Lev M. Berkovič; Nikolai Khristovich Rozov

Приведение к автономному виду некоторых нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка

Archivum Mathematicum, Vol. 8 (1972), No. 4, 219--226

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/104782

ARCH. MATH. 3, SCRIPTA FAC. SCI. NAT. UJEP BRUNENSIS,
VIII: 219 — 226, 1972

ПРИВЕДЕНИЕ К АВТОНОМНОМУ ВИДУ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ 2-го ПОРЯДКА

Л. М. Беркович, Н. Х. Розов

(Поступило в редакцию 23-го мая 1972)

ВВЕДЕНИЕ

Один из методов преобразования неавтономных нелинейных дифференциальных уравнений в автономные был развит в [8], см. также [7]. Он применим к уравнениям, представляющим собой сумму приводимой линейной части и нелинейности специального вида. В § 1 формулируются теоремы, составляющие основу этого метода. В §§ 2, 3 этот метод привлекается для исследования некоторых классов нелинейных уравнений. При этом удается унифицировать и указать единый способ получения целого ряда достаточных признаков интегрируемости в квадратурах, установленных ранее различными специальными приемами.

§ 1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

Рассмотрим нелинейное уравнение вида

$$(1.1) \qquad \sum_{K=0}^{n} a_K(x)\, y^{(K)} + u^n v F\left(\frac{y}{v}, \frac{y'v - yv'}{uv^2}\right) = 0, \quad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x},$$

где на некотором интервале $\alpha < x < \beta$

$$a_K(x) \in C^K,\ a_n(x) \neq 0;\ u = u(x) \in C^n,\ u(x) > 0;\ v = v(x) \in C^n,$$
$$v(x) \neq 0;$$

$F(\xi, \eta)$ — произвольная непрерывная функция.

Будем говорить, что линейная часть уравнения (1.1) приводима преобразованием

$$(1.2) \qquad y = v(x)\, z,\ \mathrm{d}t = u(x)\, \mathrm{d}x,$$

если уравнение с переменными коэффициентами

$$\sum_{K=0}^{n} a_K(x)\, y^{(K)} = 0$$

после этого преобразования сводится к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\sum_{K=0}^{n} b_K \frac{d^K z}{dt^K} = 0, \quad b_K = \text{const}, \quad b_n \neq 0.$$

Непосредственной проверкой устанавливается

Теорема 1. *Если линейная часть уравнения* (1.1) *приводима преобразованием* (1.2), *то уравнение* (1.1) *после этого преобразования принимает автономный вид*

$$\sum_{K=0}^{n} b_K \frac{d^K z}{dt^K} + F\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

и допускает решение $y = \varrho v(x)$, *где* ϱ — *корень уравнения*

$$b_0\varrho + F(\varrho, 0) = 0.$$

Более общий результат сформулирован в [9].

Из теоремы 1 немедленно следует

Теорема 2. *Если линейная часть уравнения*

$$\sum_{K=0}^{n} a_K(x)\, y^{(K)} + \sum_{s=1}^{l} \varphi_s(x)\, y^{m_s} = 0; \quad m_s \neq 1, \quad s = 1, \ldots, l, \tag{1.3}$$

приводима преобразованием (1.2), *причем*

$$p_s u^n \equiv \varphi_s(x)\, v^{m_s - 1}, \quad p_s = \text{const}, \quad s = 1, \ldots, l, \tag{1.4}$$

то уравнение (1.3) *после этого преобразования принимает автономный вид*

$$\sum_{K=0}^{n} b_K \frac{d^K z}{dt^K} + \sum_{s=1}^{l} p_s z^{m_s} = 0$$

и допускает решение $y = \varrho v(x)$, *где* ϱ — *корень алгебраического уравнения*

$$b_0\varrho + \sum_{s=1}^{l} p_s \varrho^{m_s} = 0.$$

Частный случай этой теоремы доказан в [7].

В случае уравнений 2-го порядка основное условие применимости этих теорем — наличие *приводимой* линейной части — всегда выполнено, так как для любого линейного уравнения 2-го порядка с непрерывными коэффициентами всегда существует преобразование вида (1.2), приводящее к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Именно, справедлива ([6])

Теорема 3. *Линейное уравнение 2-го порядка с непрерывными коэффициентами*

$$y'' + f(x)\, y' + g(x)\, y = 0$$

приводимо к уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^2 z}{dt^2} - (\tau_1 + \tau_2)\frac{dz}{dt} + \tau_1\tau_2 z = 0, \qquad \tau_1, \tau_2 = \text{const},$$

преобразованием (1.2), *где функции* $v(x)$ *и* $u(x)$ *таковы, что имеет место факторизация*

$$(1.5)\quad (D^2 + fD + g)\,y \equiv \left(D - \frac{v'}{v} - \tau_2 u - \frac{u'}{u}\right)\left(D - \frac{v'}{v} - \tau_1 u\right) y,\ D = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}.$$

Классы нелинейных уравнений 2-го порядка, приводимых к автономному виду, можно, таким образом, получить, ,,увязывая" нелинейность как раз с теми функциями $v(x)$ и $u(x)$, которые порождают преобразование (1.2), приводящее линейную часть этого уравнения.

§ 2. УРАВНЕНИЯ СО СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Использование теорем 2 и 3 позволяет для класса нелинейных уравнений

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y + \varphi(x)\,y^m = 0$$

выявить ряд случаев приводимости к автономному виду и указать некоторые достаточные признаки интегрируемости в квадратурах.

Приведем отдельные примеры такого рода результатов (см. также [7]).

1. Академик О. Борувка в своей известной монографии ([10], стр. 32) рассматривает, в частности, уравнение

$$(2.1)\qquad y'' - \frac{q'(x)}{q(x)}\,y' + q(x)\,y + bq^2(x)\,y^{-3} = 0, \qquad b = \mathrm{const}.$$

Уравнение (2.1) *имеет решение*

$$y = \sqrt{y_1^2 - bw_0^{-2}y_2^2},$$

где $y_1(x)$ *и* $y_2(x)$ — *фундаментальная система решений линейного уравнения*

$$y'' - \frac{q'(x)}{q(x)}\,y' + q(x)\,y = 0,$$

а $w_0 = q^{-1}(x)\,w(x) \equiv \mathrm{const}$; $w(x)$ — *определитель Вронского этой фундаментальной системы. Преобразованием* (1.2), *где*

$$v(x) = (-b_0/b)^{\frac14}(y_1^2 - bw_0^{-2}y_2^2)^{\frac12},$$

$$u(x) = (-b_0/b)^{-\frac12}q(y_1^2 - bw_0^{-2}y_2^2)^{-1}, \qquad b_0 = \mathrm{const} \neq 0,$$

уравнение (2.1) *приводится к автономному виду*

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + b_0z + bz^{-3} = 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что преобразование

$$y = \sqrt{|q(x)|}\;Y$$

превращает уравнение (2.1) в уравнение

$$Y'' + \left(q + \frac{q''}{2q} - \frac{3q'^2}{4q^2}\right) Y + bY^{-3} = 0,$$

для которого справедлива теорема 3 работы [7].

2. *Уравнение вида*

$$(2.2)\qquad y'' + f(x)\,y' + g(x)\,y = \frac{\varphi(x)}{y}, \qquad \varphi(x) \geqq 0,$$

при условии

$$(2.3)\quad g \equiv a\varphi^2 \exp\left(2\int f \mathrm{d}x\right) + \frac{\varphi''}{2\varphi} - \frac{3\varphi'^2}{4\varphi^2} - \frac{f\varphi'}{2\varphi} + f', \qquad a = \mathrm{const},$$

приводится преобразованием (1.2), *где*

$$(2.4)\quad v(x) = \varphi^{-\frac{1}{2}}(x) \exp\left(-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right), \qquad u(x) = \varphi(x) \exp\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

к автономному уравнению

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + az = \frac{1}{z},$$

которое интегрируется в квадратурах; уравнение (2.2) *при условии* (2.3) *допускает решение*

$$y = \varrho\, \varphi^{-\frac{1}{2}}(x) \exp\left(-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right),$$

где ϱ *удовлетворяет алгебраическому уравнению* $a\varrho^2 = 1$.

Покажем, как можно получить это утверждение. Преобразование (1.2) приводит левую часть уравнения (2.2), если функции $v(x)$ и $u(x)$ выбрать так, чтобы имела место факторизация (1.5). Положим, например, $\tau_1 + \tau_2 = 0$, $\tau_1\tau_2 = a$. Тогда сравнение коэффициентов при D в левой и правой частях равенства (1.5) дает

$$-2\frac{v'}{v} - \frac{u'}{u} = f,$$

откуда, пренебрегая постоянной интегрирования,

$$(2.5)\qquad v^2 u = \exp\left(-\int f(x)\,\mathrm{d}x\right).$$

С другой стороны, условие (1.4) приводит к соотношению

$$(2.6)\qquad u^2 = \varphi(x)\, v^{-2};$$

постоянный множитель p, имеющийся в (1.4), роли не играет. Равенства (2.4) теперь следуют из (2.5) и (2.6), а условие (2.3) обеспечивает совпадение в обеих частях равенства (1.5) коэффициентов при D°. Остается лишь применить теорему 2.

Утверждение п. 2 содержит как частные случаи многие известные признаки интегрируемости уравнения (2.2). Так, при $g(x) \equiv f'(x)$, $\varphi(x) \equiv 1$, $a = 0$ получается результат из [16]; при $f(x) \equiv 0$, $a = 0$ будем иметь признак, указанный в [16], [1]; при $f(x) \equiv 0$ приходим к результату, приведенному в [3][1]) или, в эквивалентном форме, в [5]; случай $a = 0$ рассматривался в [4], однако соответствующее условие типа (2.3) в явном виде там выписано не было.

---

[1]) Условие интегрируемости в [3] записано с опечаткой.

3. *Уравнение*

$$y'' + \left[(1 + k^2)\,\varphi^2 + \frac{\varphi''}{2\varphi} - \frac{3\varphi'^2}{4\varphi^2}\right] y - 2k^2\varphi^3 y^3 = 0,$$

$$(2.7) \qquad \varphi = \varphi(x) \geqq 0, \qquad k = \text{const},$$

преобразованием (1.2), *где*

$$v(x) = \varphi^{-\frac{1}{2}}(x), \qquad u(x) = \varphi(x),$$

приводится к автономному уравнению

$$\frac{d^2z}{dt^2} + (1 + k^2)\,z - 2k^2z^3 = 0,$$

интегрируемому в эллиптических функциях ([11]); *уравнение* (2.7) *допускает решение* $y = \varrho\varphi^{-\frac{1}{2}}(x)$, *где* ϱ *удовлетворяет алгебраическому уравнению*

$$(1 + k^2)\,\varrho - 2k^2\varrho^3 = 0.$$

Этот факт легко следует из утверждения п. 2 при $f(x) \equiv 0$, $a = 1 + k^2$. Аналогично единообразным путём могут быть получены результаты, приведенные, например, в [13],[2]) [14] и др.

§ 3. УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

Использование теорем 1 и 3 позволяет выявить ряд случаев приводимости к автономному виду и указать некоторые достаточные признаки интегрируемости в квадратурах нелинейных уравнений более общего вида, чем рассмотренные в § 2.

1. *Уравнение вида* (см. [12], [18])

$$(3.1) \qquad y'' - \frac{\varphi'}{\varphi}\,y' + \varphi^2 F\left(y, \frac{y'}{\varphi}\right) = 0, \qquad \varphi = \varphi(x) \neq 0,$$

приводится преобразованием (1.2), *где* $v(x) = 1$, $u(x) = \varphi(x)$ *к автономному виду*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + F\left(z, \frac{dz}{dt}\right) = 0.$$

Для доказательства достаточно заметить, что уравнение (3.1) принадлежит классу (1.1) при $n = 2$, $v(x) = 1$, $u(x) = \varphi(x)$, а линейная часть уравнения (3.1) приводима преобразованием (1.2) с указанными функциями $v(x)$ и $u(x)$.

2. В некоторых проблемах механики встречается ([17]) нелинейное уравнение

$$(3.2) \qquad y'' + f(x)\,y' + g(x)\,\psi(y) + \varphi(y)\,y'^2 = 0.$$

---

[2]) Условие интегрируемости в [13] записано с опечаткой.

Уравнение (3.2) *при условии*

$$g(x) \equiv a \exp(-2\int f\,dx), \qquad a = \text{const},$$

приводится преобразованием (1.2), *где*

$$v(x) = 1, \qquad u(x) = \exp(-\int f(x)\,dx), \tag{3.3}$$

к автономному уравнению

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a\psi(z) + \varphi(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 0,$$

которое интегрируется в квадратурах ([2]).

В самом деле, нелинейную часть уравнения (3.2) можно записать в виде, предусмотренном в (1.1):

$$g(x)\,\psi(y) + \varphi(y)\,y'^2 \equiv v(x)\,u^2(x)\,F\left(\frac{y}{v}, \frac{y'v - yv'}{v^2u}\right),$$

если считать $v(x) = 1$ и $g(x) = au^2(x)$, $a = \text{const}$. Остается убедиться, что для приводимости линейной части уравнения (3.2) преобразованием (1.2) надо выбрать $u(x)$ как указано в (3.3).

Совершенно аналогично рассматривается более общий случай:

Уравнение

$$y'' + f(x)\,y' + g(x)\,\psi(y) + \varphi(y)\,y'^2 + \alpha(x)\,\beta(y)\,y'^m = 0 \tag{3.4}$$

при условии

$$g(x) \equiv a \exp(-2\int f\,dx), \qquad a = \text{const},$$

$$\alpha(x) \equiv b \exp[(m-2)\int f\,dx], \qquad b = \text{const},$$

приводится преобразованием (1.2), (3.3) *к автономному виду*

$$\frac{d^2z}{dt^2} + a\psi(z) + \varphi(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + b\beta(z)\left(\frac{dz}{dt}\right)^m = 0.$$

Частный случай уравнения (3.4) при $\psi(y) \equiv 0$ изучался в [15].

3. Полезен следующий аналогичный теореме 1 результат, касающийся уравнения несколько иного вида, чем (1.1), а именно, уравнения

$$\sum_{K=0}^{n} a_K(x)\,y^{(K)} + u^n v^{1-p} y^p F\left(\frac{y^q}{v^q}\right) = 0, \qquad a_n \neq 0. \tag{3.5}$$

Если линейная часть уравнения (3.5) *приводима преобразованием* (1.2), *то уравнение* (3.5) *после этого преобразования принимает автономный вид*

$$\sum_{K=0}^{n} b_K \frac{d^K z}{dt^K} + z^p F(z^q) = 0, \qquad b_K = \text{const}, \qquad b_n \neq 0,$$

и допускает решение $y = \varrho v(x)$, *где* ϱ — *корень уравнения*

$$b_0\varrho + \varrho^p F(\varrho^q) = 0.$$

В качестве примера приложения этого утверждения приведём уравнение ([19])

$$y'' + \frac{y}{x^2} F\left(\frac{y^2}{x}\right) = 0, \qquad x > 0. \tag{3.6}$$

Оно принадлежит классу (3.5) при $n = 2$, $q = 2$, $p = 1$,

$$v(x) = \sqrt{x}, \qquad u(x) = x^{-1}; \tag{3.7}$$

легко, далее, проверить, что линейная часть уравнения (3.6) приводима преобразованием (1.2) с указанными функциями $v(x)$ и $u(x)$. Таким образом, можно сформулировать следующий результат:

Уравнение (3.6) *преобразованием* (1.2), (3.7) *приводится к автономному уравнению*

$$\frac{d^2z}{dt^2} - \frac{1}{4} z + zF(z^2) = 0,$$

интегрируемому в квадратурах; уравнение (3.6) *допускает решение* $y = \varrho\sqrt{x}$, *где* ϱ *удовлетворяет уравнению* $F(\varrho^2) = 1/4$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Bandić I.: Bull. Soc. math. phys. R. P. Serbie, 1957, *9*, N 1—2.
[2] Bandić I.: Glasnik mat. fiz. i astron., 1961, *16*, N 3—4, 161—165.
[3] Bandić I.: Z. angew. Math. Mech., 1963, *43*, N 9, 429—430.
[4] Bandić I.: Bull. Math. Soc. Sci. Math. R. S. Roumanie, 1967 (1968), *11* (59), N 3, 5—9.
[5] Bandić I., C. r. Acad. Sci. Paris, 1968, *267*, 644—646.
[6] Беркович Л. М.: Известия вузов. Математика, 1967, № 12, 3—14.
[7] Беркович Л. М.: Arch. Math., 1970, *6*, f. 1, cl. 2, 7—13.
[8] Беркович Л. М.: Дифференц. уравнения, 1971, *7*, № 2, 353—356.
[9] Беркович Л. М.: Всесоюзная конференция по качественной теории дифференциальных уравнений, Рязань, 1971, 153—154.
[10] Borůvka O., Lineare Differential transformationen 2. Ordnung, Berlin, 1967.
[11] Dasarathy B. V., Srinivasan P.: Int. J. Control, 1968, *7*, N 3, 299—300.
[12] Dasarathy B. V., Srinivasan P.: Int. J. Control, 1968, *7*, N 5, 497—499.
[13] Dasarathy B. V., Srinivasan P.: Int. J. Control, 1968, *8*, N 4, 317—320.
[14] Hille E.: Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1969, *62*, N 1, 7—10.
[15] Катев Т., Копрински С.: Годишник Висш. техн. учебни завед., Механика, 1966 (1967), *3*, N 1, 85—90.
[16] Leko T.: Glasnik mat. fiz. i astron., 1955, *10*, N 3, 171—174.
[17] Müller R.: Z. angew. Math. Mech., 1939, *19*, N 1, 36—54.
[18] Musa S. A., Srivastava S.: Int. J. Control, 1969, *10*, N 5, 583—592.
[19] Nehari Z.: J. Different. Equat., 1969, *5*, N 3, 452—460.

Л. М. Беркович, Н. Х. Розов
МГУ, Механико-математический факультет
СССР, 117234 Москва В-234

RÉDUCTION DE CERTAINES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES NON-LINÉAIRES DU DEUXIÈME ORDRE À UNE FORME AUTONOME

Résumé

On considère la classe d'équations non-linéaires

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)} + u^n v F\left(\frac{y}{v}, \frac{y'v - yv'}{uv^2}\right) = 0, \qquad ' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \tag{1.1}$$

où $x \in (\alpha, \beta)$, $a_k(x) \in C^k$, $a_n(x) \neq 0$, $u = u(x) \in C^n$, $u(x) > 0$, $v = v(x) \in C^n$, $v(x) \neq 0$ et $F(\zeta, \eta)$ est une fonction continue arbitraire.

Théorème 1. Si l'équation linéaire à coefficients variés $\sum_{k=0}^{n} a_k(x)\, y^{(k)} = 0$ se réduit à l'équation à coefficients constants $\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{\mathrm{d}^k z}{\mathrm{d}t^k} = 0$ par une transformation $y = v(x)z$, $\mathrm{d}t = u(x)\mathrm{d}x$, l'équation (1.1) se réduit par la même transformation à la forme autonome

$$\sum_{k=0}^{n} b_k \frac{\mathrm{d}^k z}{\mathrm{d}t^k} + F\left(z, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = 0$$

et possède la solution $y = \varrho v(x)$, où ϱ est une racine de l'équation $b_0\varrho + F(\varrho, 0) = 0$.

Acad. O. Borůvka a considéré ([10], p. 32) l'équation

$$y'' - \frac{q'(x)}{q(x)} y' + q(x)\, y + bq^2(x)\, y^{-3} = 0, \qquad b = \text{const.} \tag{2.1}$$

Dans ce travail on démontre que l'équation (2.1) a la solution

$$y = \sqrt{y_1^2 - bw_0^{-2}y_2^2},$$

où $y_1(x)$, $y_2(x)$ forment un système fondamental des solutions d'équation

$$y'' - \frac{q'(x)}{q(x)} y' + q(x)\, y = 0,$$

$w(x)$ est le wronskien de ce système et $w_0 = q^{-1}(x)\, w(x) = \text{const.}$ Alors, l'équation (2.1) par la transformation

$$y = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{\frac{1}{4}} (y_1^2 - bw_0^{-2}y_2^2)^{\frac{1}{2}} z, \qquad \mathrm{d}t = \left(-\frac{b_0}{b}\right)^{-\frac{1}{2}} (y_1^2 - bw_0^{-2}y_2^2)^{-1} q(x)\, \mathrm{d}x, \qquad b_0 = \text{const} \neq 0,$$

se réduit à la forme autonome $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} + b_0 z + bz^{-3} = 0$.

On trouve aussi les conditions suffisantes pour réductibilité à une forme autonome pour les équations (2.2), (2.7), (3.1), (3.2), (3.4), (3.6). Ce permet d'obtenir par la méthode unique les critères d'intégrabilité par quadratures de ces équations.