

# Aplikace matematiky

---

Zdeněk Jankovský

Die Phasenbilder der Geschwindigkeitsfelder der Laguerreschen Bewegungen

*Aplikace matematiky*, Vol. 33 (1988), No. 5, 374–388

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/104318>

## Terms of use:

© Institute of Mathematics AS CR, 1988

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

## DIE PHASENBILDER DER GESCHWINDIGKEITENFELDER DER LAGUERRESCHEN BEWEGUNGEN

ZDENĚK JANKOVSKÝ

(Eingegangen am 26. Februar 1987)

*Zusammenfassung.* Dieser Artikel befaßt sich mit einigen Fragen der kinematischen Geometrie auf der Laguerreschen Gruppe ( $\mathcal{L}$ -Gruppe). Die  $\mathcal{L}$ -Gruppe wird durch die Gruppe der direkten linearen gebrochenen Transformationen der erweiterten dualen Ebene (ein Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene) repräsentiert. Im Artikel werden die Begriffe der  $\mathcal{L}$ -Bewegung, der Geschwindigkeiten der  $\mathcal{L}$ -Bewegung im gegebenen Punkt ( $\zeta$ ) und in der gegebenen Phase  $t$ , der Vektorfelder der Geschwindigkeiten, der Momentanpole definiert und untersucht. Die Phasen der  $\mathcal{L}$ -Bewegung werden klassifiziert und die Phasenbilder der Geschwindigkeitenfelder werden für die einzelnen Phasen festgelegt.

*Keywords:* Die kinematische Geometrie auf der Laguerreschen Gruppe.

*AMS Classification:* 53A17.

### 1. EINLEITUNG

Im vorliegenden Artikel wird die Laguerresche ebene Geometrie ( $\mathcal{L}$ -Geometrie) als Geometrie angesichts der 6-parametrischen Gruppe  $A_6^+$  der direkten linearen gebrochenen Transformationen der erweiterten dualen Ebene ( $\mathcal{L}$ -Gruppe) aufgefaßt. Die erweiterte duale Ebene  $\bar{A}$  ist eine geeignete Repräsentation der Laguerreschen Ebene ( $\mathcal{L}$ -Ebene), s. [8], bzw. [1], [2], [3]. Auf der  $\mathcal{L}$ -Gruppe als einer Bewegungsgruppe kann man die kinematische Geometrie und die Kinematik zur klassischen kongruenten, bzw. projektiven kinematischen Geometrie und Kinematik, die auf der kongruenten, bzw. projektiven Gruppe aufgebaut werden, analogisch aufbauen, s. [4].

Dieser Artikel beschäftigt sich mit den Geschwindigkeitsfeldern in verschiedenen Phasen der  $\mathcal{L}$ -Bewegung; da wird die Klassifikation der Phasen der  $\mathcal{L}$ -Bewegung festgelegt. Die Untersuchung der Geschwindigkeitsfelder der  $\mathcal{L}$ -Bewegung in einzelnen Phasen führt zur Lösung der Riccatischen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten im dualen Gebiet. Diese Gleichung können wir auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten transformieren. Durch die Lösung dieser linearen Differentialgleichungen bekommen wir die gesuchten Phasenbilder der Geschwindigkeitsfelder der  $\mathcal{L}$ -Bewegung.

Die angewandten analytischen Mittel bilden die Algebra der dualen Zahlen (s. [1], [3], [5], [6], [7], [8]) und die Grundzüge der Analysis der dualen Funktionen einer reellen Veränderlichen, s. [5], [6]. Mit den dualen Zahlen und ihren Anwendungen in der Geometrie und Mechanik beschäftigten sich schon W. Clifford, E. Study und A. P. Kotělnikov.

## 2. GRUNDBEGRIFFE

Es seien  $R$  der Körper der reellen Zahlen und  $A$  der Ring aller dualen Zahlen

$$a = a_1 + \varepsilon a_2; \quad \varepsilon^2 = 0; \quad a_1, a_2 \in R;$$

$a_1 = \Re a$ , bzw.  $a_2 = \Im a$  ist der reelle, bzw. der duale Teil der dualen Zahl  $a$ .

Der Ring  $A$  besitzt eigene Nullteiler. Die Menge aller eigenen Teiler der Null ist

$$\mathfrak{N} \equiv R\varepsilon \equiv \{x\varepsilon \mid x \in R; \varepsilon^2 = 0\}.$$

Wir erweitern den Ring  $A$  (analogisch wie bei den komplexen Zahlen) auf die erweiterte duale Ebene  $\bar{A}$ :

$$\bar{A} = \left\{ z \mid z \in A \vee z = \frac{1}{\omega} = \infty \vee z = c \frac{1}{\varepsilon} = c\omega; \quad c \in R, c \neq 0; \varepsilon^2 = 0 \right\}.$$

$\bar{A}$  ist ein Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene, s. [8]. Die fundamentale Bewegungsgruppe, die auf diesem Modell der  $\mathcal{L}$ -Ebene operiert, ist die Gruppe der direkten linearen gebrochenen Transformationen im dualen Gebiet (der  $\mathcal{L}$ -Transformationen, s. [8]):

$$(1) \quad \mathcal{L}(\xi) = z = \frac{\alpha\xi + \beta}{\gamma\xi + \delta}; \quad |L| = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \notin \mathfrak{N},$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in A$ ;  $z, \xi \in \bar{A}$  sind.

**Bemerkung 1.** Die Gruppe (1) ist linear durch die spezielle lineare Gruppe  $SL(2, A)$  zu repräsentieren.

**Definition 1.** Eine  $\mathcal{L}$ -Bewegung  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$  der  $\mathcal{L}$ -Ebene  $A(\Sigma)$  in der  $\mathcal{L}$ -Ebene  $L(S)$  ist das 1-parametrische System der  $\mathcal{L}$ -Transformationen

$$(2) \quad z = \frac{\alpha(t)\xi + \beta(t)}{\gamma(t)\xi + \delta(t)}; \quad \alpha(t)\delta(t) - \gamma(t)\beta(t) \notin \mathfrak{N} \text{ auf } \mathcal{I},$$

wo  $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in C^n(\mathcal{I})$  ist der  $A$ -Modul aller  $n$ -mal stetig differenzierbarer dualer Funktionen der reellen Veränderlichen  $t$  auf dem Intervall  $\mathcal{I} \subset R$ ;  $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\xi, z \in \bar{A}$ ;  $A(\Sigma)$ , bzw.  $L(S)$  nennen wir die Gangebene, bzw. die Rastebene;  $(\xi)$ , bzw.  $(z)$  sind die Punkte der Gang-, bzw. Rastebene.

Die Transformation des Koordinatensystems  $S \rightarrow 'S$  wird durch die  $\mathcal{L}$ -Transformation gegeben:

$$(3) \quad z = \frac{c_1 z + c_2}{c_3 z + c_4}; \quad |C| = c_1 c_4 - c_2 c_3 \notin \mathfrak{R},$$

$c_i \in \mathcal{A}$ , Konst.

### 3. GESCHWINDIGKEITSFELD DER $\mathcal{L}$ -BEWEGUNG

Es sei  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$  eine  $\mathcal{L}$ -Bewegung (2) der Klasse  $C^n(\mathcal{S})$ ,  $n \geq 1$ .

**Definition 2.** Die erste Ableitung (2) nach  $t$  nennen wir die *Geschwindigkeit der  $\mathcal{L}$ -Bewegung  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$  im gegebenen Punkt ( $\zeta$ ) und in der gegebenen Phase  $t$ .*

**Bemerkung 2.** Die Geschwindigkeit  $\dot{z} = dz/dt$  kann man als den Berührungsvektor der Bahnkurve  $z(t)$  des Punktes ( $\zeta$ ) in der Rastebene in der Zeit  $t$  interpretieren.

Die Geschwindigkeit  $\dot{z}$  kann man in der Form

$$(4) \quad \dot{z} = q_0 + q_1 z + q_2 z^2,$$

wo

$$q_0 = \frac{\beta \dot{\alpha} - \alpha \dot{\beta}}{\beta \gamma - \alpha \delta}; \quad q_1 = \frac{\alpha \dot{\delta} - \delta \dot{\alpha} + \gamma \dot{\beta} - \beta \dot{\gamma}}{\beta \gamma - \alpha \delta};$$

$$q_2 = \frac{\delta \dot{\gamma} - \gamma \dot{\delta}}{\beta \gamma - \alpha \delta} \text{ ist, darstellen.}$$

(4) ist eine *Riccatische Gleichung im dualen Gebiet* und sie bestimmt im durch  $z \in \mathcal{A}$  beschriebenen Teil der  $\mathcal{L}$ -Ebene (als einer dualen differenzierbaren Mannigfaltigkeit) das Vektorfeld der Geschwindigkeiten der  $\mathcal{L}$ -Bewegung

$$(5) \quad \mathbf{Z}(t, z): \mathcal{S} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$$

**Definition 3.** Die Punkte ( ${}^1z$ )  $\in L(S)$ , für welche

$$\mathbf{Z}(t_0, {}^1z) = 0$$

gilt, nennen wir die *Pole der Phase  $t_0$  der  $\mathcal{L}$ -Bewegung  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$ , kurz die Momentanpole  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$ .*

Der Begriff des Momentanpoles ist invariant angesichts (3) und auch angesichts der Transformation des Zeitgimes.

**Bemerkung 3.** Der Punkt  $(z_0) = (\infty)$ , bzw.  $(z_0) = (c\omega)$  ist dann und nur dann ein Momentanpol, wenn die Transformation des Koordinatensystems (3) existiert so, daß  ${}^1z_0 = \mathcal{L}(z_0) \in \mathcal{A}$  der Momentanpol nach D2 ist.

Fixieren wir die Phase  $t = t_0$  der  $\mathcal{L}$ -Bewegung  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$ , dann können wir zur Gleichung (4) die Riccatische Gleichung mit konstanten Koeffizienten

$$(6) \quad \frac{dz(t)}{dt} = q_0(t_0) + q_1(t_0) z(t) + q_2(t_0) z^2(t),$$

wo  $t$  eine neue reelle Veränderliche – die Phasenzeit ist, adjungieren. (6) bestimmt das stationäre Vektorfeld der Geschwindigkeiten in der Phase  $t_0$ :

$$(7) \quad \mathbf{Z}_{t_0}(z): A \rightarrow A; \quad \mathbf{Z}_{t_0}(z) = \mathbf{Z}(t_0, z).$$

(7) approximiert die  $\mathcal{L}$ -Bewegung  $\mathcal{L}(\Sigma/S)$  in der ersten Ordnung in der Phase  $t_0$ .

#### 4. EINE KLASSIFIKATION DER PHASEN DER $\mathcal{L}$ -BEWEGUNG

Die Riccatische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten (6) ist äquivalent den folgenden zwei Differentialgleichungen im reellen Gebiet:

$$(8) \quad \begin{aligned} \mathcal{R}\dot{z} &= \mathcal{R}q_0 + (\mathcal{R}q_1)(\mathcal{R}z) + (\mathcal{R}q_2)(\mathcal{R}z)^2 \\ \mathcal{D}\dot{z} &= \mathcal{D}q_0 + (\mathcal{D}q_1)(\mathcal{R}z) + (\mathcal{D}q_2)(\mathcal{R}z)^2 + \mathcal{D}z[\mathcal{R}q_1 + 2(\mathcal{R}q_2)(\mathcal{R}z)] \end{aligned}$$

(8<sub>1</sub>) ist für  $(\mathcal{R}q_2) \neq 0$  eine Riccatische Gleichung im reellen Gebiet mit konstanten Koeffizienten. Diese Gleichung können wir auf eine lineare Differentialgleichung überführen und lösen. (8<sub>2</sub>) ist eine lineare Differentialgleichung und wir können sie auch lösen. Die Parameter  $(q_0, q_1, q_2) = q$  transformieren sich bei der  $\mathcal{L}$ -Transformation (3) zu folgenden:

$$(9) \quad \begin{aligned} {}^{\backslash}q_0 &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} (c_1^2 q_0 - c_1 c_2 q_1 + c_2^2 q_2) \\ {}^{\backslash}q_1 &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} (2c_1 c_3 q_0 - (c_1 c_4 + c_2 c_3) q_1 + 2c_2 c_4 q_2) \\ {}^{\backslash}q_2 &= \frac{1}{|\mathbf{C}|} (c_3^2 q_0 - c_3 c_4 q_1 + c_4^2 q_2) \end{aligned}$$

(9) ist eine lineare Transformation mit der Matrix  ${}^{\backslash}\mathbf{C}$ ;  $\text{Det } {}^{\backslash}\mathbf{C} = 1$ .

**Lemma 1.**  $q \in \mathfrak{N}^3 \Leftrightarrow {}^{\backslash}q \in \mathfrak{N}^3; {}^{\backslash}q = {}^{\backslash}\mathbf{C}q$ .

Beweis. 1) Ist  $q \in \mathfrak{N}^3 \Rightarrow \varepsilon {}^{\backslash}q = {}^{\backslash}\mathbf{C}\varepsilon q = {}^{\backslash}\mathbf{C}o = o \Rightarrow {}^{\backslash}q \in \mathfrak{N}^3$ . 2) Ist  ${}^{\backslash}q \in \mathfrak{N}^3$ , angesichts der Regularität von  ${}^{\backslash}\mathbf{C}$  folgt dann aus (9):  $q = {}^{\backslash}\mathbf{C}^{-1} {}^{\backslash}q$  und aus 1)  $\Rightarrow q \in \mathfrak{N}^3$ , qed.

Wir können also die Phasen  $t_0$  der  $\mathcal{L}$ -Bewegung klassifizieren:

- I. *Reguläre Phasen*  $\Leftrightarrow q \notin \mathfrak{N}^3; q_2 \neq 0$ .
- II. *Singuläre Phasen*  $\Leftrightarrow q \in \mathfrak{N}^3; \mathcal{D}q_2 \neq 0$ .
- III. *Sublaguerresche Phasen*  $\Leftrightarrow q_2 = 0$  ( $\Leftrightarrow$  (2) kann man auf  $z = \alpha(t)\zeta + \beta(t)$  transformieren).

Die Momentanpole in der Phase  $t_0$  werden durch die quadratische Gleichung

$$(10) \quad q_0 + q_1 z + q_2 z^2 = 0$$

im dualen Gebiet gegeben (Die Lösung (10) vgl. z.B. in [6]; für III übergeht die Gleichung (10) in eine lineare Gleichung).

I. Die regulären Phasen klassifizieren wir weiter aus dem Standpunkt der Menge der Momentanpole:

- 1) *hyperbolische Phase*  $\Leftrightarrow$  2 nichtparallele Momentanpole,
- 2) *parabolische Phase*  $\Leftrightarrow$  eine Gerade einander parallelen Momentanpole,
- 3) *elliptische Phase*  $\Leftrightarrow$  es gibt keine Momentanpole.

**Lemma 2.** Die Diskriminanten  $D = q_1^2 - 4q_0q_2$  und  $D_1 = \mathcal{R}D = (\mathcal{R}q_1)^2 - 4(\mathcal{R}q_0)(\mathcal{R}q_2)$  sind  $\mathcal{L}$ -Invarianten.

Beweis.  $D$  und  $D_1$  sind invariant angesichts (3), d.h. angesichts (9):  $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(q_1^2 - 4q_0q_2) =$  durch direkte Berechnung mit Hilfe von (9)  $= q_1^2 - 4q_0q_2 = D$ ;  $\mathcal{L}(D_1) = \mathcal{L}(\mathcal{R}(D)) = \mathcal{R}(D) = D_1$ , qed.

**Satz 1.** Die regulären hyperbolischen, bzw. parabolischen, bzw. elliptischen Phasen werden durch  $q_2 \neq 0$  und  $D_1 > 0$ , bzw.  $D_1 = D = 0$ , bzw.  $D_1 < 0$  oder  $D_1 = 0 \wedge D \neq 0$  kennzeichnet.

Beweis folgt aus der Lösung der Gleichung (10) für  $q \notin \mathcal{R}^3$ ,  $q_2 \neq 0$  und aus Lemma 2.

II. Für die singulären Phasen haben die Gleichungen (8) die Form:

$$(8') \quad \begin{aligned} \mathcal{R}\dot{z} &= 0 \\ \mathcal{D}\dot{z} &= \mathcal{D}q_0 + (\mathcal{D}q_1)(\mathcal{R}z) + (\mathcal{D}q_2)(\mathcal{R}z)^2. \end{aligned}$$

$$(10') \quad \text{Also } \dot{z} = 0 \Leftrightarrow \mathcal{D}q_0 + (\mathcal{D}q_1)(\mathcal{R}z) + (\mathcal{D}q_2)(\mathcal{R}z)^2 = 0.$$

Die singulären Phasen klassifizieren wir aus dem Standpunkt der Menge der Momentanpole:

- 1) *hyperbolische singuläre Phase*  $\Leftrightarrow$  zwei verschiedene Geraden der parallelen Momentanpole,
- 2) *parabolische singuläre Phase*  $\Leftrightarrow$  eine Gerade einander parallelen Momentanpole,
- 3) *elliptischen singuläre Phase*  $\Leftrightarrow$  es gibt keine Momentanpole.

**Satz 2.** Die singulären hyperbolischen, bzw. parabolischen, bzw. elliptische Phasen werden durch  $\mathcal{D}q_2 \neq 0$  und  $D_2 > 0$ , bzw.  $D_2 = 0$ , bzw.  $D_2 < 0$  kennzeichnet;  $D_2 = (\mathcal{D}q_1)^2 - (\mathcal{D}q_0)(\mathcal{D}q_2)$ .

Beweis folgt aus der Lösung der Gleichung (10') für  $\mathcal{D}q_2 \neq 0$ .

III. Für  $q_2 = 0$  hat (10) die Form:

$$(10'') \quad q_0 + q_1z = 0.$$

Die sublaguerresche Phasen klassifizieren wir auf

- 1)  $\mathcal{L}$ -Rotationen  $\Leftrightarrow$  ein einziger Momentanpol,

- 2)  $\mathcal{L}$ -Translationen  $\Leftrightarrow$  kein Momentanpol,  
 3)  $\mathcal{L}$ -Ruhe  $\Leftrightarrow$  alle Punkte sind die Momentanpole.

**Satz 3.** Die sublaguerrischen Phasen des Types  $\mathcal{L}$ -Rotationen, bzw.  $\mathcal{L}$ -Translationen, bzw.  $\mathcal{L}$ -Ruhe werden durch  $q_2 = 0$  und  $q_1 \neq 0$ , bzw.  $q_1 = 0 \wedge q_0 \neq 0$ , bzw.  $(q_0, q_1, q_2) = (0, 0, 0)$  kennzeichnet.

Beweis folgt aus (10'').

## 5. PHASENBILDER DER GESCHWINDIGKEITSFELDER

Lösen wir die Riccatische Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten im dualen Gebiet

$$(6') \quad \dot{z} = q_0 + q_1 z + q_2 z^2$$

in den Fällen der einzelnen Typen der Phasen der  $\mathcal{L}$ -Bewegung.

I,1) *Reguläre hyperbolische Phase:*  $D_1 > 0$ ;  $\mathcal{R}q_2 \neq 0$ . Wir können immer das Koordinatensystem so transformieren, daß  $\mathcal{R}q_2 \neq 0$  ist. (6') transformieren wir durch

$$z = -\frac{1}{q_2} \frac{\dot{\mathfrak{z}}}{\mathfrak{z}}; \quad \mathfrak{z} \notin \mathfrak{N}$$

auf eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten im dualen Gebiet:

$$(11) \quad \mathfrak{z}'' - q_1 \mathfrak{z}' + q_0 q_2 \mathfrak{z} = 0.$$

(11) ist äquivalent zu zwei linearen Differentialgleichungen im reellen Gebiet ( $\mathfrak{z} = \mathfrak{z}_1 + \varepsilon \mathfrak{z}_2$ ,  $\mathfrak{z}' = \mathfrak{z}'_1 + \varepsilon \mathfrak{z}'_2 \dots$ ),

$$(12) \quad \begin{aligned} \mathfrak{z}_1'' - (\mathcal{R}q_1) \mathfrak{z}_1' + (\mathcal{R}q_0)(\mathcal{R}q_2) \mathfrak{z}_1 &= 0 \\ \mathfrak{z}_2'' - (\mathcal{R}q_1) \mathfrak{z}_2' + (\mathcal{R}q_0)(\mathcal{R}q_2) \mathfrak{z}_2 &= (\mathcal{D}q_1) \mathfrak{z}_1' - M \mathfrak{z}_1, \end{aligned}$$

wo  $M = (\mathcal{R}q_0)(\mathcal{D}q_2) + (\mathcal{D}q_0)(\mathcal{R}q_2)$  ist.

Beide Gleichungen (12) haben die gemeinsame charakteristische Gleichung

$$(13) \quad \lambda^2 - (\mathcal{R}q_1) \lambda + (\mathcal{R}q_0)(\mathcal{R}q_2) = 0$$

mit der Diskriminante  $D_1 > 0$ ; (13) hat zwei verschiedene reelle Wurzeln  $(\lambda_1)_i$ ;  $i = 1, 2$ .

Die Lösungen (12) sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= c_1 \exp((\lambda_1)_1 t) + c_2 \exp((\lambda_1)_2 t), \\ \mathfrak{z}_2 &= c_3 \exp((\lambda_1)_1 t) + c_4 \exp((\lambda_1)_2 t) + \mathfrak{z}_2^\wedge(t), \end{aligned}$$

wo  $\mathfrak{z}_2^\wedge(t) = At \exp((\lambda_1)_1 t) + Bt \exp((\lambda_1)_2 t)$ ;

$$A = c_1 \left[ \mathcal{D}q_1 \left( 1 + \frac{\mathcal{R}q_1}{\sqrt{D_1}} \right) - \frac{M}{\sqrt{D_1}} \right]; \quad B = c_2 \left[ \mathcal{D}q_1 \left( 1 + \frac{\mathcal{R}q_1}{\sqrt{D_1}} \right) + \frac{M}{\sqrt{D_1}} \right].$$

Die allgemeine Lösung von (11) ist:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{z} &= \mathfrak{z}_1 + \varepsilon \mathfrak{z}_2 = (c_1 + \varepsilon c_3 + \varepsilon A t) \exp((\lambda_1)_1 t) + \\
 &+ (c_2 + \varepsilon c_4 + \varepsilon B t) \exp((\lambda_1)_2 t) = |C_1 = c_1 + \varepsilon c_3; C_2 = c_2 + \varepsilon c_4| = \\
 &= C_1 \left(1 + \varepsilon \frac{A}{C_1} t\right) \exp((\lambda_1)_1 t) + C_2 \left(1 + \varepsilon \frac{B}{C_2} t\right) \exp((\lambda_1)_2 t) = \\
 &= \left|(\lambda_2)_1 = \mathcal{R}\left(\frac{A}{C_1}\right); (\lambda_2)_2 = \mathcal{R}\left(\frac{B}{C_2}\right)\right| = \\
 &= C_1 \exp([\lambda_1)_1 + \varepsilon(\lambda_2)_1] t) + C_2 \exp([\lambda_1)_2 + \varepsilon(\lambda_2)_2] t) = \\
 &= C_1 \exp((\lambda)_1 t) + C_2 \exp((\lambda)_2 t),
 \end{aligned}$$

wo

$$(\lambda)_i = (\lambda_1)_i + \varepsilon(\lambda_2)_i = \frac{1}{2}(\mathcal{R}q_1 \pm \sqrt{D_1}) + \varepsilon(\mathcal{D}q_1 \pm \frac{1}{4} \frac{\mathcal{D}(D)}{\sqrt{D_1}}); \quad i = 1, 2, \quad \text{ist.}$$

Also die Lösung von (6') in diesem Fall ist

$$z = - \frac{1}{q_2} \frac{(\lambda)_1 C_1 \exp((\lambda)_1 t) + (\lambda)_2 C_2 \exp((\lambda)_2 t)}{C_1 \exp((\lambda)_1 t) + C_2 \exp((\lambda)_2 t)}.$$

Für  $C_2/C_1 = \zeta$  bekommen wir die Darstellung der  $\mathcal{L}$ -Momentanbewegung in der gegebenen Phase:

$$(14) \quad z = - \frac{1}{q_2} \frac{(\lambda)_1 \exp((\lambda)_1 t) + \zeta(\lambda)_2 \exp((\lambda)_2 t)}{\exp((\lambda)_1 t) + \zeta \exp((\lambda)_2 t)}$$

(i) Für  $(\lambda)_2 - (\lambda)_1 = \overline{(\lambda)_2 - (\lambda)_1} = \lambda \in R$  kann man (14) in der Form

$$(15) \quad z = - \frac{1}{q_2} \frac{(\lambda)_1 + (\lambda)_2 \zeta e^{\lambda t}}{1 + \zeta e^{\lambda t}}$$

darstellen. (15) stellt die Bögen der isotropen Kreise (der Parabeln), bzw. zwei Geraden der translativen Punkte, dar. Die Punkte  $(-\lambda)_1/q_2$ ,  $(-\lambda)_2/q_2$  sind die Momentanpole und für die Bahnkurven der Momentanbewegung sind diese asymptotische Punkte; aus dem Standpunkt der Stabilität sind sie Knotenpunkte (der erste Punkt instabil und zweite Punkt stabil); das Phasenbild des Geschwindigkeitsfeldes im gegebenen Fall wird durch hyperbolisches Büschel der isotropen Kreise (Parabeln) kennzeichnet, s. Abb. 1.

(ii) Für  $(\lambda)_2 - (\lambda)_1 = \lambda = \lambda_1 + \varepsilon \lambda_2 \notin R (\Leftrightarrow \lambda_2 \neq 0)$  kann man (14) in der Form

$$(14') \quad z = - \frac{1}{q_2} \frac{(\lambda)_1 + \zeta(\lambda)_2 e^{\lambda_1 t} (1 + \varepsilon \lambda_2 t)}{1 + \zeta e^{\lambda_1 t} (1 + \zeta \lambda_2 t)}$$

darstellen. Transformieren wir das Koordinatensystem so, daß die Momentanpole symmetrisch zum Koordinatenursprung liegen werden. Dann ist  $\lambda_1 = 0$  und (14') kann man in der Form

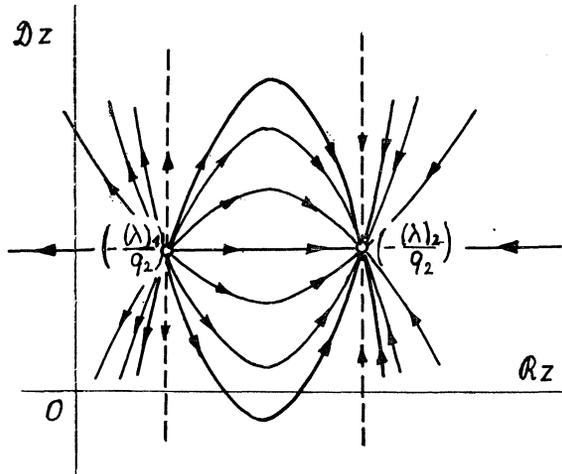


Abb. 1

$$(15') \quad z = -\frac{\lambda^0 (1 - \zeta) - \varepsilon \zeta \lambda_2 t}{q_2 (1 + \zeta) + \varepsilon \zeta \lambda_2 t}; \quad \lambda^0 = (\lambda)_1 = -(\lambda)_2,$$

schreiben. (15') stellt die Bögen der isotropen Kreise (der Parabeln) dar. Die Punkte  $(\lambda^0/q_2)$ ,  $(-\lambda^0/q_2)$  sind die Momentanpole und die Situation ist analogisch wie im Fall (i); das Phasenbild des Geschwindigkeitsfeldes in diesem Fall s. Abb. 2.

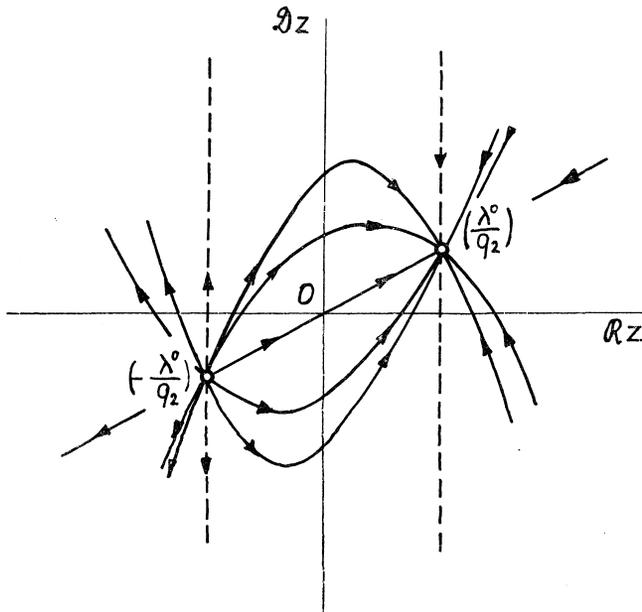


Abb. 2

Diese Situation ist invariant angesichts der Koordinatentransformation (die isotropen Kreise gehen in isotrope Kreise über).

I,2) *Reguläre parabolische Phase*:  $D_1 = D = 0$ ;  $\Re q_2 \neq 0$ . (6') transformieren wir durch

$$z = -\frac{1}{q_2} u - \frac{q_1}{2q_2}$$

auf

$$\dot{u} + u^2 = 0$$

und diese Differentialgleichung transformieren wir durch

$$u = \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{z}}; \quad \mathfrak{z} \in \mathfrak{R}$$

auf die lineare Differentialgleichung

$$\mathfrak{z}'' = 0.$$

Die Lösung von (6') in diesem Fall ist:

$$z = -\frac{1}{q_2} \left( \frac{C_1}{C_1 t + C_2} + \frac{1}{2} q_1 \right)$$

Legen wir  $C_1/C_2 = \zeta$ ; wir bekommen die folgende Darstellung der Momentanbewegung:

$$(16) \quad z = -\frac{1}{q_2} \left( \frac{\zeta}{\zeta t + 1} + \frac{1}{2} q_1 \right)$$

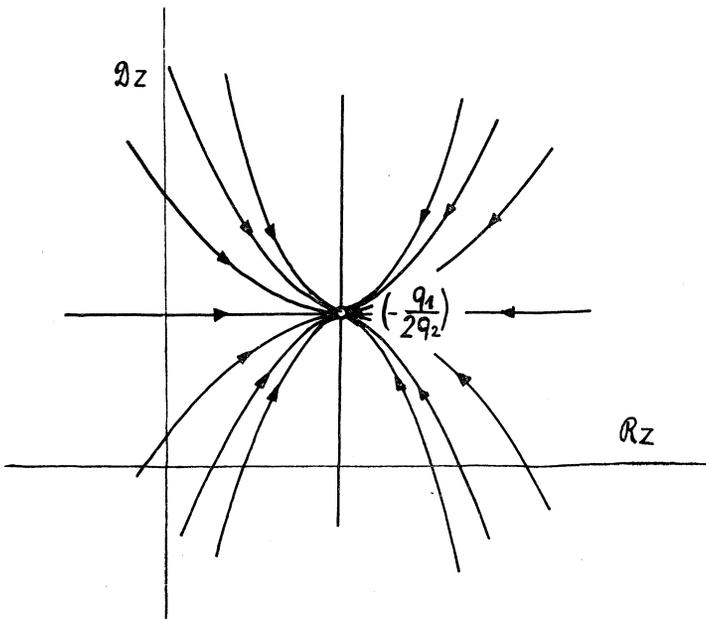


Abb. 3

(16) stellt die Bögen der isotropen Kreise (der Parabeln) dar. Der Punkt  $(-q_1/2q_2)$  ist ein Momentanpol;  $\mathcal{R}z = \mathcal{R}(-q_1/2q_2)$  ist die Gleichung einer Geraden der einander parallelen Momentanpole; für  $\mathcal{R}q_2 < 0$  ist  $(-q_1/2q_2)$  der stabile asymptotische Punkt der Bahnkurven. Das Phasenbild des Geschwindigkeitsfeldes in diesem Fall wird durch ein parabolisches Büschel der isotropen Kreise kennzeichnet, s. Abb. 3.

I,3) *Reguläre elliptische Phase* für  $D_1 < 0$ ;  $\mathcal{R}q_2 \neq 0$ . (6') transformieren wir auf (11) und (12). Die gemeinsame charakteristische Gleichung (13) hat die Diskriminante  $D_1 < 0$  und die Lösungen (12) sind

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1 &= c_1 \exp(\lambda_1 t) \cos \lambda_2 t + c_2 \exp(\lambda_1 t) \sin \lambda_2 t \\ \mathfrak{z}_2 &= c_3 \exp(\lambda_1 t) \cos \lambda_2 t + c_4 \exp(\lambda_1 t) \sin \lambda_2 t + \mathfrak{z}_2^{\wedge}(t), \end{aligned}$$

wo

$$\mathfrak{z}_2^{\wedge}(t) = At \exp(\lambda_1 t) \cos \lambda_2 t + Bt \exp(\lambda_1 t) \sin \lambda_2 t;$$

Wir können schreiben:

$$\mathfrak{z} = C_1 \left(1 + \varepsilon \frac{A}{C_1} t\right) \exp(\lambda_1 t) \cos(\lambda_2 t) + Bt \left(1 + \varepsilon \frac{B}{C_2} t\right) \exp(\lambda_1 t) \sin(\lambda_2 t),$$

und

$$(17) \quad z = -\frac{1}{q_2} \frac{\zeta \left( C_3 + \varepsilon \lambda_2 \frac{B}{C_2} t \right) + \left( C_4 - \varepsilon \lambda_2 \frac{A}{C_1} t \right) \operatorname{tg}(\lambda_2 t)}{\left( 1 + \varepsilon \frac{A}{C_1} t \right) + \zeta \left( 1 + \varepsilon \frac{B}{C_2} t \right) \operatorname{tg}(\lambda_2 t)}$$

(i) Für  $A = B = 0$  kann man (17) in folgenden Form schreiben:

$$(18) \quad z = \frac{C_3 \zeta + C_4 \tau}{1 + \zeta \tau}; \quad \tau = \operatorname{tg}(\lambda_2 t).$$

Das Phasenbild des Geschwindigkeitsfeldes in diesem Fall wird durch ein elliptisches Büschel der isotropen Kreise (der Parabeln) kennzeichnet, s. Abb. 4.

(ii) Für  $(A, B) \neq (0, 0)$  kann man die Bahnkurven der Momentanbewegung z.B. in der Form

$$y = d_1 x + d_2 + (d_3 x + d_4) \operatorname{arctg} \frac{c_{31} - c_{11} x}{c_{21} x - c_{41}}$$

schreiben, wo  $z = x + \varepsilon y$  und  $d_i, c_{ij}$  einander zusammenhängen.

I,4) *Reguläre elliptische Phase* für  $D_1 = 0 \wedge D \neq 0$ ,  $\mathcal{R}q_2 \neq 0$ . Wählen wir das Koordinatensystem so, daß  $q_1 = 0$ ,  $\mathcal{R}q_0 = 0$ . Wir bekommen (12) in der Form

$$\begin{aligned} \mathfrak{z}_1^{\bullet\bullet} &= 0 \\ \mathfrak{z}_2^{\bullet\bullet} &= -\mathfrak{z}_1(\mathcal{D}q_0)(\mathcal{R}q_2) \end{aligned}$$

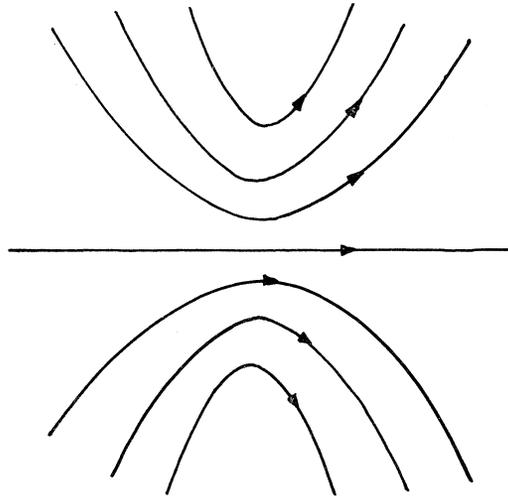


Abb. 4

und

$$\mathfrak{z}_1 = c_1 t + c_2$$

$$\mathfrak{z}_2 = c_1 t + c_2 + \mathfrak{z}_2^\wedge(t),$$

wo  $\mathfrak{z}_2^\wedge(t) = At^3 + Bt^2$ ;  $A = -\frac{1}{6}c_1 G$ ;  $B = -\frac{1}{2}c_2 G$ ;  $G = (\mathcal{D}q_0)(\mathcal{R}q_2)$  ist.

Legen wir  $\zeta = C_1/C_2$ ; wir bekommen in diesem Fall folgende Darstellung der Momentanbewegung:

$$(19) \quad z = -\frac{1}{q_2} \frac{\zeta[1 + \varepsilon(1 - Gt^2)] - \varepsilon Gt}{\zeta[t + \varepsilon(t - \frac{1}{3}Gt^3)] + 1 + \varepsilon(1 - \frac{1}{2}Gt^2)}.$$

Das Phasenbild des Geschwindigkeitsfeldes in diesem Fall für  $G \neq 0$  hat eine Gerade der translativen Punkte; bei unserer Wahl des Koordinatensystems ist diese Gerade die duale Achse, s. Abb. 5. Für  $G = 0$  wird das Phasenbild durch ein elliptisches Büschel der isotropen Kreise gekennzeichnet; in diesem Fall vgl. (19) und (18).

II,1) Singuläre hyperbolische Phase:  $q \in \mathfrak{N}^3$ ,  $D_2 > 0$ ,  $D_1 = 0$ ,  $\mathcal{D}q_2 \neq 0$ . (6') ist äquivalent mit den Gleichungen:

$$\mathcal{R}\dot{z} = 0$$

$$\mathcal{D}\dot{z} = \mathcal{D}q_0 + (\mathcal{D}q_1)(\mathcal{R}z) + (\mathcal{D}q_2)(\mathcal{R}z)^2.$$

Die Darstellung der Momentanbewegung in diesem Fall ist:

$$(20) \quad z = \zeta + \varepsilon[\mathcal{D}q_0 + \mathcal{D}q_1\zeta + \mathcal{D}q_2\zeta^2]t.$$

Die Bahnkurven sind die mit der dualen Achse parallelen Geraden; diese Phase hat zwei mit der dualen Achse parallelen Geraden

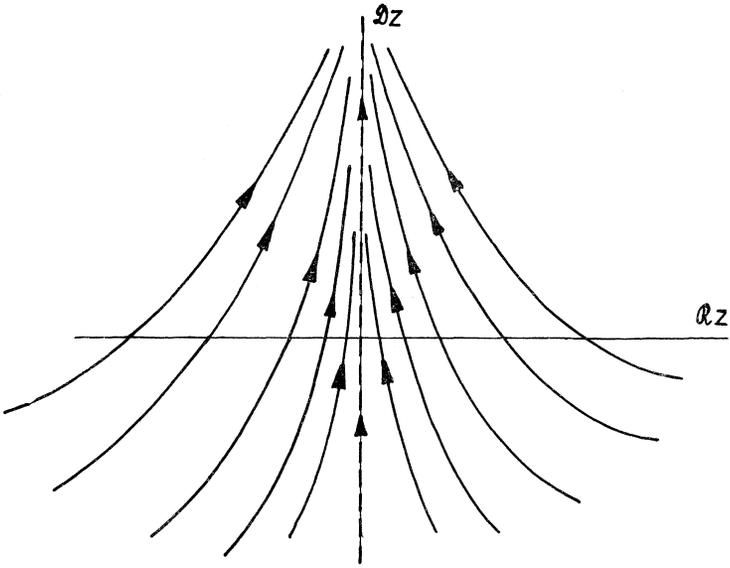


Abb. 5

$$p_i \equiv \mathcal{R}z = \frac{-\mathcal{D}q_1 \pm \sqrt{D_2}}{(\mathcal{D}q_2)^2}; \quad i = 1, 2,$$

der Momentanpole; die Orientierung der Bahnkurven s. Abb. 6.

II,2) *Singuläre parabolische Phase*:  $q \in \mathfrak{R}^3$ ,  $D_2 = 0$ ,  $D_1 = 0$ ,  $\mathcal{D}q_2 \neq 0$ . Die Momentanbewegung hat auch eine Darstellung der Form (20). Das Phasenbild: eine Gerade

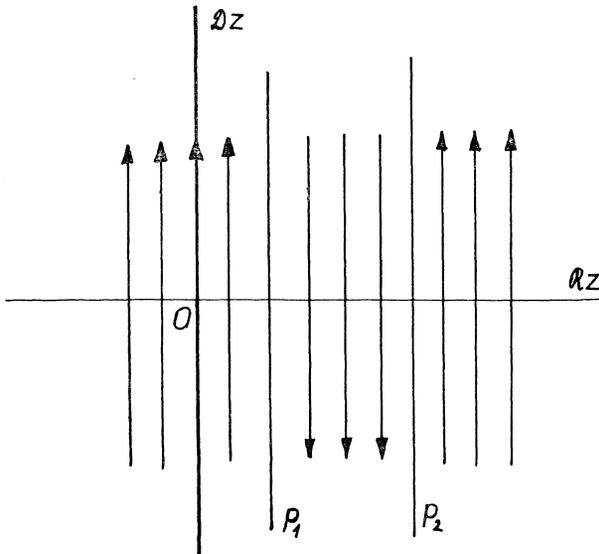


Abb. 6

$$p \equiv \mathcal{R}z = - \frac{\mathcal{D}q_1}{\mathcal{D}q_2}$$

der einander parallelen Momentanpole; die Bahnkurven sind die mit der dualen Achse parallelen Geraden.

II,3) *Singuläre elliptische Phase*:  $q \in \mathfrak{N}^3$ ,  $D_2 < 0$ ,  $D_1 = 0$ ,  $\mathcal{D}q_2 \neq 0$ . Die Momentanbewegung hat auch eine Darstellung der Form (20). Das Phasenbild: kein Momentanpol; die Bahnkurven sind die mit der dualen Achse parallelen Geraden.

III,1) *Sublaguerresche Phase vom Typ einer  $\mathcal{L}$ -Rotation*:  $q_2 = 0 \wedge q_1 \neq 0$ . (6') hat die Form

$$\dot{z} = q_0 + q_1 z$$

Ihre Lösung ist

$$z = - \frac{q_0}{q_1} + C \exp(q_1 t)$$

und die Momentanbewegung hat diese Darstellung:

$$z = - \frac{q_0}{q_1} + \zeta \exp(q_1 t)$$

Diese Phase hat einen einzigen Momentanpol  $(-q_0/q_1)$  und eine Gerade

$$\mathcal{R}z = \mathcal{R} \left( - \frac{q_0}{q_1} \right)$$

der translativen Punkte. Der Momentanpol  $(-q_0/q_1)$  ist der asymptotische Punkt der Bahnkurven; für  $0 < \mathcal{R}q_1 < \mathcal{D}q_1$ , s. Abb. 7.

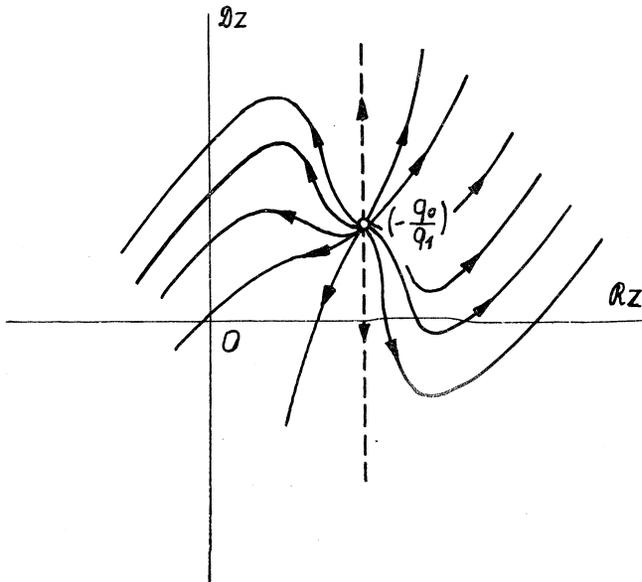


Abb. 7

III,2) *Sublaguerresche Phase vom Typ einer  $\mathcal{L}$ -Translation*:  $q_2 = 0 \wedge q_1 = 0 \wedge q_0 \neq 0$ . (6') hat die folgende Form:

$$\dot{z} = q_0$$

Ihre Lösung ist

$$z = q_0 t + C,$$

und die Momentanbewegung hat die Darstellung:

$$z = q_0 t + \zeta$$

Diese Phase hat keinen Momentanpol; die Richtung der Translation wird durch den Vektor  $q_0$  gegeben.

III,3) *Sublaguerresche Phase „ $\mathcal{L}$ -Ruhe“*:  $q_0 = q_1 = q_2 = 0$ . Alle Punkte sind Momentanpole.

#### Literatur

- [1] *I. M. Yaglom*: Complex Numbers in Geometry. Leicester 1967 (Englisch).
- [2] *W. Blaschke, G. Thomsen*: Differentialgeometrie III. Differentialgeometrie der Kreise und Kugeln. Verlag J. Springer, Berlin 1929.
- [3] *W. Benz*: Vorlesungen über Geometrie der Algebren. Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1973.
- [4] *H. Frank*: Kinematik in der Laguerre-Ebene I. J. Geometry 7/2 (1976), S. 53—84.
- [5] *F. M. Dimentberg*: Theorie der Schrauben und ihre Anwendungen. Nauka, Moskva 1978 (Russisch).
- [6] *F. M. Dimentberg*: Schraubenrechnung. Nauka, Moskva 1965 (Russisch).
- [7] *L. Granát*: Duale Zahlen und ihre Anwendungen in der Liniengeometrie und in räumlicher Kinematik. Acta polytechnica - Práce ČVUT v Praze, IV, 1, 1967, S. 5—19.
- [8] *Z. Jankovský*: Zur Laguerreschen Ebenegeometrie. Čas. pěst. mat. 109 (1984), 3, S. 236—249

Souhrn

### FÁZOVÉ PORTRÉTY POLÍ RYCHLOSTÍ LAGUERREOVÝCH POHYBŮ

ZDENĚK JANKOVSKÝ

Článek se zabývá některými otázkami kinematické geometrie vybudované na Laguerreově grupě ( $\mathcal{L}$ -grupě).  $\mathcal{L}$ -grupa je reprezentována grupou přímých lineárních lomených transformací rozšířené duální roviny; rozšířená duální rovina je jedním z modelů  $\mathcal{L}$ -roviny. V článku jsou definovány a zkoumány pojmy  $\mathcal{L}$ -pohybu, rychlostí  $\mathcal{L}$ -pohybu, vektorových polí rychlostí a okamžitých pólů. Jsou klasifikovány fáze  $\mathcal{L}$ -pohybu a určeny jejich fázové portréty.

## Резюме

### ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ПОЛЕЙ СКОРОСТЕЙ ДВИЖЕНИЙ ЛАГЕРА

ZDENĚK JANKOVSKÝ

В статье изучаются некоторые вопросы кинематической геометрии построенной на группе Лагера ( $\mathcal{L}$ -группа).  $\mathcal{L}$ -группа представлена группой прямых дробно-линейных преобразований дополненной дуальной плоскости; дополненная дуальная плоскость — это одна из моделей  $\mathcal{L}$ -плоскости. В статье определяются и изучаются понятия  $\mathcal{L}$ -движения, скорости  $\mathcal{L}$ -движения в данной точке и во фазе, векторных полей скоростей  $\mathcal{L}$ -движения и полюсов. Классифицируются также фазы  $\mathcal{L}$ -движения и определяются их фазовые портреты.

*Anschrift des Verfassers:* Doc. RNDr. Zdeněk Jankovský, CSc., katedra matematiky, fakulty elektrotechnické ČVUT, Suchbátarova 2, 166 27 Praha 6.