}(\mu_0) = \sum_{k=0}^{r-1}(4k+3)\,\sigma_{2k+1}(\boldsymbol{x})\,P_{2k+1}(\mu_0)\,,\quad \sigma_{2k+1} = \sigma - \sigma_s g_{2k+1}/2 > 0\,,$$
$$F'_{2r-1} = F_{2r-1} - \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\int_{\Omega}\gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu'_0)\, F_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'.$$

Для получения граничного условия для (2.5а) равенство (2.4а) запишем в точке $z \in \Gamma$.
$$R_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}') = -\int_{\Omega}\gamma_{2r}(z, \mu'_0)\left[(\boldsymbol{\omega}'', \boldsymbol{n})\frac{\partial R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial \boldsymbol{n}} - F_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}'')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'\,.$$

Последнее, умножая на $(4l+3)\,P_{2l+1}(\mu_0)\,(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})$, просуммируем по всем $l = 0, \ldots, r-1$ и после этого проинтегрируем по $\boldsymbol{\omega}' \in \Omega$ в результате чего имеем
$$\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\,(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\, R_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' =$$
$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\,(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\times$$
$$\times\int_{\Omega}\gamma_{2r}(z, \mu'_0)\left[(\boldsymbol{\omega}'', \boldsymbol{n})\frac{\partial R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial \boldsymbol{n}} - F_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}'')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'\,.$$

Отсюда, исключив $R_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}')$, с помощью граничных условий (2.2а) получим граничное условие для (2.5а)
$$\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\Big[|(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})|\, R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}') +$$
$$+ (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\int_{\Omega}\gamma_{2r}(z, \mu'_0)\,(\boldsymbol{\omega}'', \boldsymbol{n})\frac{\partial R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial \boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\Big]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = \Phi_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega})\,,$$

где
$$\Phi_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\,(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\int_{\Omega}\gamma_{2r}(z, \mu'_0)\, F_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'\,.$$

Аналогичным приемом из системы (2.3b) и граничных условий (2.2b) в случае $N = 2r + 1$ имеем:

(2.5b)
$$-\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r}(4l+1)\int_{\Omega} P_{2l}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\int_{\Omega}\tilde{\gamma}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\mu'_0)\sum_{\beta=1}^{3}\omega''_{\beta}\frac{\partial\tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}'')}{\partial x_{\beta}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' +$$
$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\tilde{G}'_{2r}(\mu_0)\,\tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = \tilde{F}'_{2r},$$

(2.6b)
$$\frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r}(4l+1)\int_{\Omega}P_{2l}(\mu_0)\Big[\,|(\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{n})|\,\tilde{R}_{2r}(z,\boldsymbol{\omega}') +$$
$$+(\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{n})\int_{\Omega}\tilde{\gamma}_{2r+1}(z,\mu)\,(\boldsymbol{\omega}'',\boldsymbol{n})\,\frac{\partial\tilde{R}_{2r}(z,\boldsymbol{\omega}'')}{\partial\boldsymbol{n}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\Big]\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = \tilde{\Phi}_{2r},$$

где
$$\tilde{\gamma}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\mu'_0) = \frac{1}{4\pi}\sum_{k=0}^{r}\frac{4k+3}{\sigma_{2k+1}(\boldsymbol{x})}P_{2k+1}(\mu'_0),\quad \sigma_{2k+1} = \sigma - \sigma_s g_{2k+1}/2,$$
$$\tilde{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) = \tilde{F}_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) - \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r}(4l+1)\int_{\Omega}P_{2l}(\mu_0)\sum_{\alpha=1}^{3}\omega'_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_{\alpha}}\times$$
$$\times\int_{\Omega}\tilde{\gamma}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\mu'_0)\,\tilde{F}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}',$$

(2.4b) $$\tilde{R}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}') = -\int_{\Omega}\tilde{\gamma}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\mu'_0)\left[\sum_{\beta=1}^{3}\omega''_{\beta}\frac{\partial R_{2r}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}'')}{\partial x_{\beta}} - \tilde{F}_{2r+1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}'')\right]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'',$$

$$\tilde{\Phi}_{2r}(z,\boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r}(4l+1)\int_{\Omega}P_{2l}(\mu_0)\,(\boldsymbol{\omega}',\boldsymbol{n})\int_{\Omega}\tilde{\gamma}_{2r+1}(z,\mu'_0)\,\tilde{F}_{2r+1}(z,\boldsymbol{\omega}'')\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\,\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}';$$
$$\tilde{G}'_{2r}(\mu_0) = \sum_{k=0}^{r}(4k+1)\,\sigma_{2k}(\boldsymbol{x})\,P_{2k}(\mu_0)$$

Исследование задачи (2.5—2.6) проведем по схеме работы [2]. Обозначим через $L^{(N)}$ линейный нитегро-дифференциальный оператор, а через $S^{(N)}$ — линейный интегральный оператор в левой части (2.5). При этом уравнение (2.5) в операторной форме, например, в случае $N = 2r$, запишется в таком виде
$$(L^{(N)} + S^{(N)})\,R_{2r-1}(\boldsymbol{x},\omega) = F'_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$$
с граничным условием (2.6a).

Далее для удобства, используя известный прием [10], неоднородное граничное условие (2.6a) сведем к однородным. Для этого вместо искомой функции $R_{2r-1}(\boldsymbol{x},\omega)$ вводим новую неизвестную функцию $R^{(1)}_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega})$ с помощью равенства
$$R^{(1)}_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) = R_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}) + Q_{2r-1}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{\omega}),$$

где $Q_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ – некоторая функция, удовлетворяющая граничному условию (2.6a) из области определения оператора $L^{(N)}$. Тогда $R^{(1)}_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ удовлетворяет уравнению

$$(L^{(N)} + S^{(N)})\, R^{(1)}_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = F'_{2r-1} - (L^{(N)} + S^{(N)})\, Q_{2r-1}$$

и соотвествующему однородному граничному условию.

В дальнейшем мы будем считать всюду, что такое преобразование задач уже сделано, т. е. искомая функция $R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ удовлетворяет однородному граничному условию.

С учетом вышесказанного, исследуемые задачи (2.5 – 2.6) окончательно запишем в операторном виде

$$(2.7a) \qquad (L^{(N)} + S^{(N)})\, R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = F'_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}), \quad N = 2r,$$

$$(2.8a) \qquad \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r-1}(4l+3)\int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\Bigg[|(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})|\, R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}') + $$

$$+ (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\int_{\Omega} \gamma_{2r}(z, \mu'_0)\,(\boldsymbol{\omega}'', \boldsymbol{n})\,\frac{\partial R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial \boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\Bigg]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = 0$$

и

$$(2.7b) \qquad (L^{(N)} + S^{(N)})\, \tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \tilde{F}'_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}), \quad N = 2r + 1,$$

$$(2.8b) \qquad \frac{1}{4\pi}\sum_{l=0}^{r}(4l+1)\int_{\Omega} P_{2l}(\mu_0)\Bigg[|(\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})|\, \tilde{R}_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}') + $$

$$+ (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n})\int_{\Omega} \tilde{\gamma}_{2r+1}(z, \mu'_0)\,(\boldsymbol{\omega}'', \boldsymbol{n})\,\frac{\partial R_{2r}(z, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial \boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\Bigg]\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' = 0\,.$$

Введем пространство, которое состоит из множества линейных комбинаций сферических функций до порядка N, коэффициенты которого принадлежат пространству $C^{(1)}(\bar{G})$ и обозначим его через $L_2^{(N)}(\Omega; C^1(\bar{G}))$.

Предположим, что линейные комбинации сферических функций $\gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu_0)$, $\tilde{\gamma}_{2r+1}(\boldsymbol{x}, \mu_0)$ соответственно принадлежат пространству

$$L_2^{(2r)}(\Omega; C^1(\bar{G})) \quad \text{и} \quad L_2^{(2r+1)}(\Omega; C^1(\bar{G}))\,.$$

Пусть $D(N)$ область определения оператора $L^{(N)}$, тогда она состоит из множества функций $R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$, $\tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ соответственно при $N = 2r$ и $N = 2r + 1$ удовлетворяющих следующим требованиям

1) $$R_{2r-1} \in L_2^{(2r-1)}(\Omega; W_2^1(G))\,; \quad \tilde{R}_{2r} \in L_2^{(2r)}(\Omega; W_2^1(G))\,;$$

$$\int_{\Omega} \gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu_0)\, \omega'_\alpha\, \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' \in L_2^{(2r)}(\Omega; W_2^1(G))\,; \quad \alpha = 1, 2, 3\,;$$

2) $$\int_\Omega \tilde{\gamma}_{2r+1}(\boldsymbol{x}, \mu_0)\, \omega'_\alpha \frac{\partial \tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' \in L_2^{(2r+1)}(\Omega;\, W_2^1(G))\,, \quad \alpha = 1, 2, 3\,;$$

3) функции $R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$, $\tilde{R}_{2r}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ соответственно удовлетворяют граничным условиям (2.8a) и (2.8b).

При этом область определения $D(N)$ оператора $L^{(N)}$ плотна в $L_2(G \times \Omega)$. Это следует из „*теореми вложения*“ *С. Л. Соболева.*

В дальнейшем понасобится одна важная лемма, связанная со сферическими функциями.

Пусть Q_{2r-1}, Q_{2r} нижеследующие линейные комбинации сферических функций

$$Q_{2r-1}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{m=0}^{2k-1} a_{2k+1}^m \big[C_{2k+1}^m(\boldsymbol{\omega})\, \zeta_{c,2k+1}^m + S_{2k+1}^m(\boldsymbol{\omega})\, \zeta_{s,2k+1}^m\big]\,,$$

$$Q_{2r}(\boldsymbol{\omega}) = \sum_{k=0}^{r} \sum_{m=0}^{2k} a_{2k}^m \big[C_{2k}^m(\boldsymbol{\omega})\, \zeta_{c,2k}^m + S_{2k}^m(\boldsymbol{\omega})\, \zeta_{s,2k}^m\big]$$

с произвольными коэффициентами

$$\zeta_{2r-1} = \left\{ \zeta_{c,2k+1}^m, \;\; \begin{matrix} k = 0, \dots, r-1; \\ m = 0, \dots, 2k+1; \end{matrix} \;\; \zeta_{s,2k+1}^m, \;\; \begin{matrix} k = 0, \dots, r-1 \\ m = 1, \dots, 2k+1 \end{matrix} \right\},$$

$$\zeta_{2r} = \left\{ \zeta_{c,2k}^m, \;\; \begin{matrix} k = 0, \dots, r \\ m = 0, \dots, 2k; \end{matrix} \;\; \zeta_{s,2k}^m; \;\; \begin{matrix} k = 1, \dots, r \\ m = 1, \dots, 2k \end{matrix} \right\},$$

тогда имеет место

Лемма 2.1. *Квадратичные формы*

$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi})^2\, Q_{2r-1}^2(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}\,; \qquad \int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi})^2\, Q_{2r}^2(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}$$

для любых чисел ξ_1, ξ_2, ξ_3 с $\sum_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha^2 \neq 0$ *и, соотвественно, для любого ненулевого вектора* ζ_{2r-1} и ζ_{2r} *положительно-определенные, т. е.*

(2.9a)
$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi})^2\, Q_{2r-1}^2(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \geqq$$
$$\geqq \varkappa_{2r-1} \sum_{k=0}^{r-1} \Big[\sum_{m=0}^{2k+1} \sum_{\alpha=1}^{3} (\xi_\alpha \zeta_{c,2k+1}^m)^2 + \sum_{m=1}^{2k+1} \sum_{\alpha=1}^{3} (\xi_\alpha \zeta_{s,2k+1}^m)^2 \Big]\,, \quad \varkappa_{2r-1} > 0\,;$$

(2.9b)
$$\int_\Omega (\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi})^2\, Q_{2r}^2(\boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \geqq$$
$$\geqq \varkappa_{2r} \sum_{k=0}^{r} \Big[\sum_{m=0}^{2k} \sum_{\alpha=1}^{3} (\xi_\alpha \zeta_{c,2k}^m)^2 + \sum_{m=1}^{2k} \sum_{\alpha=1}^{3} (\xi_\alpha \zeta_{s,2k}^m)^2 \Big]\,, \quad \varkappa_{2r} > 0\,,$$

где $(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{\xi}) = \sum_{\alpha=1}^{3} \xi_\alpha \omega_\alpha$.

Доказательство. Матрица, соответствующая квадратичной форме (2.9а), при $N = 2r$

$$G_{2r-1}(\xi) = \left\| \begin{array}{c|c} \int_\Omega (\omega, \xi)^2\, C^m_{2k+1}(\omega)\, C^{m'}_{2k'+1}(\omega)\, d\omega & \int_\Omega (\omega, \xi)^2\, C^m_{2k+1}(\omega)\, S^{m'}_{2k'+1}(\omega)\, d\omega \\ \hline \int_\Omega (\omega, \xi)^2\, S^m_{2k+1}(\omega)\, C^{m'}_{2k'+1}(\omega)\, d\omega & \int_\Omega (\omega, \xi)^2\, S^m_{2k+1}(\omega)\, S^{m'}_{2k'+1}(\omega)\, d\omega \end{array} \right\|$$

имеет порядок $N(N + 1)/2$. Заметим, что она отличается от матрицы, указанной в [2] стр. 115.

Для доказательности леммы нам достаточно установить, что определитель матрицы $G_{2r-1}(\xi)$ отличен от нуля. $\det G_{2r-1}$ есть определитель Грамма системы функций

$$\{(\omega, \boldsymbol{n})\, C^m_{2k+1}(\omega)\ ;\quad (\omega, \xi)\, S^m_{2k+1}(\omega)\}\ .$$

Линейная независимость этой системы очевидным образом следует из линейной независимости системы $\{\omega_\alpha\}, \{C^m_{2k+1}(\omega), S^m_{2k+1}(\omega)\}$ по отдельности. Следовательно, $\det G_{2r-1}(\xi) \neq 0$. Причем константа $\varkappa_{2r-1}$ соответствует минимальному собственному значению матрицы $G_{2r-j}(\xi)$. Утверждение леммы для $N = 2r - 1$ показывается аналогичным путем. Лемма доказана.

Далее используем следующее неравенство при $N = 2r$

$$\sum_{k=0}^{r-1} \Big[\sum_{m=0}^{2k+1} \sum_{\alpha=1}^{3} (\xi_\alpha \zeta^m_{c,2k+1})^2 + \sum_{m=1}^{2k+1} \sum_{\alpha=1}^{3} (\xi_\alpha \zeta^m_{s,2k+1})^2 \Big] \geqq \frac{4\pi}{4r-1} \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{3} [\xi_\alpha Q_{2r-1}(\omega)]^2\, d\omega\ ,$$

вытекающее из свойства ортогональности сферических функций. Аналогичное неравенство имеет место при $N = 2r + 1$. С учетом последнего, (2.9) перепишем в следующем виде

$$\text{(2.10a)} \qquad \int_\Omega (\omega, \xi)^2\, Q^2_{2r-1}(\omega)\, d\omega \geqq \frac{4\pi}{4r-1}\, \varkappa_{2r-1} \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{3} [\xi_\alpha Q_{2r-1}(\omega)]^2\, d\omega\ ;$$

$$\text{(2.20b)} \qquad \int_\Omega (\omega, \xi)^2\, Q^2_{2r}(\omega)\, d\omega \geqq \frac{4\pi}{4r+1}\, \varkappa_{2r} \int_\Omega \sum_{\alpha=1}^{3} [\xi_\alpha Q_{2r}(\omega)]^2\, d\omega\ .$$

Неравенства (2.10a), (2.10b) соответственно означают *сильную эллиптичность систем* (2.7a) *и* (2.7b) *в смысле определения работы* [11].

В самом деле, пусть $R_{2r-1}(x, \omega)$, $Q_{2r-1}(x, \omega) \in D(N)$ в случае $N = 2r$. Составим скалярное произведение

$$(L^{(N)} R_{2r-1}, Q_{2r-1}) = \frac{1}{4\pi} \int_{G\times\Omega} Q_{2r-1}(x, \omega) \sum_{l=0}^{r-1} (4l + 3) \int_\Omega P_{2l+1}(\mu_0)\ \times$$
$$\times \sum_{\alpha=1}^{3} \omega'_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \int_\Omega \gamma_{2r}(x, \mu'_0) \sum_{\beta=1}^{3} \omega''_\beta\, \frac{\partial R_{2r-1}(x, \omega'')}{\partial x_\beta}\, dx\, d\omega\, d\omega'\, d\omega''\ .$$

Отсюда на основании формулы Грина [2] и равенства

$$(2.11)\qquad R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega} \sum_{l=0}^{r-1} (4l + 3)\, P_{2l+1}(\mu_0)\, R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' ,$$

получим

$$(L^{(N)} R_{2r-1}, Q_{2r-1}) =$$

$$= \int_{G\times\Omega\times\Omega} \gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu_0') \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \omega_\alpha' \omega_\beta'' \frac{\partial Q_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha} \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'' -$$

$$- \int_{\Gamma\times\Omega} Q_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}) \left[\frac{1}{4\pi} \sum_{l=0}^{r-1} (4l + 3) \int_{\Omega} P_{2l+1}(\mu_0)\, (\boldsymbol{\omega}', \boldsymbol{n}) \times \right.$$

$$\left. \times \int_{\Omega} \gamma_{2r}(z, \mu_0')\, (\boldsymbol{\omega}'', \boldsymbol{n}) \frac{\partial R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial \boldsymbol{n}}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}''\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}' \right] \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} .$$

Далее, в силу граничного условия (2.8а) и соотношения (2.11), имеем

$$(2.12)\qquad (L^{(N)} R_{2r-1}, Q_{2r-1}) =$$

$$= \int_{G\times\Omega\times\Omega} \gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu_0') \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \omega_\alpha' \omega_\beta' \frac{\partial Q_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}')}{\partial x_\alpha} \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}'')}{\partial x_\beta}\, \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}'' +$$

$$+ \int_{\Gamma\times\Omega} |(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})|\, Q_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega})\, R_{2r-1}(z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} .$$

Положим в этой формуле $Q_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})$ и явное выражение ядра $\gamma_{2r}(\boldsymbol{x}, \mu_0')$. После этого, проводя элементарную оценку снизу, получим

(2.13)

$$(L^{(N)} R_{2r-1}, R_{2r-1}) \geqq C_0 \int_G \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{r} \sum_{m=0}^{2k} a_{2k}^m \left[\left(\int_\Omega C_{2k}^m(\boldsymbol{\omega}) \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int_\Omega S_{2k}^m(\boldsymbol{\omega}) \sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})}{\partial x_\alpha}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \right)^2 \right] \mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma\times\Omega} |(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})|\, R_{2r-1}^2(z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} \geqq$$

$$\geqq C_0 \int_{G\times\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega})}{\partial x_\alpha} \right)^2 \mathrm{d}\boldsymbol{x}\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} + \int_{\Gamma\times\Omega} |(\boldsymbol{\omega}, \boldsymbol{n})|\, R_{2r-1}^2(z, \boldsymbol{\omega})\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\boldsymbol{\omega} ,$$

где

$$C_0 = \inf_{\boldsymbol{x}\in G} \min_{0\leqq k\leqq r-1} \sigma_{2k}^{-1}(\boldsymbol{x}) > 0 .$$

Далее, воспользуемся неравенством (2.10а), положив в нем

$$\xi_\alpha Q_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha} R_{2r-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\omega}) ,$$

$$\int_{\Omega}\left(\sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\frac{\partial R_{2r-1}(x,\omega)}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega \geqq \frac{4\pi}{4r-1}\varkappa_{2r-1}\int_{\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial R_{2r-1}}{\partial x_\alpha}\right)^2 d\omega\,;$$

теперь

$$(2.14\text{a})\qquad (L^{(N)}R_{2r-1}, R_{2r-1}) \geqq \frac{4\pi}{4r-1}\varkappa_{2r-1}C_0\int_{G\times\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial R_{2r-1}}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx\,d\omega\,.$$

Повторяя рассуждение для случая $N = 2r + 1$, имеем

$$(2.14\text{b})\qquad (L^{(N)}\tilde{R}_{2r}, \tilde{R}_{2r}) \geqq \frac{4\pi}{4r+1}\varkappa_{2r}C_1\int_{G\times\Omega}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial \tilde{R}_{2r}}{\partial x_\alpha}\right)^2 dx\,d\omega\,,$$

где

$$\tilde{R}_{2r}(x,\omega)\in D(N)\,,\quad C_1 = \inf_{x\in G}\min_{0\leqq k\leqq r}\sigma_{2k+1}^{-1}(x) > 0\,.$$

Неравенства (2.14) показывают *сильную эллиптичность систем* (2.7).
Теперь отметим свойства оператора $L^{(N)}$ и $S^{(N)}$.

Лемма 2.2. *Оператор $S^{(N)}$ ограниченный, самосопряженный и положительно определенный в $L_2(G\times\Omega)$, т. е.*

$$\|S^{(N)}\| \leqq C_2\,,\quad 0 < C_2 = \begin{cases}\operatorname{Sup\,vrai}_{x\in G}\max_{0\leqq k\leqq r-1}\sigma_{2k+1}(x)\,, & N = 2r\,,\\ \operatorname{Sup\,vrai}_{x\in G}\max_{0\leqq k\leqq r}\sigma_{2k}(x)\,, & N = 2r+1\end{cases}$$

$$(S^{(N)}Q_N, T_N) = (Q_N, S^{(N)}T_N)\,,\quad Q_N(x,\omega)\,,\quad T_N(x,\omega)\in L_2(G\times\Omega)\,,$$

$$(S^{(N)}Q_N, Q_N) \geqq C_3\|Q_N\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,,$$

причем

$$Q_N(x,\omega) = \begin{cases}R_{2r-1}(x,\omega), & N = 2r\\ R_{2r-1}(x,\omega), & N = 2r+1\end{cases};$$

$$0 < C_3 = \begin{cases}\inf_{x\in G}\min_{0\leqq k\leqq r-1}\sigma_{2k+1}^{-1}(x), & N = 2r\\ \inf_{x\in G}\min_{0\leqq k\leqq r}\sigma_{2k}^{-1}(x), & N = 2r+1\end{cases}$$

Доказательство подобной леммы имеется в [2].

Лемма 2.3. *Оператор $L^{(N)}$ симметричный и положительно определенный, т. е.*

$$(L^{(N)}Q_N, T_N) = [Q_N, T_N]\,,\quad Q_N, T_N\in D(N)\,,$$

$$(L^{(N)}Q_N, Q^N) \geqq C_4^{(N)}\|Q_N\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,,$$

причем

$$Q_N = \begin{cases}R_{2r-1}(x,\omega)\,, & N = 2r\\ \tilde{R}_{2r}(x,\omega)\,, & N = 2r+1\end{cases};\quad C_4^{(N)} = \begin{cases}\varkappa'_{2r-1}/d\,, & N = 2r\\ \varkappa'_{2r}/d\,, & N = 2r+1\end{cases}$$

$$\varkappa'_{2r-1} = \min\left\{\frac{4\pi\varkappa_{2r-1}}{4r-1} C_0, \varkappa_{2r-1}\right\}, \quad \varkappa'_{2r} = \min\left\{\frac{4\pi\varkappa_{2r}}{4r+1}, \varkappa_{2r}\right\},$$

$d > 0$ — *некоторая константа, зависящая от диаметра области.*

Доказательство. Симметричность следует из равенства (2.12). Для доказательства положительной определенности обратимся к неравенству (2.13) при $N = 2r$

$$(L^{(N)}R_{2r-1}, R_{2r-1}) \geqq C_0 \int_{G\times\Omega} \left(\sum_{\alpha=1}^{3} \omega_\alpha \frac{\partial R_{2r-1}}{\partial x_\alpha}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\omega + \tag{2.15}$$

$$+ \int_{G\times\Omega} (\omega, n)^2 R^2_{2r-1}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega\,, \quad \text{т. к.} \; |(\omega, n)| \leqq 1\,.$$

Заметим, что

$$\int_{\Gamma\times\Omega} |(\omega, n)|^2 R^2_{2r-1}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega \geqq \int_{\Gamma\times\Omega} (\omega, n)^2 R^2_{2r-1}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega\,,$$

$$\text{т. к.} \quad |(\omega, n)| \leqq 1\,.$$

Положим $\xi_\alpha = n_\alpha$, $(\alpha = 1, 2, 3)$ и воспользуемся неравенством (2.10), в результате имеем

$$\int_{\Gamma\times\Omega} |(\omega, n)|^2 R^2_{2r-1}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega \geqq \varkappa_{2r-1} \int_{\Gamma\times\Omega} R^2_{2r-1}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega\,.$$

Тогда, принимая во внимание (2.14а) из (2.15) получим

$$(L^{(N)}R_{2r-1}, R_{2r-1}) \geqq \varkappa'_{2r-1}\left[\int_{\Gamma\times\Omega} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial R_{2r-1}}{\partial x_\alpha}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\omega + \int_{\Gamma\times\Omega} R^2_{2r-1}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega\right].$$

Аналогичная оценка имеет место для случая $N = 2r + 1$

$$(L^{(N)}\tilde{R}_{2r}, \tilde{R}_{2r}) \geqq \varkappa'_{2r}\left[\int_{G\times\Omega} \sum_{\alpha=1}^{3} \left(\frac{\partial \tilde{R}_{2r}}{\partial x_\alpha}\right)^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\omega + \int_{\Gamma\times\Omega} \tilde{R}^2_{2r}(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega\right].$$

Сравнив последние с известным *неравенством Фридрихса* (см. [9], стр. 129, формула (14)), окончательно получим доказательство леммы 2.3.

$$(L^{(N)}Q_N, Q_N) \geqq C_4^{(N)} \|Q_N\|^2_{L_2(G\times\Omega)}\,.$$

Введем обозначение $L_s^{(N)} = L^{(N)} + S^{(N)}$

Следствие 2.1. *Оператор $L_s^{(N)}$ симетричный и положительно определенный, обратный $L_s^{(N)^{-1}}$ вполне непрерывен из $L_2(G \times \Omega)$ в $L_2(G \times \Omega)$, причем*

$$(L_s^{(N)}Q_N, T_N) = [Q_N, T_N]\,; \quad Q_N, T_N \in D(N)\,.$$

$$[Q_N]^2 \geqq C_6 \|Q_N\|^2_{L_2(\Omega; W_2{}^1(G))}\,, \tag{2.16}$$

(2.17) $$(L_s^{(N)}Q_N, Q_N) \geqq C_5 \|Q_N\|^2 L_2(G \times \Omega)\,, \quad C_5 = C_4^{(N)} + C_3\,,$$

$$[Q_N, T_N] = \int_{G\times\Omega\times\Omega} \gamma_N(x, \mu_0') \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} \omega_\alpha' \omega_\beta'' \frac{\partial Q_N(x, \omega')}{\partial x_\alpha} \frac{\partial T_N(x, \omega'')}{\partial x_\beta} \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}\omega'\, \mathrm{d}\omega'' +$$

$$+ \int_{\Gamma\times\Omega} |(\omega, n)|\, Q_N(z, \omega)\, T_N(z, \omega)\, \mathrm{d}z\, \mathrm{d}\omega +$$

$$+ \frac{1}{4\pi} \int_{G\times\Omega\times\Omega} G_N'(x, \mu_0)\, Q_N(x, \omega')\, T_N(x, \omega)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}\omega\, \mathrm{d}\omega'\,,$$

где

$$\gamma_N(x, \mu_0) = \begin{cases} \gamma_{2r}(x, \mu_0)\,, & N = 2r \\ \tilde{\gamma}_{2r+1}(x, \mu_0)\,, & N = 2r + 1 \end{cases}$$

$$G'(x, \mu_0) = \begin{cases} G_{2r-1}'(x, \mu_0)\,, & N = 2r \\ \tilde{G}_{2r}'(x, \mu_0)\,, & N = 2r + 1\,. \end{cases}$$

Следуя работам [2], [9] на линейном множестве $D(N)$, плотном в $L_2(G \times \Omega)$ введем новое скалярное произведение, полагая

$$[Q_N, T_N] = (L_s^{(N)}Q_N, T_N)\,, \quad Q_N, T_N \in D(N)\,.$$

Легко показать, что такое определение удовлетворяет всем требованиям скалярного произведения. Введя новое скалярное произведение, мы превратили $D(N)$ в гильбертово пространство (вообще говоря, неполное). Норму в этом прострастве будем обозначать через $[.]$, так что

$$[Q_N]^2 = [Q_N, Q_N] = (L_s^{(N)}Q_N, Q_N)\,, \quad Q_N \in D(N)\,.$$

При этом, в силу неравенства (2.17)

(2.18) $$\|Q_N\| \leqq \frac{1}{\sqrt{C_5}} [Q_N]\,, \quad Q_N \in D(N)\,.$$

Пополняя $D(N)$ по норме $[Q_N]$, получили гильбертово пространство $H(N)$, которое называется *энергетическим пространством*. В пространстве $H(N)$ введем в рассмотрение следующий функционал

(2.19) $$I(Q_N) = [Q_N]^2 - 2(Q_N, F_N)$$

Для симметрического положительно-определенного оператора $L_s^{(N)}$ всегда можно построить самосопряженное расширение, при котором задача о минимуме функционала $I(Q_N)$ имеет решение при любом $F_N(x, \omega) \in L_2(G \times \Omega)$. Известно [9], что *энергетическое пространство положительно-определенного оператора и его расширение по Фридрихсу* совпадают, поэтому пространство $H(N)$ будет пространством допустимых функций для функционала $I(Q_N)$.

Таким образом, в $L_2(G \times \Omega)$ существует обратный оператор $L_s^{(N)-1}$, ограниченный по норме числом $1/C_5$. При помощи этого оператора решение уравнения

$$L_s^{(N)} Q_N(x, \omega) = F_N(x, \omega) \quad \text{при} \quad \forall F_N(x, \omega) \in L_2(G \times \Omega)$$

может быть записано в виде

$$Q_N(x, \omega) = L_s^{(N)-1} F_N(x, \omega) .$$

Причем, $\|Q_N(x, \omega)\|_{L_2(G \times \Omega)} \leqq 1/C_5 \|F_N(x, \omega)\|_{L_2(G \times \Omega)}$. Более того, из неравенства (2.16) следует, что *оператор* $L_s^{(N)-1}$ *является вполне непрерывным* из $L_2(G \times \Omega)$ в $L_2(G \times \Omega)$, поэтому решение $Q_N(x, \omega) \in D(N)$.

Итак, мы доказали следующие теоремы.

Теорема 2.1. *Если* 1) $\gamma_N(x, \omega) \in L_2(\Omega; C^1(\bar{G}))$; 2) $G'_N(x, \mu_0) \in L_2(G \times \Omega)$, *то уравнения* (2.5) *с граничными условиями* (2.6) *имеют единственное обобщенное решение* $Q_N(x, \omega) \in D(N)$ *при* $\forall F_N(x, \omega) \in L_2(G \times \Omega)$.

Теорема 2.2. *Если* 1) $\gamma_N(x, \mu_0) \in L_2(\Omega; C^1(\bar{G}))$; 2) $G_N^1(x, \mu_0) \in L_2(G \times \Omega)$; 3) $\Gamma \in C^2$, *то уравнения* (2.5) *с граничными условиями* (2.6) *имеют единственное обобщенное решение* $Q_N(x, \omega) \in L_2(\Omega; W_2^A(\bar{G}))$ *при* $\forall F_N(x, \omega) \in L_2(G \times \Omega)$.

Замечание. Для доказательства теоремы 2.2 необходимо использовать второе основное *неравненство для эллиптических операторов* из работы [10].

В *методе Ритца* выбирается полная последовательность линейно независимых элементов $\{Q_{N,n}\}$ в пространстве $H(N)$ и минимум функционала $I(Q_N)$ ищется среди функций вида

$$Q_N^{(r)} = \sum_{k=1}^{r} C_k^{(r)} Q_{N,k}$$

Это приводит к системе линейных уравнений

$$\sum_{k=1}^{r} C_k^{(r)} [Q_{N,k}, Q_{N,i}] = (F_N, Q_{N,i}) . \quad i = 1, r .$$

Так как *оператор* $L_s^{(N)}$ *самосопряженный и положительно-определенный*. то последовательность $\{Q_N^{(r)}\}$ приближенных решений по *Ритцу* вариационной задачи (2.19) сходится в пространстве $H(N)$ к ее точному решению.

Поскольку

$$\|Q_N - Q_N^{(r)}\|_{L_2(G \times \Omega)} \leqq \frac{1}{C_4^{(N)}} \|Q_N - Q_N^{(r)}\|_{L_2(\Omega; W_2^1(G))} \leqq \frac{1}{C_5^{(N)}} [Q_N - Q_N^{(r)}] \to 0$$

при $r - \infty$, приближенное решение, построенное по *методы Ритца*, сходится к точному и в пространствах $L_2(G \times \Omega), L_2(\Omega; W_2^1(G))$. Отметим, что так как оператор $L_s^{(N)}$ *самосопряженный* и *положительно-определенный*, поэтому *метод Ритца* и *метод Галеркина*, примененные к задаче (2.7)–(2.8), будут эквивалентны.

Рассмотрим задачу на собственные значения оператора

$$L_s^{(N)} Q_N(x, \omega) = \lambda Q_N(x, \omega),$$

где λ — некоторый вещественный параметр.

Так как оператор $L_s^{(N)-1}$ *является самосопряженным, положительно-определенным и вполне непрерывным в пространстве* $H(N)$, *то спектр дискретный, положительный и имеет точку сгущения на бесконечности.*

Замечание. Основное содержание данной работы депонировано в работе автора [14].

Литература

[1] *Г. И. Марчук, В. И. Лебедев*: Численные методы в теории переноса нейтронов. М., Атомиздат, 1971. — 496 с.

[2] *В. С. Владимиров*: Математические задачи односкоростной теории переноса частиц. Труды Матем. ин-та АН СССР. М., 1961, т. 61, с. 3—158.

[3] *Т. А. Гермогенова*: Локальные свойства решения уравнения переноса. Препринт. М., ИПМ АН СССР, 1968.

[4] *В. В. Смелов*: О симметризации нечетного P_{2N-1}-приближения односкоростного уравнения переноса. ЖВМ и МФ, 1980, т. 20, № 1, с. 121—132.

[5] *И. Марек*: Некоторые математические задачи теории ядерных реактирив на быстрых нейтронах. Aplikace matematiky 8, с. 6 (1963), 442—467.

[6] *Г. Я. Румянцев*: Граничные условия в методе сферических гармоник. „Атомная энергия", 10, вып. 1, 1961.

[7] *У. М. Султангазин*: Методы сферических гармоник и дискретных ординат в задачах кинетической теории переноса. Алма-Ата. Наука. 1979. — 267 с.

[8] *С. Мика*: On the approximate solution of the multigroup time-dependent transport equation by P_L-method. Aplikace matematiky 24, č. 2 (1979), 133—154.

[9] *С. Г. Михлин*: Вариационные методы в математической физике. М., Наука. 1970. — 512 с.

[10] *О. А. Ладыженская*: Краевые задачи математической физики. М., Наука. 1973. — 407 с.

[11] *М. И. Вишик*: О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений. Мат. сборн., 29 (71), 1951, с. 615—676.

[12] *А. Ш. Акишев*: Мажорантные схемы для систем уравнений метода сферических гармоник. В сб. „Вопросы математики и прикладной математики". Алма-Ата, 1977, с. 141—149.

[13] *А. Ш. Акишев*: О равномерной сходимости метода сферических гармоник (МСГ). „Известия АН КазССР. Сер. физ.-мат.", 1979, № 5, с. 1—8.

[14] *А. Ш. Акишев*: Об одном вопросе академика В. С. Владимирова в теории переноса излучения. Алма-Ата, 1981, 25 с. Рукопись представлена Казгосуниверситетом. Деп. в КазЦИНТИ 27 янв. 1981, № Р 222.

Souhrn

O JEDNOM PROBLÉMU V. S. VLADIMIROVA V TEORII PŘENOSU ZÁŘENÍ

A. Š. Akišev

Článek je věnován metodě sférických harmonik (MSH), která je jednou z účinných metod přibližného řešení transportní rovnice. Na jednotném metodickém základě jsou formulovány okrajové podmínky na vnější i vnitřní hranici pro libovolnou P_N-aproximaci MSH. Tyto podmínky jsou shodné s podmínkami Vladimirova (pro $N = 2r + 1$) a Rumjanceva (pro každé N). Je provedena symetrizace stacionárních rovnic MHS pro každou P_N-aproximaci s libovolnou počáteční podmínkou, což zobecňuje výsledky Vladimirova a Smelova pro každou P_N-aproximaci, resp. P_{2r-1}-aproximaci. Je dokázána úplná spojitost resolventy symetrizované soustavy, a na tomto základě je nalezeno řešení symetrizované soustavy MSH a dokázána konvergence přibližných řešení v prostoru $W_2^1(G)$.

Адрес автора: Проф. *А. Ш. Акишев*, Министерство высшего и среднего специального образования Казахской ССР, Казахский Ордена трудового знамени государственный университет им. С. М. Кирова, Математический факультет, Алма-Ата 12, СССР.