

# Aplikace matematiky

---

Helmut Pottmann

Spezielle äquiforme Zwangläufe

*Aplikace matematiky*, Vol. 29 (1984), No. 3, 225–232

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104087>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1984

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## SPEZIELLE ÄQUIFORME ZWANGLÄUFE

HELMUT POTTMANN

(Eingegangen am 8. August 1983)

**1.** Ein ebener äquiformer Zwangslauf läßt sich dadurch angeben, daß man für drei nicht kopunktuale Geraden  $g_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der ähnlich-veränderlichen Gangebene  $\Sigma$  die Hüllkurven  $k_i$  in der Rastebene  $\Sigma_0$  vorschreibt. Wählt man als Führungskurven  $k_i$  drei Kreise, so umhüllen nach H. Schaal [9] sämtliche Geraden aus  $\Sigma$  Kreise oder laufen durch Stützpunkte; dies kann aus der Tatsache gefolgert werden, daß das Gangsystem  $\Sigma$  bei Einschränkung der Bewegung  $\Sigma/\Sigma_0$  auf die Geraden eines Büschels von  $\Sigma$  auch starr denkbar ist und eine umgekehrte Ellipsenbewegung vollführt. Schrumpfen die drei Kreise  $k_i$  auf Punkte, so gilt dies gleichzeitig für alle anderen Geradenhüllbahnen (Burmester [3, S. 877]). In der vorliegenden Note werden nun weitere Beispiele für ebene äquiforme Zwangsläufe mit „gleichartigen“ Geradenhüllbahnen angegeben. Das Hauptinteresse gilt aber *räumlichen Verallgemeinerungen*.

**2.** Wir verwenden in  $\Sigma_0$  ein kartesisches Koordinatensystem  $(0; x, y)$  und wählen den Drehwinkel  $u$  der Gangebene  $\Sigma$  gegenüber der Rastebene  $\Sigma_0$  als Parameter. Die Lagen der Geraden  $g_i \subset \Sigma$  in  $\Sigma_0$  sind als

$$(1) \quad \begin{aligned} g_i: f_i(u) &\equiv x \sin(u + u_i) - y \cos(u + u_i) - h_i(u + u_i) = 0, \\ u_i &= \text{const} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, 3), \quad u \in I \subset \mathbb{R} \end{aligned}$$

anzusetzen; dabei sind die  $h_i(u)$  die *Stützfunktionen der Führungskurven*  $k_i$ . Die Geraden  $g_i$  und  $g_j$  schließen den konstanten Winkel  $u_i - u_j$  ein. Sie repräsentieren somit tatsächlich die ähnlich-veränderliche Gangebene, sofern sie für jedes  $u \in I$  nicht kopunktal und auch nicht untereinander parallel vorausgesetzt werden, d.h.

$$(2) \quad \begin{aligned} h_1(u + u_1) \sin(u_2 - u_3) + h_2(u + u_2) \sin(u_3 - u_1) + \\ + h_3(u + u_3) \sin(u_1 - u_2) \neq 0. \end{aligned}$$

Die Lagen jeder beliebigen Geraden  $g \subset \Sigma$  lassen sich nun durch

$$(3) \quad g: \sum_{i=1}^3 \lambda_i f_i(u) = 0, \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$$

beschreiben (vgl. [8] und Abschnitt 4). Wegen der Voraussetzung (2) ist jedes  $g \subset \Sigma$  gemäß (3) darstellbar. Aus (3) folgt als *Stützfunktion der Hüllbahn*  $k$  von  $g$

$$(4) \quad h(u) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^3 \lambda_i h_i(u + u_i) \quad \text{mit}$$

$$\lambda^2 = \sum_{i=1}^3 \lambda_i^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(u_1 - u_2) + 2\lambda_1 \lambda_3 \cos(u_1 - u_3) + 2\lambda_2 \lambda_3 \cos(u_2 - u_3),$$

sofern die Ausgangslage für die Messung des Winkels  $u$  für jedes  $g$  geeignet gewählt wird.

Das eingangs erwähnte, von H. Schaal genauer studierte Beispiel ergibt sich mit

$$(5) \quad h_i(u) = a_i \sin u + b_i \cos u + c_i, \quad a_i, b_i, c_i = \text{const} \in \mathbb{R},$$

woraus nach (4) die allgemeinen Geradenhüllbahnen unmittelbar als Kreise zu erkennen sind. Die Geraden des durch die Beziehung  $\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \lambda_3 c_3 = 0$  gekennzeichneten Büschels von  $\Sigma$  gleiten durch Punkte eines bestimmten Kreises  $l_0$  von  $\Sigma_0$ . Schrumpfen die drei Führungskreise  $k_i$  auf Punkte ( $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ ), so gilt dies offenbar auch für alle anderen Geradenhüllbahnen [3, S. 877].

**3.** Wir wählen nun als Führungskurven  $k_i$  *zykloidale Kurven*. Zu diesen zählen die Epi- und Hypozykloiden, die Pseudozykloiden (Hyperzykloiden und Parazykloiden) und die logarithmischen Spiralen. Zykloidale Kurven sind durch Stützfunktionen der Bauart

$$(6) \quad h(u) = d \sin u + e \cos u + g(u), \quad d, e = \text{const} \in \mathbb{R}$$

zu kennzeichnen, wobei  $g(u)$  die Differentialgleichung

$$(7) \quad \ddot{g}(u) + \mu g(u) = 0$$

löst [4]. Die reelle Zahl  $\mu$  heißt *Modul* der zykloidalen Kurve; mit  $\mu = 0$  schließen wir auch die Kreisevolventen ein.

Sind  $h_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Stützfunktionen dreier zykloidalen Kurven mit demselben Modul  $\mu$ , so beschreibt infolge der Linearität von (7) auch jede Linearkombination nach dem Muster (4) eine zykloidale Kurve mit dem Modul  $\mu$ :

**Satz 1.** *Gleiten drei nicht kopunktuale Geraden einer ähnlich-veränderlichen Ebene  $\Sigma$  auf drei zykloidalen Kurven mit demselben Modul  $\mu$ , so hüllt jede Gerade aus  $\Sigma$  eine zykloidale Kurve mit dem Modul  $\mu$  ein.<sup>1)</sup>*

Mit  $\mu = 0$  gibt man als Führungskurven drei Kreisevolventen vor und erhält dann als Geradenhüllbahnen i.a. wieder Kreisevolventen, für die Geraden eines bestimmten Büschels von  $\Sigma$  hingegen bloß Kreise.

<sup>1)</sup> Für eine Gerade von  $\Sigma$  schrumpft die Hüllkurve auf einen Punkt; in Sonderfällen kann auch ein ganzes Büschel solcher Ausnahmegeraden existieren.

Weitere Beispiele für ebene äquiforme Zwangsläufe mit „gleichartigen“ Geradenhüllbahnen hat der Verfasser in [8] angegeben.

4. Sei  $\Sigma/\Sigma_0$  ein räumlicher äquiformer Zwangslauf, bei welchem jede Ebene  $\varepsilon$  des ähnlich-veränderlichen dreidimensionalen Gangraumes  $\Sigma$  ihre Neigung gegenüber einer festen (waagrecht gedachten) Ebene  $\omega$  des Rastsystems  $\Sigma_0$  beibehält. Im allgemeinen verhält sich eine solche Bewegung hinsichtlich der Bahntangenten in jedem Augenblick wie eine bestimmte Spirallung [12, S. 205 ff.] mit einem Zentrum  $P$  und einer (lotrechten) Achse  $p \perp \omega$ ; deren Richtung wollen wir als „Achsenrichtung“ der Bewegung  $\Sigma/\Sigma_0$  bezeichnen. Das Hüllgebilde einer Ebene  $\varepsilon \subset \Sigma$  bei  $\Sigma/\Sigma_0$  ist demnach für  $\varepsilon \perp \omega$  ein lotrechter Zylinder; bei  $\varepsilon \parallel \omega$  entartet es in die Ferngerade von  $\omega$ , und ansonsten ergibt sich eine Böschungstorse  $\phi$ . Die Bewegung  $\Sigma/\Sigma_0$  kann nun so angegeben werden, daß man für vier nicht kopunktales, zur Achsenrichtung schräge Ebenen  $\varepsilon_i \subset \Sigma$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) die Hülltorse  $\phi_i \subset \Sigma_0$  (und die Ausgangslage der Ebenen  $\varepsilon_i$ ) vorschreibt<sup>2)</sup>.

Zur analytischen Erfassung verwenden wir in  $\Sigma_0$  ein kartesisches Koordinatensystem  $(0; x, y, z)$  mit  $\omega$  als Ebene  $z = 0$ . Bezeichne  $u$  den Drehwinkel von  $\Sigma$  gegen  $\Sigma_0$ , so lassen sich die Lagen der gegen  $\omega$  unter dem Winkel  $\beta_i$  geneigten Ebene  $\varepsilon_i \subset \Sigma$  in  $\Sigma_0$  durch

$$(8) \quad \varepsilon_i: p_i(u) \equiv x \sin(u + u_i) - y \cos(u + u_i) + b_i z - b_i h_i(u + u_i) = 0, \\ \beta_i \in (0, \pi/2), \quad b_i = \operatorname{ctg} \beta_i, \quad u_i = \operatorname{const} \in \mathbb{R}, \quad u \in I \subset \mathbb{R} \quad (i = 1, \dots, 4)$$

ansetzen. Die Böschungstorse  $\phi_i$  kann man sich dabei als Hülltorse der Ebene  $\varepsilon_i$  bei einer „Umschwungbewegung“  $\mathcal{B}_i$  erzeugt denken. Diese Bewegung  $\mathcal{B}_i$  setzt sich aus einer Drehung eines starren Raumsystems um die  $z$ -Achse und einer Schwingung längs dieser Achse zusammen, wobei  $h_i(u)$  die Abhängigkeit der Schwingstrecke vom Drehwinkel  $u$  angibt;  $b_i h_i(u)$  läßt sich als Stützfunktion der Spurkurve von  $\phi_i$  in  $\omega$  deuten. Die konstant geböschten Ebenen  $\varepsilon_i$  und  $\varepsilon_j$  haben in  $\omega$  Spuren mit dem festen Schnittwinkel  $u_i - u_j$  und bilden demnach selbst einen festen Winkel. Die  $\varepsilon_i$  repräsentieren also tatsächlich den ähnlich-veränderlichen Gangraum  $\Sigma$ , sofern sie keinen gemeinsamen eigentlichen Punkt oder Fernpunkt besitzen, d. h.

$$(9) \quad \begin{vmatrix} \sin(u + u_1) & \cos(u + u_1) & b_1 & b_1 h_1(u + u_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sin(u + u_4) & \cos(u + u_4) & b_4 & b_4 h_4(u + u_4) \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall u \in I$$

Die Lagen jeder beliebigen Ebene  $\varepsilon \subset \Sigma$  können nun folgendermaßen beschrieben werden:

$$(10) \quad \varepsilon: \sum_{i=1}^4 \lambda_i p_i(u) = 0, \quad (\lambda_1, \dots, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \setminus \{(0, 0, 0, 0)\}.$$

<sup>2)</sup> Höchstens drei der vier Ebenen  $\varepsilon_i$  könnte man normal zu  $\omega$  annehmen und lotrechte Hüllzylinder vorschreiben.

Zum Beweis fassen wir die  $\varepsilon_i$  als Spuren von Hyperebenen  $H_i$  des durch  $(x, y, z, t)$  beschriebenen  $\mathbb{R}^4$  auf:

$$(11) \quad H_i: q_i(u) \equiv x \sin(u + u_i) - y \cos(u + u_i) + b_i(z + t - h_i(u + u_i)) = 0.$$

Die vier Hyperebenen  $H_i$  schließen miteinander feste Winkel ein und repräsentieren demnach im  $\mathbb{R}^4$  ein starres System  $A$ , in welches auch die durch den Schnittpunkt  $S$  der  $H_i$  gehende Hyperebene  $H$

$$(12) \quad H: \sum_{i=1}^4 \lambda_i q_i(u) = 0$$

paßt. Weiters sind die Winkel zwischen unserem dreidimensionalen Ausgangsraum  $t = 0$  und den  $H_i$  konstant. Für einen Beobachter im System  $A$  sind somit die einzelnen Lagen von  $t = 0$  untereinander parallel, so daß je zwei Lagen des Spursystems  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_4, \varepsilon_i\}$  durch eine zentrische Ähnlichkeit zusammenhängen. Damit ist die Richtigkeit des Ansatzes (10) nachgewiesen.

Bei Vorgabe der Führungstorsen  $\phi_i$  durch die Kennfunktionen  $h_i$  kann also die Hülltorse  $\phi$  einer zur Achsenrichtung schrägen Ebene  $\varepsilon \subset \Sigma$ , d. h.

$$(13) \quad s = \sum_{i=1}^4 \lambda_i b_i \neq 0 \quad \text{und} \quad \left( \sum_{i=1}^4 \lambda_i \sin u_i, \sum_{i=1}^4 \lambda_i \cos u_i \right) \neq (0, 0),$$

durch eine Umschwungbewegung mit der Kennfunktion

$$(14) \quad h(u) = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^4 \lambda_i b_i h_i(u + u_i)$$

erzeugt werden.

Eine Ebene  $\bar{\varepsilon} \subset \Sigma$  mit  $s = 0$  hüllt einen lotrechten Zylinder  $\bar{\phi}$  ein, dessen Basis-kurve  $\bar{f}$  in  $\omega$  bei geeigneter Ausgangslage der Winkelzählung die Stützfunktion

$$(15) \quad \bar{h}(u) = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^4 \lambda_i b_i h_i(u + u_i)$$

$$\text{mit} \quad \lambda^2 = \sum_{i=1}^4 \lambda_i^2 + 2\lambda_1 \lambda_2 \cos(u_1 - u_2) + \dots + 2\lambda_3 \lambda_4 \cos(u_3 - u_4)$$

besitzt. Bei *Normalprojektion* auf  $\omega$  bildet sich  $\Sigma/\Sigma_0$  auf einen *ebenen äquiformen Zwangslauf*  $\Sigma'/\Sigma'_0$  ab, den wir als „Grundriß“ von  $\Sigma/\Sigma_0$  bezeichnen wollen; die Geradenhüllbahnen des Grundrisses der Bewegung  $\Sigma/\Sigma_0$  sind genau die Basislinien  $\bar{f}$  der Hüllzylinder  $\bar{\phi}$  von lotrechten Ebenen  $\bar{\varepsilon} \subset \Sigma$ .

**5.** Wählen wir als Führungstorsen vier *Drehkegel*  $\phi_i$  mit lotrechten Achsen:

$$(16) \quad h_i(u) = c_i \sin u + d_i \cos u + e_i, \quad c_i, d_i, e_i = \text{const} \in \mathbb{R},$$

so folgt aus (14) unmittelbar der

**Satz 2.** Gleiten vier nicht kopunktales Ebenen eines ähnlich-veränderlichen Raumsystems  $\Sigma$  auf vier Drehkegeln mit parallelen Achsen, so hüllt jede zu den Achsen schräge Ebene des Systems  $\Sigma$  einen Drehkegel ein.

Es handelt sich also um eine äquiforme Mannheim-Bewegung, wo alle Ebenen durch Stützpunkte gleiten. Da hierbei jeder Punkt von  $\Sigma_0$  als Stützpunkt auftritt, besitzt die Umkehrbewegung durchwegs ebene Punktbahnen, welche sich als Kegelschnitte erweisen (vgl. [5]). Grundriß der Bewegung  $\Sigma/\Sigma_0$  ist die Bewegung von H. Schaal. Die Punktbahnen bei  $\Sigma/\Sigma_0$  sind identisch mit jenen bei Mannheim-Bewegungen starrer Systeme [2, S. 310 ff.], und zwar Raumkurven 4. Ordnung, die als Grundrisse Pascalschnecken besitzen, oder Ellipsen.

6. Als räumliche Analoga zu den ebenen zyklotalen Kurven verwenden wir nun als Führungstorsen  $\phi_i$  die Tangentenflächen von Böschungslinien  $k_i$  auf Drehquadranten  $\Gamma_i$  mit lotrechter Achse [1, 4]. Bei F. Fabricius-Bjerre [4] werden die Kurven  $k_i$  als „polyzyklotalle Böschungslinien“ bezeichnet<sup>3</sup>). Es sind dies genau jene Böschungslinien, die im Normalriß auf die Bezugsebene als zyklotalle Kurven erscheinen. Die Basis Spuren der Torsen  $\phi_i$  sind demnach Evolventen zyklotaler Kurven; die Kennfunktionen  $h_i(u)$  können daher durch

$$(17) \quad h_i(u) = c_i \sin u + d_i \cos u + g_i(u), \quad c_i = d_i = \text{const} \in \mathbb{R}$$

beschrieben werden, wenn  $g_i(u)$  die Differentialgleichung

$$(18) \quad \ddot{g}(u) + \mu \dot{g}(u) = 0$$

löst. Die reelle Zahl  $\mu$  nennen wir wieder den Modul von  $k_i$ . Mit (14) und (15) gilt dann der

**Satz 3.** Gleiten vier nicht kopunktales Ebenen eines ähnlich-veränderlichen Raumsystems  $\Sigma$  auf den Tangentenflächen von vier Böschungslinien  $k_i$  auf Drehquadranten mit lotrechter Achse, wobei alle  $k_i$  denselben Modul  $\mu$  besitzen, so umhüllt jede zur Achsenrichtung schräge Ebene aus  $\Sigma$  eine solche Torse oder einen Drehkegel. Die Normalschnitte der von den achsenparallelen Ebenen eingehüllten Zylinder sind Evolventen von zyklotalen Kurven mit dem Modul  $\mu$  oder Kreise.

Im Fall  $\mu = 0$  sind die Führungstorsen und die allgemeinen Ebenenhülltorse Tangentenflächen von Böschungslinien auf Drehparaboloiden, während die Ebenen eines bestimmten Bündels  $S$  von  $\Sigma$  Schraubtorse (in Sonderfällen Drehkegel, Drehzylinder oder Zylinder mit Kreisevolventenbasis) einhüllen. Achsenparallele Ebenen  $\notin S$  hüllen lotrechte Zylinder ein, deren Normalschnitte Evolventen von Kreisevolventen sind.

<sup>3</sup>) Die Böschungslinien  $k_i$  heißen „polyzyklotal“, da sie bei Verebnung ihrer Verbindungskegel  $Ok_i$  mit den Punkten  $O$  der Drehachse von  $\Gamma_i$  in ebene zyklotalle Kurven übergehen.

Gibt man speziell vier achsenparallele *Schraubtorse*  $\phi_i$  vor, so sind auch die allgemeinen Hülltorse Schraubtorse, und die Ebenen durch einen Punkt  $S \in \Sigma$  hüllen Drehkegel oder Drehzylinder ein; die Normalschnitte der Hüllzylinder achsenparalleler Ebenen  $\neq S$  sind Kreisevolventen.

Ein weiterer einfacher Sonderfall stellt sich ein, wenn die  $\phi_i$  *Spiraltorse* [12, S. 223] mit parallelen Achsen und gleichsinnig kongruenten Gratliniengrundrissen sind. Die allgemeinen Hülltorse sind dann ebenfalls solche Spiraltorse.

7. In Satz 3 können höchstens drei der vier Führungstorse  $\phi_i$  als lotrechte Zylinder angenommen werden, deren Normalschnitte Evolventen zyklodaler Kurven oder zyklodale Kurven mit dem Modul  $\mu$  sind. Daher wollen wir die Torse  $\phi_i$  speziell folgendermaßen wählen:  $\phi_1$  sei Tangentenfläche einer polyzyklodalen Böschungslinie,  $\phi_2$  ihre rektifizierende Torse, das ist ein Zylinder mit einer zyklodalen Kurve als Basis,  $\phi_3$  ihre Polartorse und  $\phi_4$  die rektifizierende Torse von  $\phi_3$ , das ist wieder ein Zylinder mit einer zyklodalen Kurve als Normalschnitt. Die Böschungstorse  $\phi_1$  und  $\phi_3$  sowie die Normalschnitte von  $\phi_2$  und  $\phi_4$  haben denselben Modul  $\mu$ . Aus Satz 3 folgt damit der

**Satz 4.** *Durchlaufen ein Linienelement  $(P, t)$  und ein Punkt  $Q$  eines ähnlichveränderlichen Raumsystems  $\Sigma$  eine polyzyklodale Böschungslinie  $k_1$  mit dem Modul  $\mu$  und deren Krümmungskreismitten, so zwar, daß  $t$  stets die Tangente und  $Q$  die Krümmungsmitte von  $k_1$  in  $P$  ist, so hüllt jede zur Achsenrichtung der Bewegung schräge Ebene aus  $\Sigma$  die Tangentenfläche einer polyzyklodalen Böschungslinie mit dem Modul  $\mu$  oder einen Drehkegel ein. Achsenparallele Ebenen gleiten bei  $\mu \neq 0$  entweder durch die Achse der Trägerquadrik von  $k_1$ , oder sie hüllen Zylinder ein, deren Normalschnitte konzentrische zyklodale Kurven vom Modul  $\mu$  sind<sup>4)</sup>.*

Ist die Trägerquadrik  $\Gamma_1$  von  $k_1$  eine Mittelpunktsquadrik, so sind die Grundrisse der Bahnkurven der Punkte  $X \in \Sigma$  bei dieser Bewegung (als isoptische Linien konzentrischer zyklodaler Kurven mit demselben Modul) *Trochoiden* oder *Pseudotrochoiden*. Eine einfache Rechnung zeigt, daß die Bahnen der auf der Hauptnormalen  $PQ$  von  $k_1$  liegenden Punkte  $T$  auf koaxialen Drehquadricken eines Büschels verlaufen; insbesondere gilt dies natürlich für die Ortslinie  $\bar{k}_1$  der Krümmungskreismitten (vgl. [1]).

Mit

$$(19) \quad h_1(u) = a \sin nu \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad n \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}$$

ergibt sich für  $\phi_1$  eine durch einen harmonischen Umschwung erzeugbare *Umschwungtorse*. Bei  $|n| < 1$  liegt ihre Gratlinie  $k_1$  auf einem Drehellipsoid  $\Gamma_1$  und deren Grundriß  $k'_1$  ist eine Epizykloide; bei  $|n| > 1$  ist  $\Gamma_1$  ein einschaliges Drehhyperboloid

<sup>4)</sup> Bei  $\mu = 0$  sind im Falle einer Böschungslinie  $k_1$  auf einem Drehparaboloid die Normalschnitte der Hüllzylinder lotrechter Ebenen i.a. Evolventen von Kreisevolventen.

und  $k'_1$  eine Hypozykloide [6]. Zur Illustration zeigt Abb. 1 für  $n = 2/3$  eine Umschwungtorse samt Gratlinie  $k_1$  und Ortslinie  $\bar{k}_1$  der Krümmungskreismiten von  $k_1$ .

Der ebene Grenzfall von Satz 4, betreffend die Bewegung der durch den Krümmungsradius einer zyklodialen Kurve definierten ähnlich-veränderlichen Ebene, findet sich bei W. Wunderlich [10].

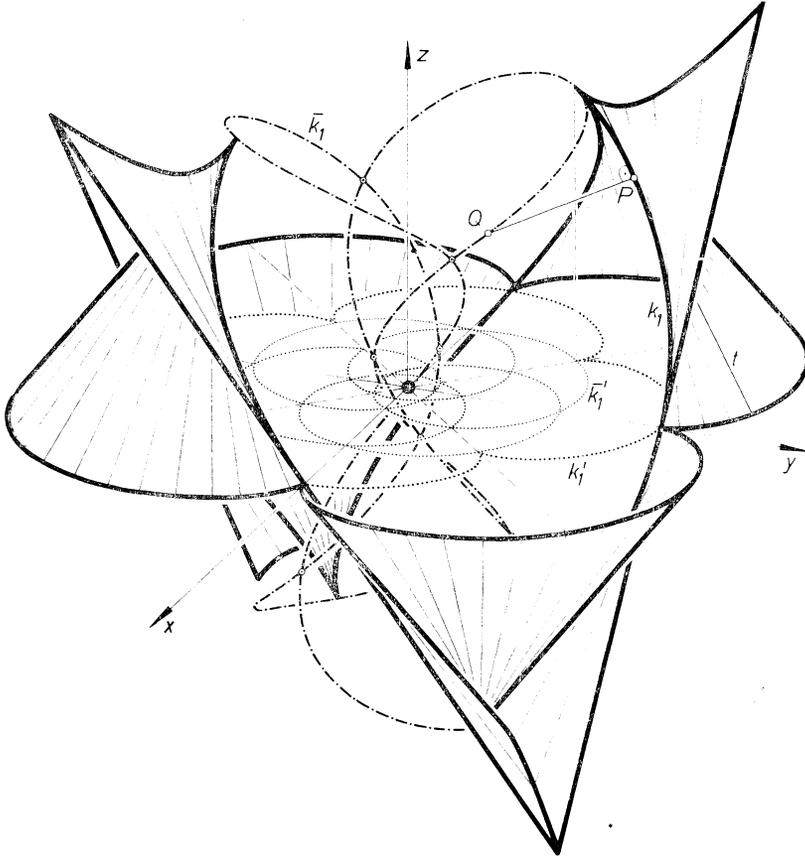


Abb. 1. Umschwungtorse samt Ortslinie  $\bar{k}_1$  der Krümmungskreismiten ihrer Gratlinie  $k_1$

Es sei noch bemerkt, daß sich die in den Sätzen 3 und 4 enthaltenen Ergebnisse über Umschwungtorsen unschwer auf jene Böschungstorsen übertragen lassen, die durch *fortschreitende harmonische Umschwungbewegungen* [7, 13] oder *gedämpfte harmonische Umschwünge* [11] erzeugbar sind.

### Literatur

- [1] *W. Blaschke*: Bemerkungen über allgemeine Schraubenlinien. Monatsh. Math. Phys. 19 (1908), 188—204.
- [2] *O. Bottema* und *B. Roth*: Theoretical Kinematics. North Holland series in applied mathematics and mechanics, Amsterdam 1979.
- [3] *L. Burmester*: Lehrbuch der Kinematik. Leipzig 1888.
- [4] *F. Fabricius-Bjerre*: Über zyklonale Kurven in der Ebene und im Raum. Danske Vid. Selsk., Mat. fys. Medd. 26 (1951), 1—75.
- [5] *A. Karger*: Similarity motions in  $\widehat{E}_3$  with plane trajectories. Apl. mat. 26 (1981), 194—201.
- [6] *W. Kautny*: Zur Geometrie des harmonischen Umschwungs. Monatsh. Math. 60 (1956), 66—82.
- [7] *O. Obürka*: Vibrator-Kurven und Flächen (Tschechisch). Sborn. VUT Brno 1965, 97—131.
- [8] *H. Pottmann*: Über Geradenhüllbahnen bei ebenen äquiformen Zwangläufen. Abhandlungen d. Braunschweigischen Wiss. Ges. (im Druck).
- [9] *H. Schaal*: Ein Beitrag zur Geometrie ähnlich-veränderlicher Felder. El. Math. 21 (1966), 97—109.
- [10] *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie nichteuklidischer Schraubflächen. Monatsh. Math. Phys. 44 (1936), 249—279.
- [11] *W. Wunderlich*: Zur Geometrie des gedämpften harmonischen Umschwungs. Sitzgsber. d. Österr. Akad. d. Wiss. 173 (1964), 7—28.
- [12] *W. Wunderlich*: Darstellende Geometrie II (BI-HTB 133/133a). Mannheim 1967.
- [13] *W. Wunderlich*: Über die durch fortschreitenden harmonischen Umschwung erzeugbaren Hülltoren. Čas. pěst. mat. 98 (1973), 130—144.

Souhrn

## SPECIÁLNÍ EKVIFORMNÍ VYNUCENÉ POHYBY

HELMUT POTTMANN

V rovině lze určit ekviformní pohyb tak, že každá přímka pohyblivé roviny obsahuje v pevné rovině cykloidální čáru s týmž modulem. Problém je pak řešen a zobecněn i v prostoru.

*Anschrift des Verfassers*: Technische Universität, Gußhausstraße 27, A-1040 Wien, Österreich.