Květomil Stach

Eine Äquivalenzrelation in der Kategorie der Phasenfunktionen

Archivum Mathematicum, Vol. 7 (1971), No. 4, 159--166

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/104750`

SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS, ARCH. MATH, 4,
VII: 159—166, 1971

EINE ÄQUIVALENZRELATION IN DER KATEGORIE DER PHASENFUNKTIONEN

KVĚTOMIL STACH

(Eingegangen am 15. Juni 1970)

EINLEITUNG

In meiner Arbeit [3] habe ich den Begriff der Phasenfunktion, den O. Borůvka in [1] eingeführt hatte, verallgemeinert. Eine Phasenfunktion oder genauer eine Phasenfunktion auf dem Interval $[a, b]$ ist eine Funktion α, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

1. α ist in $[a, b]$ definiert.
2. α ist in $[a, b]$ stetig.
3. für jede $c, d \in [a, b]$, $c < d$ und für jedes $x \in E_1$ hat die Gleichung $\alpha(t) = x$ nur endlich viele Wurzeln auf dem Intervall $\langle c, d\rangle$ [D.3.1.1].

Dabei ist $[a, b]$ ein beliebiges (geschlossenes, halbgeschlossenes oder offenes) Intervall, $\langle a, b\rangle$ ist ein geschlossenes und (a, b) ein offenes Intervall. Die Menge aller Phasenfunktionen auf dem Intervall $[a, b]$ habe ich als $P_{[a,b]}$ und die Menge aller Phasenfunktionen überall als P bezeichnet. Weiter habe ich unter $\varepsilon_{[a,b]}$ die Funktion $\varepsilon(t) = t$ für $t \in [a,b]$ verstanden [D.3.1.2]. Zu jeder Funktion $\alpha \in P_{[a,b]}$, für die $\alpha([a, b]) = [c, d]$ ist, habe ich zwei Funktionen $\mathrm{r}(\alpha)$ und $\mathrm{l}(\alpha)$ geordnet: $\mathrm{r}(\alpha) = \varepsilon_{[a,b]}$, $\mathrm{l}(\alpha) = \varepsilon_{[c,d]}$, die ich als die rechte und die linke Einheitsfunktionen der Funktion α genannt habe. [D.3.1.1]. Weiter habe ich zu je zwei Phasenfunktionen $\alpha \in P_{[a,b]}$, $\beta \in P_{[c,d]}$, für die $\beta([c, d]) = [a, b]$ ist, eine dritte Phasenfunktion $\varphi(\alpha, \beta) = \gamma \in P_{[c,d]}$ zugeordnet, und zwar so, daß $\gamma(t) = \alpha[\beta(t)]$ für $t \in [c, d]$ ist. Anstatt γ schreibe ich oft $\alpha\beta$. [D.3.3.1]. Ich habe gezeigt, daß die Algebra $\mathbf{P} = (P;\ \mathrm{l}, \mathrm{r}, \varphi)$ eine Kategorie im Sinne des Buchs [2] ist.

O. Borůvka hatte in die Phasengruppe eine Äquivalenzrelation eingeführt [1 — § 10.2]. In der vorliegenden Arbeit setze ich meine Studien der Kategorie **P** fort, und zwar so, daß ich den Begriff der obenerwähnten Äquivalenzrelation aus [1] auf die Kategorie **P** erweitere. Bei diesen Studien weise ich oft auf die Arbeit [3] hin. Ich tue es so, daß ich vor die Zahl den Definitionen und Sätzen aus [3] die Vorzahl **3** gebe. Also Satz 2.2 aus [3] ist als S.3.2.2, die Definition 1.2 aus [3] als D.3.1.2 bezeichnet. In den Hinweisen auf das Buch [2] bezeichne ich es mit dem Buchstaben [H]. Z. B. H — D.4.4 ist die Definition 4.4 aus dem Buch [2].

§ 1: MANCHE MORPHISMEN IN P

Satz 1.1. Jede Phasenfunktion ist ein Monomorhismus [H-D.4.4] in **P**, d.h. mon **P** = **P** oder **P** ist eine rechtsreguläre Kategorie [H — Seite 118_{15}].

Beweis: Es sei $\alpha \in P$. Wählen wir $\beta, \gamma \in P$ so, daß $(\beta, \alpha) \in \mathrm{D}(\varphi)$, $(\gamma, \alpha) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $\beta\alpha = \gamma\alpha$. Dann ist $\mathrm{D}(\beta) = \alpha[\mathrm{D}(\alpha)] = \mathrm{D}(\gamma)$. Wählen wir $x_0 \in \mathrm{D}(\beta) = \alpha[\mathrm{D}(\alpha)]$. Dann existiert $t_0 \in \mathrm{D}(\alpha)$, so daß $x_0 = \alpha(t_0)$ ist. Folglich

$$\beta(x_0) = \beta[\alpha(t_0)] = \gamma[\alpha(t_0)] = \gamma(x_0)$$

Also für jedes $x \in \mathrm{D}(\beta) = \mathrm{D}(\gamma)$ ist $\beta(x) = \gamma(x)$. Folglich $\beta = \gamma$ und unser Satz ist bewiesen.

Satz 1.2. Es sei $\alpha \in M$. Dann ist α ein Epimorphismus in **P** [H-D.4.4].

Beweis: Wählen wir $\alpha \in M$, $\xi \in P$, $\eta \in P$, so daß $\alpha\xi = \alpha\eta$. Da $D(\alpha\xi) = D(\xi)$ und $D(\alpha\eta) = D(\eta)$ ist, ist $D(\xi) = D(\eta)$. Wählen wir $t_0 \in D(\xi)$. Dann ist $\alpha[\xi(t_0)] = \alpha[\eta(t_0)] = \alpha_0$. Da $\alpha \in M$ ist, existiert ein einziges $x_0 \in D(\alpha)$ so, daß $\alpha(x_0) = \alpha_0$. Folglich $\xi(t_0) = x_0 = \eta(t_0)$. Also $\xi = \eta$ und unser Satz ist bewiesen.

Satz 1.3. Es sei $\alpha \in P$ und es existiere mindestens ein isolierter Extrempunkt $t_0 \in D(\alpha) = [a, b]$. Dann ist α kein Epimorphismus in **P**.

Beweis: Wir führen ihn für den Fall, daß t_0 ein Maximum ist, vor. Da t_0 ein isolierter Extrempunkt ist, existieren Punkte t_1, $t_2 \in D(\alpha)$ so, daß

1. $a < t_1 < t_0 < t_2 < b$
2. $\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$
3. in $\langle t_1, t_0\rangle$ ist α wachsend, in $\langle t_0, t_2\rangle$ fallend. Bezeichnen wir $\alpha(t_0) = x_0$, $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = x_1$. Erwägen wir die Funktionen $\alpha_1 \in P_{\langle t_1, t_0\rangle}$ und $\alpha_2 \in P_{\langle t_0, t_2\rangle}$, für die

$$\alpha_1(t) = \alpha(t) \quad \text{für} \quad t \in \langle t_1, t_0\rangle,$$

$$\alpha_2(t) = \alpha(t) \quad \text{für} \quad t \in \langle t_0, t_2\rangle.$$

Die Funktion α_1 ist wachsend, α_2 ist fallend und es gilt: $\alpha_1(\langle t_1, t_0\rangle) = \alpha_2(\langle t_0, t_2\rangle) = \langle x_1, x_0\rangle$. Bezeichnen wir mit α_1^{-1} die inverse Funktion zu α_1. Dann ist $D(\alpha_1^{-1}) = \langle x_1, x_0\rangle$, $\alpha_1^{-1}[D(\alpha^{-1})] = \langle t_1, t_0\rangle$. Folglich $(\alpha_1^{-1}, \alpha_2) \in D(\varphi)$ und $D(\alpha_1^{-1}\alpha_2) = \langle t_0, t_2\rangle$, $\alpha_1^{-1}[\alpha_2(\langle t_0, t_2\rangle)] = \langle t_1, t_0\rangle$.

Wählen wir einen beliebigen Punkt $t_3 \in (t_2, b)$ und konstruieren wir die Funktionen

$$\xi_3 = \frac{t_2(t - t_3) - t_0(t - t_2)}{t_2 - t_3} \quad \text{für} \quad t \in \langle t_2, t_3\rangle$$

$$\xi_4 = \frac{t_0(t - b) - b(t - t_3)}{t_3 - b} \quad \text{für} \quad t \in \langle t_3, b\rangle$$

wenn $b \neq +\infty$ oder

$$\xi_4 = t + (t_0 - t_3)$$

wenn $b = +\infty$ ist.

Ferner setzen wir

$$\xi_1 = {}_{\langle}\varepsilon_{a, t_0\rangle} \qquad \xi_2 = \varepsilon_{\langle t_0, t_2\rangle}$$

Wie man leicht sieht, ist die Funktion

(2) $$\xi(t) = \begin{cases} \xi_1(t) & t \in \langle a, t_0\rangle \\ \xi_2(t) & t \in \langle t_0, t_2\rangle \\ \xi_3(t) & t \in \langle t_2, t_3\rangle \\ \xi_4(t) & t \in \langle t_3, b\rangle \end{cases}$$

eine Phasenfunktion auf dem Intervall $[a, b]$ und es gilt:

(3) $$\xi([a, b]) = [a, b]$$

Ferner ist $\xi_3(\langle t_2, t_3\rangle) = \langle t_0, t_2\rangle = D(\alpha_1^{-1}\alpha_2)$. Deshalb: $(\alpha_1^{-1}\alpha_2, \xi_3) \in D(\varphi)$ und $\eta_1 = \alpha_1^{-1}\alpha_2\xi_3 \in P_{\langle t_2, t_3\rangle}$. Wir können wieder leicht zeigen, daß die Funktion

$$(4) \qquad \eta(t) = \begin{cases} \xi(t) & t \in [a, t_0\rangle \cup \langle t_3, b] \\ \alpha_1^{-1}[\alpha_2(t)] & t \in \langle t_0, t_2\rangle \\ \eta_1(t) & t \in \langle t_2, t_3\rangle \end{cases}$$

eine von $\xi(t)$ verschiedene Phasenfunktion auf dem Intervall $[a, b]$ ist und es gilt:

$$(5) \qquad \eta([a, b]) = [a, b].$$

Aus (3) und (5) folgt: $(\alpha, \xi) \in D(\varphi)$, $(\alpha, \eta) \in D(\varphi)$.

Jetzt werden wir zeigen, daß

$$(6) \qquad \alpha[\xi(t)] = \alpha[\eta(t)]$$

für jedes $t \in [a, b]$ gilt. Für $t \in [a, t_0\rangle \cup \langle t_3, b]$ ist es evident. Es sei $t \in \langle t_0, t_2\rangle$. Dann ist $\xi(t) = t \in \langle t_0, t_2\rangle$, $\eta(t) = \alpha_1^{-1}[\alpha_2(t)] \in \langle t_1, t_0\rangle$ und deshalb: $\alpha[\xi(t)] = \alpha_2(t)$; $\alpha[\eta(t)] = \alpha[\alpha_1^{-1}(\alpha_2(t))] = \alpha_1[\alpha_1^{-1}(\alpha_2(t))] = \alpha_2(t)$, wovon $\alpha[\xi(t)] = \alpha[\eta(t)]$.

Endlich sei $t \in \langle t_2, t_3\rangle$. Dann ist $\xi(t) = \xi_3(t) \in \langle t_0, t_2\rangle$, $\eta(t) = \eta_1(t) \in \langle t_1, t_0\rangle$ und deshalb: $\alpha[\xi(t)] = \alpha_2[\xi_3(t)]$; $\alpha[\eta(t)] = \alpha_1[\eta_1(t)] = \alpha_1\{\alpha_1^{-1}[\alpha_2(\xi_3(t))]\} = \alpha_2[\xi_3(t)]$, wovon wieder $\alpha[\xi(t)] = \alpha[\eta(t)]$. Da $\xi \neq \eta$ ist, ist α kein Epimorphismus.

Satz 1.4. Es sei $\alpha \in M$. Dann existiert gerade eine Funktion $\alpha^{-1} \in P$ so, daß

$$\alpha^{-1}\alpha = r(\alpha), \qquad \alpha\alpha^{-1} = l(\alpha)$$

Dabei ist $\underset{\sim}{\alpha}^{-1} \in \underset{\sim}{M}$.

Beweis: Dieser Satz ist ein bekannter Satz über die inversen Funktionen zu den monotonen Funktionen.

Satz 1.5. Es sei α non $\in M$. Dann existiert keine Funktion $\beta \in P$, so daß weder $\beta\alpha = r(\alpha)$ noch $\alpha\beta = l(\alpha)$ ist.

Beweis: I. Setzen wir voraus, daß eine solche Funktion $\beta \in P$ existiert, für die

$$(1) \qquad \alpha\beta = l(\alpha) = \varepsilon_{\alpha([a,b])}$$

ist. Bezeichnen wir $D(\alpha) = [a, b]$, $D(\beta) = [c, d]$. Dann muß $\beta([c, d]) = [a, b]$ sein, aber auch, da $l(\alpha) = \varepsilon_{\alpha([a,b])} = \alpha\beta$ ist, $\alpha([a, b]) = [c, d]$. Aus α non $\in M$ folgt, daß ein solches $x_1 \in [c, d]$ existiert, daß die Gleichung

$$(2) \qquad \alpha(t) = x_1$$

mindestens zwei Wurzeln in $[a, b]$ hat. Da $x_1 \in [c, d]$ ist, existiert $\beta(x_1) = t_1$. Bezeichnen wir mit t_2 irgendwelche Wurzel der Gleichung (2) in $[a, b]$, für die $t_2 \neq t_1$ gilt. Da $t_2 \in [a, b] = \beta([c, d])$, existiert $x_2 \in [c, d]$ so, daß $\beta(x_2) = t_2$ ist. Aus (1) folgt:

$$\alpha[\beta(x_2)] = x_2$$

Aus (2) folgt:

$$\alpha[\beta(x_2)] = \alpha(t_2) = x_1$$

was ein Widerspruch ist, da $x_2 \neq x_1$ ist.

II. Setzen wir voraus, daß eine solche Funktion $\beta \in P$ existiert, daß $\beta\alpha = r(\alpha) = t$ für $t \in D(\alpha)$ ist. Da α non $\in M$ ist, existieren t_1, $t_2 \in D(\alpha)$, $t_1 \neq t_2$ so, daß $\alpha(t_1) = \alpha(t_2) = x_1$. Folglich $\beta[\alpha(t_1)] = \beta(x_1) = t_1$, $\beta[\alpha(t_2)] = \beta(x_1) = t_2$, also $t_1 = t_2$, was ein Widerspruch ist.

Satz 1.6. $\mathbf{M} = \text{iso}\,\mathbf{P}$ [H-Seite 128_{12-2}].

Beweis: S. 1.4 und S. 1.5.

§ 2: EINE ÄQUIVALENZRELATION IN P

Satz 2.1. Es sei $\alpha \in P$ und $|c_{ik}| \neq 0$ eine Determinante 2. Ordnung $(i, k = 1, 2)$. Dann existiert eine Phasenfunktion $\beta \in P$ so, daß $\mathrm{D}(\alpha) = \mathrm{D}(\beta)$ und

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}} \tag{1}$$

für alle $t \in \mathrm{D}(\alpha)$, für die $\alpha(t) \neq \pi/2 + k\pi$ (k ganz) und $c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22} \neq 0$ ist.

Beweis: Wählen wir $\alpha \in P$. Nach S. 3.1.1 existiert ein Raum $\mathfrak{S}$, dessen Phase die Funktion α ist. Bezeichnen wir mit (u, v) eine Basis des Raums $\mathfrak{S}$, die α als ihre Phase hat. Nach [5] S. 2.4 ist

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{2}$$

für alle t, für die $v(t) \neq 0$ ist.

Es sei $|c_{ik}| \neq 0$ $(i, k = 1, 2)$ eine Determinante 2. Ordnung. Die Funktionen $u_1 = c_{11}u + c_{12}v$ und $v_1 = c_{21}u + c_{22}v$ bilden nach [5] S. 1.1 eine Basis des Raums $\mathfrak{S}$. Es sei β eine Phase der Basis (u_1, v_1). Nach [5] S. 2.4 gilt für alle t, für die $c_{21}u(t) + c_{22}v(t) \neq 0$ ist:

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{u_1(t)}{v_1(t)} = \frac{c_{11}u(t) + c_{12}v(t)}{c_{21}u(t) + c_{22}v(t)} \tag{3}$$

Wenn $v(t) \neq 0$ ist, ist nach (2) auch $\alpha(t) \neq \pi/2 + k\pi$ und wir können (3) in Hinsicht auf (2) auf (1) zubereiten.

Definition 2.1. Wir sagen, daß die Phasenfunktionen α und β äquivalent sind und schreiben $\alpha \sim \beta$ wenn:

1. $\mathrm{D}(\alpha) = \mathrm{D}(\beta)$
2. Es existiert eine Determinante $|c_{ik}| \neq 0$, so daß (1) aus S. 2.1 erfüllt ist.

Satz 2.2. Die Äquivalenzrelation aus D. 2.1 ist reflexiv, symetrisch und transitiv.

Beweis: 1. Wenn wir in D. 2.1 $|c_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ setzen, erhalten wir $\alpha \sim \alpha$.

2. Es sei $\alpha \sim \beta$. Aus (1) in D. 2.1 erhalten wir

$$\operatorname{tg} \alpha(t)[c_{21} \operatorname{tg} \beta(t) - c_{11}] = -c_{22} \operatorname{tg} \beta(t) + c_{12}$$

und deshalb haben wir für $c_{21} \operatorname{tg} \beta(t) - c_{11} \neq 0$

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{-c_{22} \operatorname{tg} \beta(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \beta(t) - c_{11}}$$

wobei $\begin{vmatrix} -c_{22} & c_{12} \\ c_{21} & -c_{11} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ ist. Folglich $\beta \sim \alpha$.

3. Es sei $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$. Dann ist

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}}; \quad \operatorname{tg} \gamma(t) = \frac{k_{11} \operatorname{tg} \beta(t) + k_{12}}{k_{21} \operatorname{tg} \beta(t) + k_{22}}$$

wovon

$$\operatorname{tg} \gamma(t) = \frac{(k_{11}c_{11} + k_{12}c_{12}) \operatorname{tg} \alpha(t) + (k_{11}c_{12} + k_{12}c_{22})}{(k_{21}c_{11} + k_{22}c_{21}) \operatorname{tg} \alpha(t) + (k_{21}c_{12} + k_{22}c_{22})}$$

wo

$$\begin{vmatrix} k_{11}c_{11} + k_{12}c_{21} & k_{11}c_{12} + k_{12}c_{22} \\ k_{21}c_{11} + k_{22}c_{21} & k_{21}c_{12} + k_{22}c_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Also $\alpha \sim \gamma$. Unser Satz ist bewiesen.

Satz 2.3. Es sei $\alpha \sim \beta$. Der Raum $\mathfrak{S}$ habe die Funktion α für seine Phase. Dann ist auch β die Phase des Raums $\mathfrak{S}$. Umgekehrt: wenn α und β die Phasen desselben Raums $\mathfrak{S}$ sind, ist $\alpha \sim \beta$.

Beweis: 1. Es sei $\alpha \sim \beta$. Wählen wir irgendeinen Raum $\mathfrak{S}$, der die Funktion α für seine Phase hat. Nach S. 3.1.1 existiert ein solcher Raum. Bezeichnen wir mit (u, v) eine Basis der Phase α. Nach [5] S. 2.4 ist:

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)} \tag{1}$$

für alle t, für die (1) einen Sinn hat. Da $\alpha \sim \beta$ ist, existieren reelle Zahlen c_{ik} $(i, k = 1, 2)$, so daß

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11} \dfrac{u(t)}{v(t)} + c_{12}}{c_{21} \dfrac{u(t)}{v(t)} + c_{22}}$$

d. h.

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11}u(t) + c_{12}v(t)}{c_{21}u(t) + c_{22}v(t)} \tag{2}$$

Da $| c_{ik} | \neq 0$, ist $(c_{11}u + c_{12}v,\ c_{21}u + c_{22}v)$ eine Basis des Raums $\mathfrak{S}$ und aus (2) folgt, daß β die Phase dieser Basis ist.

2. Es seien α, β die Phasen des Raums $\mathfrak{S}$. Bezeichnen wir (u, v) resp. (u_1, v_1) die Basen, deren Phasen α resp. β sind. Nach [5] S. 2.4 ist

$$\operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{u(t)}{v(t)}, \qquad \operatorname{tg} \beta(t) = \frac{u_1(t)}{v_1(t)} \tag{3}$$

Da (u, v) und (u_1, v_1) die Basen desselben Raums $\mathfrak{S}$ sind, existiert eine Determinante $| c_{ik} | \neq 0$, so daß

$$u_1 = c_{11}u + c_{12}v, \qquad v_1 = c_{21}u + c_{22}v \tag{4}$$

ist. Aus (3) und (4) folgt:

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11}u + c_{12}v}{c_{21}u + c_{22}v} = \frac{c_{11}(u : v) + c_{12}}{c_{21}(u : v) + c_{22}} = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{21}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}}$$

Also: $\alpha \sim \beta$.

§ 3: DAS UNTERGRUPPOID F

Satz 3.1. Es sei $\alpha \sim \varepsilon_{[a,b]}$. Dann ist $\alpha \in M$.

Beweis: Nach S. 3.1.1 und S. 2.3 sind α und $\varepsilon_{[a,b]}$ die Phasen desselben Raums $\mathfrak{S}$. $\varepsilon_{[a,b]} \in M$ und hat deshalb keine Extrempunkte. Nach [5] S. 3.1 hat auch α keine Extrempunkte. Folglich $\alpha \in M$.

Satz 3.2. Es sei $\alpha \sim \varepsilon_{[a,b]}$, $\beta \sim \varepsilon_{[c,d]}$, $(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Dann ist $\alpha\beta \sim \varepsilon_{[c,d]}$.

Beweis: Da $\alpha \sim \varepsilon_{[a,b]}$ und $\beta \sim \varepsilon_{[c,d]}$, existieren die Determinanten $|c_{ik}| \neq 0$, $|d_{ik}| \neq 0$ $(i, k = 1, 2)$, so daß

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} t + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} t + c_{22}}, \quad \operatorname{tg} \beta(t) = \frac{d_{11} \operatorname{tg} t + d_{12}}{d_{21} \operatorname{tg} t + d_{22}}$$

Aus $(\alpha, \beta) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und aus (1) folgt:

$$\operatorname{tg} \alpha[\beta(t)] = \frac{(c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21}) \operatorname{tg} t + (c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22})}{(c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21}) \operatorname{tg} t + (c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22})}$$

wobei

$$\begin{vmatrix} c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} \\ c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21} & c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

Folglich $\alpha\beta \sim \varepsilon_{[c,d]}$.

Satz 3.3. Es sei $\alpha \sim \varepsilon_{[a,b]}$ und $\alpha([a, b]) = [c, d]$. Dann ist $\alpha^{-1} \sim \varepsilon_{[c,d]}$.

Beweis: Es existiert die Determinante $|c_{ik}| \neq 0$ $(i, k = 1, 2)$, so daß für alle $t \in [a, b]$, für die die Formell Sinn hat, gillt:

$$\text{(1)} \qquad \operatorname{tg} \alpha(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} t + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} t + c_{22}}$$

Nach S. 3.1 existiert die inverse Funktion α^{-1} und es ist $\mathrm{D}(\alpha^{-1}) = [c, d]$, $\alpha^{-1}([c, d]) = [a, b]$. Setzen wir in (1) statt t $\alpha^{-1}(\xi)$, wobei $\xi \in [c, d]$ und $\alpha^{-1}(\xi) \in [a, b]$.

Wir erhalten

$$\frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha^{-1}(\xi) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha^{-1}(\xi) + c_{22}} = \operatorname{tg} \alpha[\alpha^{-1}(\xi)] = \operatorname{tg} \xi,$$

wovon $\alpha^{-1} \sim \varepsilon_{[c,d]}$.

Satz. 3.4. Es sei F die Menge aller Phasenfunktionen, für die

$$\alpha \in F \Leftrightarrow \exists\, \varepsilon(\varepsilon \in E \wedge \alpha \sim \varepsilon)$$

Die Teilalgebra **F** der Kategorie **P** mit der Trägermenge F ist ein Untergruppoid der Kategorie **P**.

Beweis: 1. Nach S. 3.2, S. 3.3 und [H] S. 2.39 ist **F** ein Teilgruppoid.

2. Es sei $\varepsilon \in E$. Dann ist $\varepsilon \sim \varepsilon$ und deshalb $\varepsilon \in F$. Folglich $E \subset F$ und **F** ist ein Untergruppoid der Kategorie **P**.

Definition 3.1. Das Gruppoid **F** aus S. 3.4 heißt das Fundamentalgruppoid in der Kategorie der Phasenfunktionen.

Satz 3.5. Die Algebren $\mathbf{F_W} = \mathbf{F} \cap \mathbf{W}, \mathbf{F_F} = \mathbf{M_F} \cap \mathbf{F}, \mathbf{F_G} = \mathbf{M_G} \cap \mathbf{F}, \mathbf{F_{WF}} = \mathbf{F} \cap \mathbf{W_F}$ und $\mathbf{F_{WG}} = \mathbf{F} \cap \mathbf{W_G}$ sind Gruppoiden.

Beweis: S. 4.2, S. 3.4.2, S. 3.4,1, [H] S. 2.40

Bemerkung 3.1. Die Gruppoide $\mathbf{F_G}$, $\mathbf{F_F}$, $\mathbf{F_{WG}}$ und $\mathbf{F_{WF}}$ sind keine Brandtschen Gruppoide.

Beweis: (z. B. für $\mathbf{F_G}$). Wählen wir $\varepsilon = \varepsilon_{(-1,7)}$, $\varepsilon' = \varepsilon_{(0,1)}$, Dann ist $\varepsilon, \varepsilon' \in F_G$. Setzen wir voraus, daß ein solches $\alpha \in P$ existiert, daß $\alpha \in \mathbf{H}(\varepsilon, \varepsilon')$ [H-D. 2.3] und $\alpha \in F_G$ ist. Dann müßte $\alpha \in M$, $\alpha \sim \varepsilon_{(-1,7)}$, $D(\alpha) = (-1, 7)$, $\alpha[\mathrm{D}(\alpha)] = (0,1)$ sein. Da $\varepsilon(0) = 0$, $\varepsilon(\pi) = \pi$, $\varepsilon(2\pi) = 2\pi$ ist, sind nach [6] S. 1.2 die Punkte 0, π, 2π miteinander konjugiert. Nach S. 2.3 und [6] S. 1.2 müßte, in Hinsicht dazu, daß $\alpha \in M$ ist, $|\alpha(0) - \alpha(2\pi)| \geqq 2\pi$ sein. Aber aus $\alpha[\mathrm{D}(\alpha)] = (0,1)$ folgt, daß für je zwei $t_1, t_2 \in \mathrm{D}(\alpha)$ ist: $|\alpha(t_1) - \alpha(t_2)| < 1$.

§ 4: DIE PHASENMENGE DES RAUMS $\mathfrak{S}$

Definition 4.1. $\mathfrak{S}$ sei ein zweidimensionaler Raum von stetigen Funktionen. Die Menge aller Phasen des Raums $\mathfrak{S}$ werden wir mit S bezeichnen und die Phasenmenge des Raums $\mathfrak{S}$ nennen. Die zugehörige Teilalgebra in der Kategorie **P** bezeichnen wir **S**.

Satz 4.1. Es sei $\alpha \sim \beta$. Dann existiert $\gamma \in F$ so, daß $\beta = \gamma\alpha$. Und umgekehrt.

Beweis: I. Es sei $\alpha \sim \beta$. Dann ist $\mathrm{D}(\alpha) = \mathrm{D}(\beta)$ und es existiert die Determinante $|c_{ik}| \neq 0$ $(i, k = 1, 2)$, so daß

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}} \tag{1}$$

Wählen wir die Funktion $\varepsilon = \varepsilon_{\alpha[\mathrm{D}(\alpha)]}$, Dann ist $\varepsilon(x) = x$ für $x \in \alpha[\mathrm{D}(\alpha)]$. Nach S.2.1 existiert die Funktion $\gamma_1 \in P_{\alpha[\mathrm{D}(\alpha)]}$, so daß

$$\operatorname{tg} \gamma_1(x) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} x + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} x + c_{22}} \tag{2}$$

Da $\gamma_1 \in P_{\alpha[\mathrm{D}(\alpha)]}$, ist $(\gamma_1, \alpha) \in \mathrm{D}(\varphi)$. Setzen wir in (2) $x = \alpha(t)$. In Hinsicht auf (1) erhalten wir

$$\operatorname{tg} \gamma_1[\alpha(t)] = \operatorname{tg} \beta(t)$$

Da $\gamma_1\alpha$ und β stetig sind, muß eine ganze Zahl k existieren, so daß:

$$\gamma_1[\alpha(t)] = \beta(t) + k\pi \tag{3}$$

Konstruieren wir die Funktion $\gamma = \gamma_1 - k\pi$. Dann ist $\mathrm{D}(\gamma) = \alpha[\mathrm{D}(\alpha)]$ und deshalb $(\gamma, \alpha) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und nach (3) gilt:

$$\gamma[\alpha(t)] = \gamma_1[\alpha(t)] - k\pi = \beta(t)$$

d. h. $\gamma\alpha = \beta$.

II. Es existiere $\gamma \in F$, so daß $(\gamma, \alpha) \in \mathrm{D}(\varphi)$ und $\beta = \gamma\alpha$. Dann ist $\mathrm{D}(\alpha) = \mathrm{D}(\gamma\alpha)$ und es existiert eine Determinante $|c_{ik}| \neq 0$ $(i, k = 1, 2)$, so daß

$$\operatorname{tg} \gamma(x) = \frac{c_{11} \operatorname{tg} x + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} x + c_{22}} \tag{4}$$

Setzen wir $x = \alpha(t)$ für $t \in \mathrm{D}(\alpha)$. Dann ist $x \in \alpha[\mathrm{D}(\alpha)]$ und nach (4) ist

$$\operatorname{tg} \gamma[\alpha(t)] = \frac{c_{11} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{12}}{c_{21} \operatorname{tg} \alpha(t) + c_{22}}$$

Deshalb $\beta = \gamma\alpha \sim \alpha$. Unser Satz ist bewiesen.

Satz 4.2: α, β seien die Phasenfunktionen desselben Raums $\mathfrak{S}$. Dann ist $\mathrm{r}(\alpha) = \mathrm{r}(\beta)$.

Beweis: Da $\alpha, \beta \in S$ sind, ist $\mathrm{D}(\alpha) = \mathrm{D}(\beta)$ und nach D. 3.1.3 ist $\mathrm{r}(\alpha) = \mathrm{r}(\beta)$.

Definition 4.2: Die Rechtseinheit aller Phasenfunktionen des Raums $\mathfrak{S}$ nennen wir die Rechtseinheit des Raums $\mathfrak{S}$ oder S und bezeichnen mit $\mathrm{r}(S)$.

Satz 4.3: Für jeden zweidimensionalen Raum $\mathfrak{S}$ gilt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\alpha = \mathbf{F}_{\alpha[\mathrm{D}(\alpha)]} \cdot \alpha$$

wobei α eine beliebige Phase des Raums $\mathfrak{S}$ ist.

Beweis: Aus S. 4.1 und S. 2.3 folgt:

$$\mathbf{S} = \mathbf{F}\alpha$$

Die Gleichheit $\mathbf{F} \cdot \alpha = \mathbf{F}_{\alpha[\mathrm{D}(\alpha)]} \cdot \alpha$ folgt daraus, daß $\beta \in F$ ist gerade dann mit α multiplizierbar, wenn $\mathrm{D}(\beta) = \alpha[\mathrm{D}(\alpha)]$ ist, d. h. wenn $\beta \in F_{\alpha[\mathrm{D}(\alpha)]}$ ist.

LITERATURVERZEICHNISS

[1] Borůvka, O.: *Differentialtransformationen 2. Ordnung.* VEB Deutsch. Verlag der Wissenschaften — Berlin 1967.

[2] Haase, M. und Michler, L.: *Theorie der Kategorien* — VEB Deutsch. Verlag der Wissenschaften — Berlin 1966.

[3] Stach, K.: *Die Kategorie der Phasenfunktionen.* Spisy přír. fak. UJEP Brno, 10/1969, Serie A 35, Nr. 508.

[4] Borůvka, O.: *Über eine Charakterisierung der allgemeinen Dispersionen linearen Differentialgleichungen 2. Ordnung.* Mathem. Nachrichten, 38. Band, Heft 5/6, Berlin 1968.

[5] Stach, K.: *Die allgemeinen Eigenschaften der Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen.* Spisy přír. fak. UJEP Brno, 1966, Nr. 478.

[6] Stach, K.: *Die vollständigen Kummerschen Transformationen zweidimensionaler Räume von stetigen Funktionen.* Archivum Mathem., T 3, Fasc. 3, Brno 1968.

K. Stach
katedra matematiky
Vysoká škola báňská
Ostrava, ČSSR